

**Osservazione 19.8** Sotto le ipotesi del lemma 19.6, si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$ , ma non necessariamente il punto  $x_0$  è asintoticamente stabile. In altre parole non necessariamente ogni punto in un intorno di  $x_0$  deve tendere a  $x_0$ . Come (facile) controesempio si può considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases} \quad (19.8)$$

Per ogni  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  si ha  $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}_1, 0)$  e quindi  $L_\omega(\bar{x}) = \{(\bar{x}_1, 0)\}$ . D'altra parte la retta  $x_2 = 0$  è costituita da punti di equilibrio stabili ma non punti di equilibrio asintoticamente stabili.

**Lemma 19.9** *Dato il sistema dinamico (17.1), se esiste un insieme compatto  $K$  tale che  $\varphi(t, x) \in K \forall t \geq 0$  allora  $L_\omega(x) \neq \emptyset$  e  $L_\omega(x) \subset K$ .*

*Dimostrazione.* Se  $K$  è compatto e  $\varphi(t, x) \in K$  per ogni  $t \geq 0$ , data una successione monotona divergente  $\{t_k\}$ , si ha  $\varphi(t_k, x) \in K \forall x \in K$  e  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Quindi è possibile trovare una sottosuccessione  $\{t_{k_n}\}$  tale che, per ogni  $x \in K$ , la successione  $\varphi(t_{k_n}, x)$  converge a un punto in  $K$ , che chiameremo  $y$ . Si ha  $y \in K$ , per la compattezza di  $K$ , e  $y \in L_\omega(x)$  per la definizione 17.12 di insieme  $\omega$ -limite. ■

## §19.2 Teoremi di stabilità

**Teorema 19.10** (TEOREMA DI LJAPUNOV) *Sia  $x_0$  un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esistano un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e una funzione  $W: B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tali che*

1.  $W(x_0) = 0$ , e  $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;
2.  $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$ .

*Allora  $x_0$  è un punto di equilibrio stabile. Se inoltre*

3.  $\dot{W}(x) < 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ,

*allora  $x_0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un intorno  $B_\varepsilon(x_0) \subset B(x_0)$  di raggio  $\varepsilon$  e centro in  $x_0$ , e definiamo

$$\alpha(\varepsilon) := \min_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} W(x). \quad (19.9)$$

Si ha  $\alpha(\varepsilon) > 0$ , dove il segno stretto vale in virtù dell'ipotesi 1 nell'enunciato del teorema. Definiamo

$$U := \left\{ x \in B_\varepsilon(x_0) : W(x) < \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon) \right\}. \quad (19.10)$$

Poiché  $W$  è una funzione continua, l'insieme  $U$  è aperto (cfr. l'esercizio 22). Quindi esiste un intorno  $B_\delta(x_0) \subset U$ , con  $\delta < \varepsilon$  (cfr. la figura 4.7).

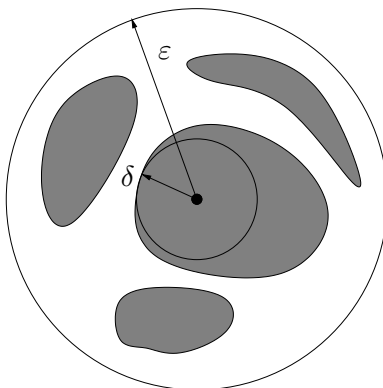


Figura 4.7: Discussione del teorema di Ljapunov. L'insieme  $U$  è costituito dalla regione ombreggiata.

Per dimostrare che  $x_0$  è un punto di equilibrio stabile, è sufficiente far vedere che, sotto le ipotesi 1 e 2 del teorema, comunque si scelga un dato iniziale  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ , la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  si mantiene all'interno dell'intorno  $B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $t \geq 0$ . Per assurdo, supponiamo che esista un tempo finito  $t_1$  tale che, per qualche  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ , si abbia  $\varphi(t_1, \bar{x}) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ . Allora si avrebbe

$$0 < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} < W(\varphi(t_1, \bar{x})) - W(\bar{x}) = \int_0^{t_1} ds \frac{dW(\varphi(s, \bar{x}))}{ds} \leq 0, \quad (19.11)$$

che è ovviamente impossibile.

