dove $I = \cup_{k>k_0} I_k$ e $\big|[0,T] \cap I\big|$ indica la misura dell'insieme $[0,T] \cap I$, i.e. $\big|[0,T] \cap I\big| = 2\beta[K(T) - k_0]$. Per $T \to +\infty$, si ha $k(T) \to \infty$, così che di nuovo vale la (17.11) e si trova una contraddizione. ■

Osservazione 17.25 L'idea della dimostrazione del teorema 17.24 è la seguente. Se (come si suppone per assurdo) $\dot{W}(y) < 0$, ogni qual volta la traiettoria passa vicino a y, la funzione W diminuisce con velocità di decrescita maggiore di un valore strettamente positivo $c/2$, mentre, quando è lontana, sappiamo che non può aumentare (perché $\dot{W} \leq 0$ in generale). Poiché la traiettoria passa vicino a y infinite volte (essendo $y \in L_\omega(x)$) e ogni volta W diminuisce di una quantità finita e non nulla, ne segue che W deve diminuire complessivamente di una quantità infinita, cioè deve tendere a $-\infty$, contro l'ipotesi che sia positiva.

Osservazione 17.26 Se $\beta = +\infty$, invece che nel modo indicato sopra si può ragionare come nel caso $\beta < +\infty$, sostituendo a β un qualsiasi tempo finito (per esempio $\beta = 1$).

Osservazione 17.27 Nel caso di sistemi dinamici non autonomi la (17.1) va sostituita con

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{17.13}$$

dove $f \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe C^1 dipendente esplicitamente dal tempo. Le definizioni e proprietà date sopra si estendono inalterate a sistemi non autonomi (17.13).

Definizione 17.28 (Sistema meccanico) *Un* sistema meccanico *a ℓ gradi di libertà è un sistema dinamico descritto dall'equazione*

$$A\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t), \tag{17.14}$$

dove $q \in \mathbb{R}^\ell$ e

1. *A è una matrice $\ell \times \ell$ simmetrica definita positiva (*matrice di massa generalizzata*),*
2. *$F \colon \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$ è una funzione di classe C^1 (*forza*).*

Osservazione 17.29 Poiché è definita positiva, la matrice simmetrica A è invertibile (cfr. l'esercizio 10). Nel caso particolare in cui si abbia $\ell = 3N$, con $N \in \mathbb{N}$, e la matrice di massa generalizzata A sia una matrice diagonale con i primi tre elementi uguali a m_1, i tre successivi uguali a m_2, e così via fino agli ultimi tre uguali a m_N (in tal caso si chiama semplicemente *matrice di massa*), se scriviamo

$$q = x := (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}), \qquad F = (F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \dots, F_1^{(N)}, F_2^{(N)}, F_3^{(N)}),$$

la (17.14) diventa

$$m_i \ddot{x}_k^{(i)} = F_k^{(i)}(x, \dot{x}, t), \qquad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, 3. \tag{17.15}$$

Il vettore $F^{(i)}$ in $\mathbb{R}^3$ di componenti $(F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, F_3^{(i)})$ rappresenta la *forza* che agisce sul punto materiale P_i di massa m_i che si trova nel punto di coordinate $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ (un *punto materiale* è un corpo puntiforme massivo). La forza è un esempio di quello che viene comunemente chiamato vettore applicato. Si definisce *vettore applicato* un segmento orientato che unisce due punti nello spazio tridimensionale. Un vettore applicato è caratterizzato da: punto di applicazione, direzione, verso e norma (o modulo). La *retta d'azione* di un vettore applicato in un punto è la retta parallela al vettore e passante per il suo punto di applicazione. Le classi di equivalenza ottenute identificando i vettori applicati che differiscono solo per il punto di applicazione definiscono i vettori nel senso della definizione 1.1. Un vettore applicato si può quindi individuare dando una coppia (x, v), dove x è un punto dello spazio tridimensionale e v un vettore in $\mathbb{R}^3$. Dati più vettori applicati $(x_1, v_1), \ldots, (x_k, v_k)$ si definisce *risultante* il vettore $v = v_1 + \ldots + v_k$, dove la somma è quella ordinaria tra vettori (cfr. il §1). La forza che agisce sul punto materiale P_i si può immaginare come un vettore applicato nel punto $x^{(i)}$ in cui si trova P_i; il vettore $F^{(1)} + \ldots + F^{(N)}$ costituisce la risultante delle forze che agiscono sul sistema di N punti materiale $P_1, \ldots, P_N$.

