Esercizio 6 Nelle ipotesi del teorema enunciato nell'esercizio 4 si dimostri che risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)),$$

[*Soluzione.* Poiché $F(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in U$ la derivata totale rispetto a x è nulla, quindi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0,$$

da cui segue l'asserto.]

Esercizio 7 Sia $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e sia Σ_c la superficie individuata dalla condizione $H(x) = c$. Si utilizzi il teorma della funzione implicita per dimostrare che Σ_c è una superficie regolare in ogni punto x in cui $\nabla H(x) \neq 0$. [*Suggerimento.* Se $\nabla H(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tale che $H(x) = c$, esiste almeno una componente x_k tale che $[\partial H/\partial x_k](x) \neq 0$; senza perdita di generalità possiamo supporre $k = n$. Per il teorema della funzione implicita possiamo allora scrivere localmente x_n in termini delle altre variabili nella forma $x_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, dove g è una funzione di classe C^1. La superficie Σ_c è differenziabile in quanto parametrizzata dal diffeomorfismo $\varphi\colon (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}))$. Inoltre i vettori $\partial\varphi/\partial x_1, \partial\varphi/\partial x_2, \ldots, \partial\varphi/\partial x_{n-1}$ sono dati da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \left(1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial g}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \left(0, 1, \ldots, 0, \frac{\partial g}{\partial x_2}\right), \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} = \left(0, 0, \ldots, 1, \frac{\partial g}{\partial x_{n-1}}\right),$$

quindi sono linearmente indipendenti. Pertanto Σ_c è regolare.]

Esercizio 8 Dato il sistema dinamico $\dot{\theta} = \cos\theta - 1$, con $\theta \in \mathbb{T}$, si trovi la soluzione con dato iniziale $\bar{\theta}$. [*Soluzione.* Tenendo conto che $1/\sin^2 x$ è la derivata di $-\cot x$, si trova $\cot(\theta(t)/2) - \cot(\bar{\theta}/2) = t$ per separazione di variabili. Da qui si ottiene $\theta(t) = 2\text{arctcot}\,[t + \cot(\bar{\theta}/2)]$.]

Esercizio 9 Sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un sistema di coordinate in uno spazio vettoriale E e sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Il polinomio omogeneo di secondo grado

$$Q(x) := \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} x_i x_j$$

costituisce una *forma quadratica*. La forma quadratica $Q(x)$, e corrispondentemente la matrice A, si dice *definita positiva* se $Q(x) > 0$ $\forall x \neq 0$, *semidefinita positiva* se $Q(x) \geq 0$ $\forall x \neq 0$, *definita negativa* se $Q(x) < 0$ $\forall x \neq 0$, *semidefinita negativa* se $Q(x) \leq 0$ $\forall x \neq 0$, *indefinita* se $Q(x) > 0$ per alcuni valori di x e $Q(x) < 0$ per altri valori. Si dimostri che, per $n = 2$, data la forma quadratica $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$,

1. se $AC - B^2 > 0$ e $A > 0$, $Q(x, y)$ è definita positiva;
2. se $AC - B^2 > 0$ e $A < 0$, $Q(x, y)$ è definita negativa;
3. se $AC - B^2 < 0$, $Q(x, y)$ è indefinita.

[*Soluzione.* Se $A = C = 0$ si ha $Q(x, y) = 2Bxy$ che è indefinita per $B \neq 0$. Se A e C non sono entrambi nulli possiamo supporre che sia $A \neq 0$ (a meno di ridenominare le coordinate x, y). Se $A \neq 0$, si può riscrivere

$$Q(x, y) = A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{1}{A}\left(AC - B^2\right) y^2.$$

Allora, se $AC - B^2 > 0$ e $A > 0$ si ha $Q(x,y) > 0 \; \forall (x,y) \neq (0,0)$. Analogamente se $AC - B^2 > 0$ e $A < 0$ si ha $Q(x,y) < 0 \; \forall (x,y) \neq (0,0)$. Se invece $AC - B^2 < 0$, $Q(x,y)$ è indefinita: infatti, se $A > 0$, si ha $Q(-B/A,1) < 0$ e $Q(1,0) > 0$, mentre se $A < 0$, si ha $Q(-B/A,1) > 0$ e $Q(1,0) < 0$.]

Esercizio 10 Si dimostri che una matrice simmetrica A è definita positiva se e solo se i suoi autovalori sono positivi ed è definita semipositiva se e solo se i suoi autovalori sono non negativi. Se ne deduca che una matrice simmetrica definita positiva è sempre invertibile. [*Soluzione.* Se A è una matrice simmetrica $n \times n$, essa ammette autovalori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e i corrispondenti autovettori $v_1, \ldots, v_n$ formano una base ortonormale (cfr. gli esercizi 35 e 37 del capitolo 1). Per ogni $x \in E$ si può scrivere

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad \Longrightarrow \qquad \langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle v_i, A v_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,$$

così che $\langle x, Ax \rangle > 0 \; \forall x \neq 0$ se e solo se $\lambda_i > 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$ e, analogamente, $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \; \forall x \neq 0$ se e solo se $\lambda_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, n$. Infine, poiché $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ (cfr. l'esercizio 48 del capitolo 1), se A è definita positiva si ha $\det A > 0$ e quindi A è invertibile.]