Supponiamo ora che valga anche l'ipotesi 3 del teorema. Consideriamo la chiusura dell'intorno  $B_\varepsilon(x_0)$ : poiché  $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$  è compatto e  $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(x_0)$  per ogni  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  (per l'appena dimostrata stabilità di  $x_0$ ), possiamo applicare il lemma 19.9 e concludere che, per ogni  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  si ha  $L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$ .

Sia  $y \in L_\omega(\bar{x})$ . Per il teorema 17.24, poiché  $W(x) \geq 0$  e  $\dot{W}(x) \leq 0$  per  $x \in B_\varepsilon(x_0)$ , si deve avere  $\dot{W}(y) = 0$ . Ma  $\dot{W}(x) < 0 \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ , i.e.  $\dot{W}(x) = 0$  solo per  $x = x_0$ , quindi  $y = x_0$ . Questo implica che comunque sia presa una successione  $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$  qualsiasi sua sottosuccessione convergente  $\{\varphi(t_{k_j}, \bar{x})\}$  deve convergere a  $x_0$ . Per il lemma 19.3 allora la successione stessa  $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$  deve convergere a  $x_0$ . D'altra parte questo risultato non dipende dalla particolare successione di tempi  $\{t_k\}$ . Possiamo concludere che per qualsiasi successione di tempi  $\{t_k\}$  il limite della successione  $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$  è  $x_0$ . Allora per il teorema 19.4 si deve avere  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$ . Questo mostra che il punto  $x_0$  è attrattivo. Poiché abbiamo già dimostrato che è stabile, segue che  $x_0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. ■

**Osservazione 19.11** L'idea della dimostrazione del teorema 19.10 è la seguente. Per l'ipotesi 2, le traiettorie che partono da punti vicini a  $x_0$  non portano verso punti in cui  $W$  assume valori più grandi e quindi rimangono vicini a  $x_0$  (stante l'ipotesi 1). Se inoltre vale l'ipotesi 3 le traiettorie portano verso punti in cui  $W$  assume valori più piccoli (in modo che  $W$  diminuisca strettamente), i.e. verso  $x_0$ .

**Osservazione 19.12** Nella dimostrazione della stabilità asintotica del punto di equilibrio  $x_0$ , una volta ottenuto  $y = x_0$  per ogni  $y \in L_\omega(\bar{x})$  si può direttamente applicare il lemma 19.6 per trovare  $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$ . A questo punto, poiché tale risultato vale per ogni  $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$  possiamo concludere che  $x_0$  è asintoticamente stabile.

**Osservazione 19.13** Nel caso in cui valga anche l'ipotesi 3 nel teorema 19.10, l'intorno  $B_\delta(x_0)$  è, per costruzione, contenuto nel bacino d'attrazione di  $x_0$  (cfr. la definizione 17.10). Questo fornisce un metodo per stimare il bacino d'attrazione di  $x_0$ : si cerca il massimo valore di  $\delta$  per cui l'argomento dato nella dimostrazione del teorema 19.10 funziona. Ovviamente, specie nel caso in cui il bacino abbia una forma fortemente asimmetrica, la stima così ottenuta può essere molto pessimistica.

**Osservazione 19.14** Se vale anche l'ipotesi 3 nel teorema 19.10, deve essere  $\dot{W}(x_0) = 0$  per il teorema 17.24, quindi non è necessario specificare il valore di  $\dot{W}(x_0)$  perché ovvio.

**Osservazione 19.15** Il teorema 19.10 permette di concludere che, per il sistema dell'osservazione 18.9, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se  $\varepsilon < 0$  (cfr. l'esercizio 23).

**Definizione 19.16** (FUNZIONE DI LJAPUNOV) *Chiameremo funzione di Ljapunov una funzione che verifichi le proprietà 1 e 2 del teorema 19.10.*

**Teorema 19.17** *Sia  $x_0$  un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esistano un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e una funzione  $W: B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tali che*

1.  $W(x_0) = 0$ , e  $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;
2.  $\dot{W}(x) \geq 0 \forall x \in B(x_0)$ , e  $\dot{W}(x_0) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ,

*allora  $x_0$  è un punto di equilibrio instabile.*

*Dimostrazione.* Se si applica il teorema 19.10 al sistema dinamico che si ottiene da (17.1) invertendo il segno del tempo, si trova che, per l'evoluzione inversa  $t \mapsto \varphi(-t, \bar{x})$ ,  $x_0$  è asintoticamente stabile. ■