Osservazione 17.30 La (17.15) è nota come *equazione di Newton* (o *legge di Newton* o *equazione del moto*). L'equazione di Newton esprime il *secondo principio della dinamica* (o *principio di Newton*): la forza che agisce sul punto materiale P_i è proporzionale alla sua accelerazione e la costante di proporzionalità costituisce la *massa* m_i del punto materiale.

Definizione 17.31 (Sistema meccanico conservativo) *Un* sistema meccanico conservativo *a ℓ gradi di libertà è un sistema dinamico descritto dall'equazione*

$$A\,\ddot{q} = F(q), \qquad F(q) = -\nabla V(q), \tag{17.16}$$

dove $q \in \mathbb{R}^\ell$, $\nabla = \partial/\partial q = (\partial/\partial q_1, \ldots, \partial/\partial q_\ell)$ e

1. *A è una matrice $\ell \times \ell$ simmetrica definita positiva (*matrice di massa generalizzata*),*
2. *$V\colon \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^2 (*energia potenziale*) e F è la* forza.

Osservazione 17.32 Un sistema meccanico si può rappresentare nella forma (17.13): introducendo la variabile $p = \dot{q}$, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1} p, \\ \dot{p} = F(q, p, t), \end{cases} \tag{17.17}$$

che è appunto della forma (17.13) con $x = (q, p)$ e $f(x, t) = (A^{-1}p, F(q, p, t))$. Un discorso analogo vale se il sistema meccanico è conservativo, per il quale si ottiene

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1} p, \\ \dot{p} = -\nabla V(q). \end{cases} \tag{17.18}$$

In tal caso l'*energia* (o *energia totale*), definita come

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A\dot{q} \rangle + V(q), \tag{17.19}$$

è una costante del moto. Chiameremo *energia cinetica* il primo termine nel membro di destra della (17.19). Quindi l'energia (totale), nel caso di un sistema meccanico conservativo, è data dalla somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

Osservazione 17.33 Più in generale possiamo considerare un sistema dinamico la cui "energia" è della forma

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + V(q), \tag{17.20}$$

dove $q \in \mathbb{R}^\ell$ e $A = A(q)$ è una matrice $\ell \times \ell$ simmetrica definita positiva invertibile e di classe C^2 nel suo argomento. È facile verificare che, per il sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1}(q)\, p, \\ \dot{p} = \dfrac{1}{2} \left\langle A^{-1}(q)\, p, (\nabla A(q))\; A^{-1}(q)\, p \right\rangle - \nabla V(q), \end{cases} \tag{17.21}$$

la (17.20) è una costante del moto. Infatti, poiché $A^{-1}(q)A(q) = \mathbb{1}$, si ha

$$\nabla \left(A^{-1}(q)A(q) \right) = \left(\nabla A^{-1}(q) \right) A(q) + A^{-1}(q)\, (\nabla A(q)) = 0, \tag{17.22}$$

così che

$$\nabla A^{-1}(q) = -A^{-1}(q)\, (\nabla A(q))\, A^{-1}(q). \tag{17.23}$$

Essendo A simmetrica, anche A^{-1} è simmetrica (cfr. l'esercizio 11); per ogni $B(q) \in L(E)$ si ha $\left\langle p, A^{-1}(q)B(q)\, p \right\rangle = \left\langle A^{-1}(q)\, p, B(q)\, p \right\rangle$. Dalle (17.22) e (17.23) segue che la (17.20) è una costante del moto, come anticipato. Si può allora estendere la definizione di sistema meccanico conservativo nel modo seguente.