Esercizio 11 Sia A una matrice simmetrica invertibile. Si dimostri che la sua inversa A^{-1} è simmetrica. [*Soluzione.* Per ipotesi $A = A^T$. Poiché $\mathbb{1} = AA^{-1}$, dove $\mathbb{1}$ è la matrice identità, si ha $\mathbb{1} = \mathbb{1}^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = (A^{-1})^T A$, da cui segue che $(A^{-1})^T = A^{-1}$.]

Esercizio 12 Si dimostri il lemma 18.2 utilizzando il lemma di Gronwall (lemma 12.1). [*Soluzione.* Integrando tra 0 e t la (18.3) si ottiene

$$g(t) \leq g(0) + \kappa \int_0^t \mathrm{d}s \, g(s),$$

così che la (18.4) segue dal lemma di Gronwall.]

Esercizio 13 Si dimostri che le (18.8) definiscono il prodotto scalare standard nella base (18.7). [*Suggerimento.* Sia $n = r + 2s$. Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ sono le componenti dei bvettori $x, y \in E$, rispettivamente, si ha

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

se e solo se $\langle f_i, f_j \rangle \delta_{ij}$ epr $i, j = 1, \ldots, n$].

Esercizio 14 Si dimostrino le (18.9).

Esercizio 15 Si mostri come si modifica la dimostrazione del lemma 18.4, nel caso in cui in cui la matrice T non sia semisemplice e i blocchi siano della forma (5.10) anziché della forma (5.9).

Esercizio 16 Si dimostri la (18.16). [*Soluzione.* Tenendo conto delle (18.14) e (18.15) si ha

$$\begin{aligned} a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, f_2(x) \rangle &= a \langle x_1, A_1 x_1 \rangle - 2b \langle x_2, A_2 x_2 \rangle + a \langle x_1, Q_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, Q_2(x) \rangle \\ &\geq a^2 |x_1|^2 - (a + 2b) \, \varepsilon |x|^2 \geq \big(a^2 d - (a + 2b) \, \varepsilon \big) \, |x|^2, \end{aligned}$$

così che se si pone $\varepsilon \leq a^2 d / [2(a + 2b)]$ si ottiene la (18.16).]

Esercizio 17 Si dimostri la (18.17). [*Soluzione.* Possiamo scrivere

$$\langle x, f(x)\rangle = \langle x_1, A_1 x_1\rangle + \langle x_2, A_2 x_2\rangle + \langle x, Q(x)\rangle \,,$$

dove $|\,\langle x, Q(x)\rangle\,| = |\,\langle x_1, Q_1(x)\rangle + \langle x_2, Q_2(x)\rangle\,| \le \varepsilon |x|^2$, per $x \in B_\delta(0)$. Utilizzando le (18.14) e (18.15), otteniamo, per $x \in B_\delta(0)$,

$$\langle x, f(x)\rangle \ge a|x_1|^2 - b|x_2|^2 - \varepsilon|x|^2.$$

Se inoltre $x \in C \cap B_\delta(0)$, si ha $|x_2| \le a|x_1|^2/(2b)$, così che

$$|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \le \left(1 + \frac{a}{2b}\right)|x_1|^2 \,,$$

da cui segue $|x_1|^2 \ge d|x|^2$, con $1/d = 1 + a/2b$. Quindi troviamo

$$\langle x, f(x)\rangle \ge \frac{1}{2}a|x_1|^2 + \frac{1}{2}\left(a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2\right) - \varepsilon|x|^2 \ge \frac{1}{2}a|x_1|^2 - \varepsilon|x|^2 \ge \left(\frac{ad}{2} - \varepsilon\right)|x|^2,$$

così che, se $\varepsilon \le ad/4$, si ha la (18.17) con $\alpha = ad/4$.

Esercizio 18 Si dimostri che (18.20) è soluzione di (18.19). [*Suggerimento.* Per separazione di variabili.]

Esercizio 19 Si dimostri che un numero L è il massimo limite di una successione reale $\{t_k\}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$

1. esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k < L + \varepsilon$,
2. per infiniti k si ha $t_k > L - \varepsilon$.

[*Suggerimento.* La proprietà 1 significa che ogni numero maggiore di L è un maggiorante definitivo, mentre la proprietà 2 significa che per ogni $\varepsilon > 0$ il numero $L - \varepsilon$ non è un maggiorante definitivo.]

Esercizio 20 Si dimostri che un numero ℓ è il minimo limite di una successione reale $\{t_k\}$ se e solo se $\forall \varepsilon > 0$

1. esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > \ell - \varepsilon$,
2. per infiniti k si ha $t_k < \ell + \varepsilon$.

[*Suggerimento.* Si ragiona analogamente a quanto fatto per l'esercizio 19.]