**Teorema 19.18** (TEOREMA DI BARBAŠIN-KRASOVSKIJ) *Sia  $x_0$  un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esista una funzione  $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita in un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e di classe  $C^1$ , tale che*

1.  $W(x_0) = 0$ , e  $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ;
2.  $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$ .
3. esiste un insieme compatto  $P$ , chiusura di un aperto, tale che:
  - (a)  $x_0 \in P$ ,
  - (b)  $P$  è positivamente invariante,
  - (c) non esistono in  $P \setminus \{x_0\}$  traiettorie costituite unicamente da punti  $z$  in cui  $\dot{W}(z) = 0$ .

Allora  $x_0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile e l'insieme  $P$  è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

*Dimostrazione.* Poiché  $P$  è compatto e positivamente invariante, si ha  $L_\omega(x) \neq \emptyset \forall x \in P$  (cfr. il lemma 19.9). Sempre per il fatto che  $P$  è positivamente invariante, si ha  $L_\omega(x) \subset P$ . Sia  $y \in L_\omega(x)$ . Supponiamo per assurdo che sia  $y \neq x_0$ . Per l'unicità della soluzione dell'equazione (17.1) e poiché  $\varphi(t, x_0) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$ , si dovrebbe avere  $\varphi(t, y) \neq x_0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Ma  $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$  per il teorema 17.20; quindi esisterebbe una traiettoria  $\varphi(t, y) \in P \setminus \{x_0\}$  tale che  $\dot{W} = 0$  (per il teorema 17.24). Questo contraddice l'ipotesi 3(c). Perciò si deve avere  $y = x_0$ . A questo punto possiamo procedere come alla fine della dimostrazione del teorema 19.10 e concludere che  $x_0$  è asintoticamente stabile. Infine, ricordando la definizione 17.10, abbiamo che  $P$  deve essere contenuto nel bacino d'attrazione di  $x_0$ . ■

**Osservazione 19.19** Il teorema 19.18 è anche noto come *principio di invarianza di LaSalle*.

**Osservazione 19.20** Nel corso della dimostrazione del teorema 19.18, una volta trovato  $y = x_0$ , per dimostrarne la stabilità asintotica, si può anche ragionare come indicato nell'osservazione 19.12: si applica il lemma 19.6 per ottenere  $L_\omega(x) = \{x_0\}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ , quindi si utilizza il fatto che tale risultato vale per ogni  $x \in P$  per concludere che  $x_0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

**Osservazione 19.21** Tenendo presente l'osservazione 19.13, si vede che, dato un sistema dinamico, i teoremi 19.10 e 19.18 si possono utilizzare non solo per verificare se un dato punto di equilibrio è asintoticamente stabile, ma anche, eventualmente, per dare una stima del suo bacino d'attrazione.

**Teorema 19.22** (TEOREMA DI LAGRANGE-DIRICHLET) *In un sistema meccanico conservativo (17.21), i punti di minimo isolati dell'energia potenziale corrispondono a punti di equilibrio stabili.*

*Dimostrazione.* In un sistema meccanico conservativo (cfr. la definizione 17.34), se indichiamo con  $x = (q, \dot{q})$  i punti dello spazio delle fasi, l'energia (cfr. la (17.20))

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + V(q), \quad (19.12)$$

è una costante del moto. Sia  $q_0$  un punto di minimo isolato per l'energia potenziale  $V(q)$  i.e. tale che sia  $V(q) > V(q_0)$  per ogni  $q$  in un intorno di  $q_0$  (cfr. l'esercizio 26); possiamo allora definire la funzione di Ljapunov  $W(q, \dot{q}) = H(q, \dot{q}) - V(q_0)$  in un intorno del punto  $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$  e applicare il teorema 19.10 per concludere che il punto  $(q_0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per il sistema meccanico con energia (19.12). ■

Le ipotesi del teorema 19.22 possono essere indebolite nel modo seguente.