Definizione 17.34 (Sistema meccanico conservativo generalizzato) *Si definisce* sistema meccanico conservativo generalizzato *(o* sistema meccanico conservativo *tout court) un sistema dinamico descritto da equazioni della forma* (17.21)*, che prendono il nome di* equazioni del moto. *Diremo, per estensione, che la* (17.20) *è l'*energia *(totale) del sistema,* $T(q, \dot{q}) = \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle /2$ *è l'*energia cinetica *e* $V(q)$ *è* l'energia potenziale. *Se* $q, p \in \mathbb{R}^\ell$, *chiameremo* ℓ *il numero di* gradi di libertà *del sistema.*

Vedremo nel capitolo 11, nell'ambito del formalismo lagrangiano, che l'equazione di Newton (17.15) in presenza di vincoli porta sempre a un'equazione della forma (17.21).

Osservazione 17.35 Un punto di equilibrio per il sistema meccanico conservativo (17.16) (o (17.21)) è dato da $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$, dove q_0 è un punto stazionario della funzione $V(q)$, così che risulta $F(q_0) = 0$.

Osservazione 17.36 Dato un sistema della forma (17.1), le traiettorie sono curve (di classe C^2) in $\mathbb{R}^n$. Il campo vettoriale f è tale che, in ogni punto x di una traiettoria, il vettore $f(x)$ è tangente alla traiettoria in x (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 3). Data una funzione $W\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si possono considerare le superfici di livello $W(x) = c$, al variare di $c \in \mathbb{R}$ (cfr. la (17.5)). In generale le superfici di livello di una generica funzione W non hanno alcuna relazione con le traiettorie. Tuttavia se W è una costante del moto, i.e. se W assume valori costanti lungo le traiettorie del sistema (17.1), allora le traiettorie sono contenute nelle superfici di livello. Ne è un esempio un sistema meccanico conservativo in cui la funzione W sia l'energia totale.

§18 Linearizzazione

In alcuni casi, per studiare il comportamento qualitativo di un sistema dinamico nelle vicinanze di un punto di equilibrio, in particolare per discutere la stabilità del punto di equilibrio stesso, è sufficiente studiare il sistema dinamico che si ottiene "linearizzando" il campo vettoriale nell'intorno del punto di equilibrio. Vedremo che non sempre questo è possibile. Quando lo è, tuttavia, disponiamo di un metodo semplice per determinare se un punto di equilibrio sia stabile o no e per descrivere qualitativamente le traiettorie che si originano da dati iniziali sufficientemente vicini al punto di equilibrio.

Sia x_0 un punto di equilibrio per il sistema dinamico (17.1). Poiché f è di classe C^1 e $f(x_0) = 0$, possiamo scrivere

$$\dot{x} = A(x - x_0) + Q(x), \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|Q(x)|}{|x - x_0|} = 0, \tag{18.1}$$

dove A è la matrice $n \times n$ di elementi $A_{ij} = [\partial f_i / \partial x_j](x_0)$ e $Q(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a $|x - x_0|$ (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3 con $k = 1$).

Definizione 18.1 (Sistema dinamico linearizzato) *Il sistema dinamico*

$$\dot{x} = A(x - x_0), \tag{18.2}$$

che si ottiene da (18.1) *trascurando la correzione* $Q(x)$ *alla parte lineare si chiama* sistema linearizzato *del sistema* (17.1) *nell'intorno del punto di equilibrio* x_0.

Lemma 18.2 *Sia* $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione non negativa di classe* C^1. *Se*

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \le \kappa g, \qquad 0 \le t \le T, \tag{18.3}$$

per qualche costante κ, *allora*

$$g(t) \le e^{\kappa t}\, g(0), \tag{18.4}$$

per ogni $0 \le t \le T$.