Esercizio 21 Si dimostri che una funzione $f\colon X \to Y$, con $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}$, è continua se e solo se per ogni aperto $A \subset Y$ la *controimmagine* $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ è un insieme aperto. Se ne deduca che f è continua se e solo se per ogni insieme chiuso $C \subset Y$ la controimmagine $f^{-1}(C)$ è un insieme chiuso. [*Soluzione.* Sia $f\colon X \to Y$ continua e sia $A \subset Y$ un insieme aperto. Se $x \in f^{-1}(A)$, si ha $f(x) \in A$, quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'intorno $B_\varepsilon(f(x))$ è contenuto in A, essendo A aperto. Poiché f è continua, fissato ε esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$, i.e. per ogni $y \in B_\delta(x)$ si ha $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Ne segue che $y \in f^{-1}(A)$ $\forall y \in B_\delta(x)$, da cui si deduce che l'intero intorno $B_\delta(x)$ è contenuto in $f^{-1}(A)$. Abbiamo trovato un intorno di x contenuto in $f^{-1}(A)$. Poiché x è un punto arbitrario di $f^{-1}(A)$ concludiamo che $f^{-1}(A)$ è aperto. Viceversa, supponiamo che $f^{-1}(A)$ sia aperto in X per ogni A aperto in Y. Dato $x \in X$, l'intorno $B_\varepsilon(f(x))$ è un insieme aperto, quindi $D := f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ è aperto. Poiché $x \in D$, esiste $\delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset D$. D'altra parte $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))\ \forall y \in B_\delta(x)$, i.e. $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ per $|y - x| < \delta$, che implica la continuità di f in x. Poiché x è arbitrario, f è continua in X. Se C è un insieme chiuso in Y, il suo complementare $A := Y \backslash C$ è un insieme aperto; inoltre $f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\} = \{x \in X : f(x) \notin A\} = X \setminus f^{-1}(A)$, da cui si deduce che $f^{-1}(C)$ è chiuso se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto; in conclusione la controimmagine di un insieme chiuso è un insieme chiuso se e solo se f è continua.]

Esercizio 22 Si dimostri che l'insieme U definito in (19.10) è un insieme aperto. [*Soluzione.* La funzione $W : B_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$ è continua ed è a valori positivi, quindi di fatto è una funzione da $B_\varepsilon(x_0)$ a $\mathbb{R}_+$. L'insieme U è un insieme aperto in quanto intersezione di due insiemi aperti: l'intorno $B_\varepsilon(x_0)$ e l'insieme $\mathcal{U} := \{x \in B(x_0) : W(x) < \alpha(\varepsilon)/2\}$, che, essendo la controimmagine secondo W di un insieme aperto, ovvero dell'intervallo $[0, \alpha(\varepsilon)/2)$ in $[0, +\infty)$, è a sua volta un insieme aperto (cfr. l'esercizio 21).]

Esercizio 23 Si dimostri tramite il teorema di Ljapunov che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (18.18) con $\varepsilon < 0$. [*Suggerimento.* Si usi $W(x) = |x|^2$ come funzione di Ljapunov.]

Esercizio 24 Dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$ sia A un insieme compatto connesso di $\mathbb{R}^n$ tale che il campo vettoriale f, in ogni punto della frontiera ∂A di A, è diretto verso l'interno (cfr. la figura 4.12). Si dimostri che l'insieme A è positivamente invariante. [*Suggerimento.* Si usi l'osservazione 11.5 del capitolo 3.]

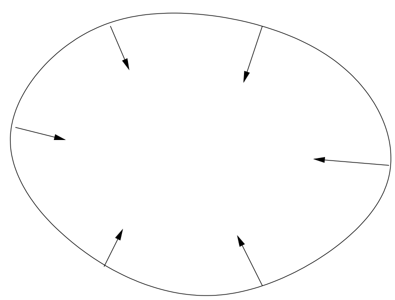

Figura 4.12: Situazione prevista nella discussione dell'esercizio 24.

Esercizio 25 Alla luce della definizione 17.10, si discuta la stabilità dell'origine nello studio dei sistemi planari lineari considerati nel §7. [*Soluzione.* L'origine è un punto di equilibrio per il sistema (7.1). Nel caso del §7.1, se $\lambda, \mu \neq 0$, l'origine è asintoticamente stabile se è un pozzo ed è instabile se è una sorgente o un punto di sella; se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$, l'origine è stabile se $\mu < 0$ e instabile se $\mu > 0$; analogamente se $\lambda \neq 0$ e $\mu = 0$, l'origine è stabile se $\lambda < 0$ e instabile se $\lambda > 0$. Nel caso del §7.2, l'origine è stabile se è un centro ($a = 0$), mentre è instabile se $a > 0$ e asintoticamente stabile se $a < 0$. Nel caso del §7.3, l'origine è asintoticamente stabile se $\lambda < 0$, instabile se $\lambda > 0$ e stabile se $\lambda = 0$ (nell'ultimo caso ogni punto del piano è un punto di equilibrio stabile). Infine, nel caso del §7.4, l'origine è asintoticamente stabile se è un pozzo ($\lambda < 0$), instabile se è una sorgente ($\lambda > 0$) o se $\lambda = 0$.]