**Teorema 19.23** *Sia  $q_0$  un punto stazionario dell'energia potenziale  $V$ . Se esiste un intorno  $B(q_0)$  di  $q_0$  tale che per ogni  $r > 0$  con  $B_r(q_0) \subset B(q_0)$  esiste un aperto  $U \subset B_r(q_0)$  tale che  $q_0 \in U$  e  $V(q) > V(q_0) \forall q \in \partial U$ , allora  $(q_0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per il sistema meccanico conservativo (17.21).*

*Dimostrazione.* Poiché  $V$  è continua, per ogni  $\varepsilon_1 > 0$  si può trovare  $r_0 > 0$  tale  $|V(q) - V(q_0)| < \varepsilon_1 \forall q \in B_{r_0}(q_0)$ . Per ipotesi, per ogni  $r < r_0$ , esiste  $U \subset B_r(q_0)$  tale che  $F(q) := V(q) - V(q_0) > 0 \forall q \in \partial U$ . Per compattezza esiste il minimo  $m$  di  $F(q)$  per  $q \in \partial U$  e quindi  $m > 0$ ; inoltre  $m < \varepsilon_1$ . Sia  $\delta > 0$  tale che  $H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q_0) < m \forall (\bar{q}, \bar{v})$  tale che  $|\bar{q} - q_0| < \delta$  e  $|\bar{v}| < \delta$  (questo di nuovo è possibile per continuità poiché  $H(q_0, 0) = V(q_0)$ ). Sia  $(q(t), \dot{q}(t))$  la soluzione con dato iniziale  $(\bar{q}, \bar{v})$ . Si ha

$$V(q(t)) - V(q_0) \leq H(q(t), \dot{q}(t)) - V(q_0) = H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q_0) < m,$$

che mostra che  $q(t)$  non può attraversare  $\partial U$  (altrimenti si avrebbe  $q(t) \in \partial U$  e  $F(q(t)) < m$ ). Ne segue che  $|q(t) - q_0| < r \forall t \geq 0$ . D'altra parte, poiché la matrice  $A(q)$  è definita positiva, si ha, per un'opportuna costante positiva  $c_1$ ,

$$\begin{aligned} c_1 |\dot{q}(t)|^2 &\leq \frac{1}{2} \langle \dot{q}(t), A(q(t)) \dot{q}(t) \rangle = H(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t)) = H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q(t)) \\ &\leq (H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q_0)) - (V(q(t)) - V(q_0)) < m + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1, \end{aligned}$$

così che  $|\dot{q}(t)| < r' := \sqrt{2\varepsilon_1/c_1}$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , se scegliamo  $\varepsilon_1$  e  $r$  tali che  $\max\{r, r'\} < \varepsilon$ , si trova che per ogni dato iniziale  $(\bar{q}, \bar{v}) \in B_\delta(q_0, 0)$  si ha  $(q(t), \dot{q}(t)) \in B_\varepsilon(q_0, 0) \forall t \geq 0$ . ■

**Osservazione 19.24** Come mostra il teorema 19.23, perché  $(q_0, 0)$  sia un punto di equilibrio stabile per un sistema meccanico conservativo, la condizione che  $q_0$  sia un punto di minimo isolato per l'energia potenziale è sufficiente ma non necessaria. Come controesempio si può considerare il sistema meccanico con energia potenziale (cfr. la figura 4.8)

$$V(q) = q^5 \sin \frac{1}{q}, \quad (19.13)$$

per il quale  $(q, p) = (0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile nonostante che  $q = 0$  non sia un punto di minimo per  $V(q)$  (cfr. l'esercizio 28).

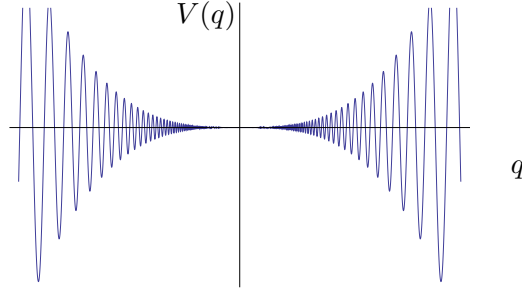


Figura 4.8: Grafico della funzione  $V(q)$  data dalla (19.13).

**Teorema 19.25** (TEOREMA DI ČETAEV) *Sia  $x_0$  un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esistano un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  e una funzione  $W : B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tali che*

1. *l'insieme  $U := \{x \in B(x_0) : W(x) > 0\}$  sia non vuoto;*
2.  *$x_0 \in \partial U$ ;*
3.  *$\dot{W}(x) > 0 \forall x \in U$ .*

*Allora  $x_0$  è un punto di equilibrio instabile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo un intorno  $B_\varepsilon(x_0) \subset B(x_0)$  di raggio  $\varepsilon$  e centro in  $x_0$  e indichiamo la sua chiusura con  $C$ , i.e.  $C := \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ . Per ipotesi, l'insieme  $U$  è non vuoto. Poiché  $U$  è aperto per costruzione – dato che  $W$  è continua e  $U$  è la controimmagine di un insieme aperto (cfr. l'esercizio 21) e  $x_0$  appartiene alla sua frontiera, esiste una componente connessa  $D$  di  $U$  tale che  $x_0 \in \partial D$ . Pertanto, per ogni  $\delta > 0$  esiste  $\bar{x} \in U \cap B_\delta(x_0)$  tale che  $W(\bar{x}) > 0$ . Sia  $a := W(\bar{x})$ . Poiché  $\dot{W}(x) > 0$  in  $U$ , si ha  $W(\varphi(t, \bar{x})) \geq W(\bar{x})$  fin tanto che la soluzione rimane in  $U$ . Definiamo  $\Omega := \{x \in U \cap C : W(x) \geq a\}$ . Per definizione di  $U$  si ha  $\Omega = \{x \in C : W(x) \geq a\} = W^{-1}[a, +\infty) \cap C$ , dove  $W^{-1}[a, +\infty)$  è chiuso, in quanto controimmagine di un insieme chiuso (cfr. l'esercizio 21), quindi  $\Omega$  è chiuso perché intersezione di due insiemi chiusi. Ne segue che  $\Omega$ , essendo ovviamente limitato, è un insieme compatto, così che, per il teorema di Weierstrass (cfr. l'esercizio 14 del capitolo 1), esiste il minimo

$$m := \min_{x \in \Omega} \dot{W}(x)$$

ed è strettamente positivo poiché  $\dot{W}(x) > 0 \forall x \in U$ . Allora, per ogni  $t > 0$  tale che  $\varphi(t, \bar{x}) \in U$ , si deve avere

$$W(\varphi(t, \bar{x})) \geq W(\bar{x}) + mt.$$

D'altra parte, se poniamo

$$M := \max_{x \in C} W(x),$$

si deve avere  $W(\varphi(t, \bar{x})) \leq M$  fin tanto che  $\varphi(t, \bar{x}) \in U \cap C$ . Ne segue che la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  deve uscire da  $U \cap C$  in un tempo finito  $t_1$ . Poiché essa non può attraversare  $\partial W$  (poiché  $W(x) = 0$  se  $x \in \partial U$ , mentre  $W(\varphi(t, \bar{x})) \geq a$ ), deve uscire da  $U$  attraversando la frontiera di  $C$ , i.e.  $\varphi(t_1, \bar{x}) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$ . ■

**Definizione 19.26** (FUNZIONE DI ČETAEV) *Chiameremo funzione di Četaev una funzione che verifichi le proprietà 1, 2 e 3 del teorema 19.25.*

**Osservazione 19.27** Il teorema 19.17 è un caso particolare del teorema 19.25 (corrisponde al caso in cui si abbia  $U = B(x_0) \setminus \{x_0\}$ ).

**Esempio 19.28** Si consideri il sistema dinamico  $\dot{x} = f(x)$ , in  $\mathbb{R}^2$ , dato da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_1^2 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^3 x_2^2. \end{cases}$$

L'origine  $x = 0$  è un punto di equilibrio. Il sistema linearizzato in un intorno dell'origine è  $\dot{x} = 0$ , quindi non dà informazioni sulla stabilità del punto di equilibrio. Possiamo invece applicare il teorema 19.25 per dimostrare che l'origine è un punto di equilibrio instabile, utilizzando

$$W(x) = x_1^2 - x_2^2$$

come funzione di Četaev. Si ha  $W(x) > 0$  nel cono  $C := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < |x_1|\}$  (cfr. la figura 4.9). Inoltre l'origine è nel vertice del cono, così che  $0 \in \partial C$ . Infine  $\dot{W}(x) = x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = x_1^4 + x_2^4 + O(|x|^5)$ . Si può trovare un intorno  $B(0)$  dell'origine tale che  $U := B(0) \cap C$  è non vuoto,  $0 \in \partial U$  e  $\dot{W}(x) > 0 \forall x \in U$ , così che le ipotesi del teorema 19.25 sono soddisfatte.

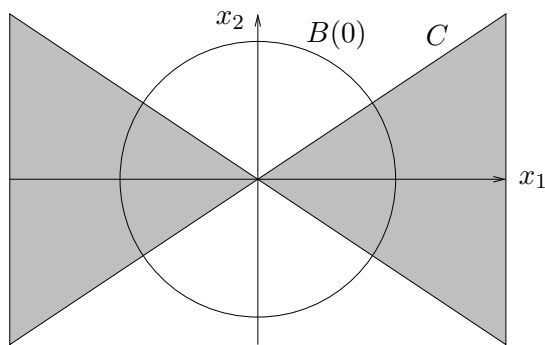


Figura 4.9: L'insieme  $U$  dell'esempio 19.28 dato dall'intersezione del cono  $C$  con l'intorno  $B(0)$ .

Nel caso di sistemi meccanici conservativi, il teorema di Lagrange-Dirichlet non permette di concludere nulla sulla stabilità di un punto d'equilibrio che corrisponda a un punto stazionario

dell'energia potenziale, ancorché isolato, che non sia un punto di minimo. Risultati parziali si ottengono utilizzando il teorema di Četaev, richiedendo però condizioni aggiuntive sull'energia potenziale. Torneremo sul problema generale successivamente, nell'ambito del formalismo lagrangiano (cfr. il capitolo 11), quando considereremo sistemi a un numero qualsiasi di gradi di libertà. Visto che nei prossimi capitoli ci limiteremo essenzialmente a sistemi unidimensionali (o comunque riconducibili a sistemi unidimensionali) nel resto del paragrafo considereremo esplicitamente sistemi a un grado di libertà, i.e. sistemi della forma (17.21) con  $\ell = 1$ . La stabilità dei punti di equilibrio può essere discussa facilmente mediante il teorema di Četaev, purché si assumano opportune ipotesi di non degenerazione (cfr. anche il capitolo 6).

Sia  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^{k+1}$  e sia  $q_0$  un punto stazionario di  $V$ . Si assuma che in un intorno di  $q_0$  la funzione  $V$  abbia la forma

$$V(q) = c(q - q_0)^k + R(q), \quad R(q) = O((q - q_0)^{k+1}), \quad c \neq 0. \quad (19.14)$$

Nel caso in cui  $k$  sia pari, si ha  $c > 0$  se  $q_0$  è un punto di minimo e  $c < 0$  se  $q_0$  è un punto di massimo. Se invece  $k$  è dispari,  $q_0$  è un punto di sella (indipendentemente dal segno di  $c$ ).

**Teorema 19.29** *Si consideri un sistema meccanico conservativo (17.21) con  $\ell = 1$ . Se  $q_0$  è un punto di massimo o di sella dell'energia potenziale  $V$  e la funzione  $V$  ha la forma*

$$V(q) = c(q - q_0)^k + R(q), \quad R(q) = O((q - q_0)^{k+1}), \quad c \neq 0,$$

*in un intorno di  $q_0$ , allora  $(q_0, 0)$  è un punto di equilibrio instabile.*

*Dimostrazione.* Dato  $\delta > 0$ , sia  $B_\delta(q_0)$  l'intorno di raggio  $\delta$  e centro in  $q_0$ . Definiamo

$$U := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q \in B_\delta(q_0), (q - q_0)p > 0, E(q, p) < 0\},$$

dove  $E(q, p) := H(q, p) - V(q_0)$ , e consideriamo la funzione di Četaev

$$W(q, p) = -E(q, p) (q - q_0)p.$$

Definiamo  $B_\delta^*(q_0) = B_\delta(q_0)$  se  $q_0$  è un punto di massimo e  $B_\delta^*(q_0) := \{q \in B(q_0) : c(q - q_0)^k < 0\}$  se  $q_0$  è un punto di sella. Se  $\delta$  è sufficientemente piccolo si ha  $V(q) < V(q_0)$  per ogni  $q \in B_\delta^*(q_0)$ . Inoltre per ogni  $q \in B_\delta^*(q_0)$  si ha  $E(q, p) < 0$  per  $p$  sufficientemente piccolo: basta infatti prendere  $p$  tale che  $|p|^2 < R(q) := 2A^{-1}(q)(-V(q))$ . Per costruzione si ha  $U \neq \emptyset$ ,  $(q_0, 0) \in \partial U$  e  $W(q, p) > 0 \forall (q, p) \in U$ . Inoltre

$$\begin{aligned} \dot{W}(q, p) &= -E(q, p) (\dot{q}p + (q - q_0)\dot{p}) \\ &= -E(q, p) \left( \frac{1}{A(q)} p^2 + \frac{q - q_0}{A^2(q)} A'(q) p^2 - (q - q_0) V'(q) \right) \\ &= -E(q, p) \left( \frac{1}{A(q)} p^2 + O((q - q_0)p^2) - k c (q - q_0)^k + O((q - q_0)^{k+1}) \right), \end{aligned}$$



dove  $A'(q)$  e  $V'(q)$  indicano le derivate delle funzioni  $A(q)$  e  $V(q)$ , rispettivamente, e quindi  $\dot{W}(q, p) > 0 \forall (q, p) \in U$  purché  $\delta$  sia sufficientemente piccolo. Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del teorema 19.25. Da qui segue che  $(q_0, 0)$  è un punto di equilibrio instabile. ■

**Osservazione 19.30** Dalla dimostrazione del teorema 19.29 si vede che, per ottenere che  $\dot{W}(q, p) > 0$  in  $U$ , la proprietà che serve è che  $(q - q_0)V'(q) < 0$  nella regione in cui si ha  $W(q, p) > 0$ . Le ipotesi sulla funzione  $V$  servono appunto a far sì che tale proprietà sia soddisfatta. Assumere semplicemente che  $q_0$  sia un punto stazionario isolato non di minimo non è sufficiente, come mostra il seguente controesempio:

$$V(q) = -q^6 \left( 2 - \cos \frac{1}{q} \right). \quad (19.15)$$

La funzione  $V(q)$  è di classe  $C^2$  e ha un punto di massimo isolato in  $q = 0$ ; d'altra parte

$$qV'(q) = -5q^6 \left( 2 - \cos \frac{1}{q} \right) + q^5 \sin \frac{1}{q} = q^5 \left( \sin \frac{1}{q} - 5q \left( 2 - \cos \frac{1}{q} \right) \right)$$

non ha segno definito per  $q$  vicino a 0, dato che ha il segno di  $q^5 \sin(1/q)$  (cfr. la figura 4.8).

In realtà, nel caso di sistemi a un grado di libertà, l'instabilità di punti critici corrispondenti a punti massimo dell'energia potenziale, incluso il caso discusso nell'osservazione 19.30, si può facilmente dimostrare senza ricorrere al teorema di Četaev e senza imporre ipotesi restrittive.

**Teorema 19.31** *Si consideri un sistema meccanico conservativo (17.21) con  $\ell = 1$ . Se  $q_0$  è un punto di massimo dell'energia potenziale  $V$ , allora  $(q_0, 0)$  è un punto di equilibrio instabile.*

*Dimostrazione.* Se  $q_0$  è un punto di massimo di  $V$  esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $V(q) \leq V(q_0) \forall q \in B_\varepsilon(q_0)$ . Poiché  $A(q)$  è definita positiva si ha  $0 < c_1 \leq A(q) \leq c_2 \forall q \in B_\varepsilon(q_0)$  per opportune costanti positive  $c_1$  e  $c_2$ . Fissato  $\delta > 0$ , sia  $(\bar{q}, \bar{p})$  tale che  $\bar{q} = q_0$  e  $0 < \bar{p} < \delta$ , così che  $(\bar{q}, \bar{p}) \in B_\delta(x_0)$ , dove  $x_0 = (q_0, 0)$ . Sia  $(q(t), p(t))$  la soluzione delle equazioni (17.21) con dato iniziale  $(\bar{q}, \bar{p})$ . Poiché  $H(q, p)$  è una costante del moto, si ha

$$\frac{1}{2A(q(t))} p^2(t) + V(q(t)) = H(q(t), p(t)) = H(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2A(q_0)} \bar{p}^2 + V(q_0).$$

Tenendo conto che  $V(q(t)) \leq V(q_0)$  e il fatto che  $\bar{p} > 0$  implica  $p(t) > 0$  per continuità, si ha

$$|p(t)| \geq |\bar{p}| \frac{\sqrt{A(q(t))}}{\sqrt{A(q_0)}} \implies \dot{q}(t) = \frac{p(t)}{A(q(t))} \geq \frac{\bar{p}}{\sqrt{A(q(t))} A(q_0)} \geq c := \frac{\bar{p}}{c_2}$$

e, integrando  $\dot{q}$ , si ottiene  $|q(t) - q_0| \geq c|t|$  fin tanto che  $q(t) \in B_\varepsilon(q_0)$ . Ne segue che esiste  $t_1 > 0$  tale che  $q(t_1) \in \partial B_\varepsilon(q_0)$  e, di conseguenza,  $(q(t_1), p(t_1)) \notin B_\varepsilon(x_0)$ . ■

La dimostrazione del teorema 19.31 si può facilmente adattare in modo da includere il caso di punti di flesso orizzontale.

**Teorema 19.32** *Si consideri un sistema meccanico conservativo (17.21) con  $\ell = 1$ . Se  $q_0$  è un punto di flesso orizzontale dell'energia potenziale  $V$ , allora  $(q_0, 0)$  è un punto di equilibrio instabile.*

*Dimostrazione.* Si procede come nella dimostrazione del teorema 19.31, con il caveat che, se  $q_0$  è un punto di flesso, si ha  $V(q) < V(q_0)$  solo per i punti  $q \in B_\varepsilon(q_0)$  tali che  $q < q_0$  oppure  $q > q_0$ . Si sceglie allora il dato iniziale  $(\bar{q}, \bar{p})$  così che  $V(\bar{q}) < V(q)$  e  $(\bar{q} - q_0)\bar{p} > 0$ . Per il resto si ragiona come nella dimostrazione del teorema 19.31 e si trova che la soluzione  $(q(t), p(t))$  esce dall'intorno  $B_\varepsilon(x_0)$  del punto di equilibrio  $x_0 = (q_0, 0)$  in un tempo finito. ■

## §20 Teorema della scatola di flusso

I teoremi visti nelle sezioni precedenti trattano il comportamento di sistemi dinamici vicino a punti di equilibrio. La situazione è completamente differente se siamo interessati al comportamento di un sistema lontano dai punti di equilibrio. Il seguente teorema, che prende il nome di *teorema della scatola di flusso* – chiamato anche *teorema dell'intorno tubolare* o *teorema di rettificazione* – mostra che, qualitativamente, ogni sistema dinamico si comporta allo stesso modo lontano dai punti di equilibrio: è infatti sempre possibile trovare un sistema di coordinate in cui l'evoluzione appare, localmente, come un *moto rettilineo uniforme*, i.e. un moto con velocità costante, in modulo e verso (cfr. la figura 4.10 più avanti).

Il teorema della scatola di flusso è di notevole rilevanza, da un punto di vista teorico. Se interessano proprietà qualitative di un sistema dinamico lontano dai punti di equilibrio si può sempre supporre che il moto sia un moto rettilineo uniforme, quindi un moto particolarmente facile da studiare.

**Definizione 20.1** (DIFFEOMORFISMO) *Dati due insiemi  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , si chiama diffeomorfismo un'applicazione  $f: A \rightarrow B$  differenziabile e invertibile, con inversa differenziabile. In tal caso si dice che  $A$  e  $B$  sono diffeomorfi e che  $f$  è un diffeomorfismo di classe  $C^k$  se  $f$  e la sua inversa sono di classe  $C^k$ .*

Dato uno spazio vettoriale  $E$  di dimensione  $n$  un *iperpiano* passante per  $x \in E$  è un insieme di vettori applicati della forma  $(x, v)$ , al variare di  $v$  in un sottospazio di  $E$  di dimensione  $n - 1$ .

**Definizione 20.2** (SEZIONE LOCALE) *Sia  $x \in \mathbb{R}^n$  tale che  $f(x) \neq 0$ . Una sezione locale di  $f$  in  $x$  è un insieme aperto  $S$  contenuto nell'iperpiano  $\pi$  passante per  $x$  e trasverso a  $f$ , i.e. tale che  $(x, f(z)) \notin \pi$  per ogni  $z \in S$ .*

**Osservazione 20.3** Questo significa che  $\dim(S) = n - 1$  e che, per ogni  $z \in S$ , il vettore applicato  $(x, f(z))$  non è contenuto nell'iperpiano che contiene  $S$ . In altri termini il campo vettoriale in tutti i punti della sezione è diretto sempre “verso destra” o sempre “verso sinistra”, rispetto alla sezione.