

che non dipende dalla particolare orbita considerata; inoltre  $(\langle x \rangle, \langle y \rangle) = z_2$ . Questo dimostra la legge 2.

Infine, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x - \varepsilon_1 x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y - \varepsilon_2 y, \end{cases} \quad (23.6)$$

con  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Ragionando come per la dimostrazione della legge 2 troviamo

$$\langle x \rangle = \frac{D + \varepsilon_2}{C} > \frac{D}{C}, \quad \langle y \rangle = \frac{A - \varepsilon_1}{B} < \frac{A}{B},$$

che dimostra la legge 3. ■

## §24 Il pendolo semplice

Nei paragrafi precedenti – e nel capitolo 4 – abbiamo visto alcuni teoremi generali utili nello studio del comportamento qualitativo di sistemi dinamici, in particolare nella discussione della stabilità dei punti di equilibrio, nella stima di bacini d'attrazione dei punti di equilibrio asintoticamente stabili e nello studio delle curve di livello di sistemi che ammettono una costante del moto.

Vogliamo ora discutere, con un certo dettaglio, un caso esplicito in cui applicare concretamente i risultati teorici precedentemente illustrati: il *pendolo* (più propriamente il *pendolo matematico* o *pendolo semplice*) con o senza attrito.

Le equazioni del moto del pendolo di lunghezza  $\ell$  e massa  $m$  (cfr. la figura 5.12) sono

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta - m\alpha\dot{\theta}, \quad (24.1)$$

dove  $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  (i.e.  $\theta$  è definito mod  $2\pi$ ),  $g > 0$  è l'accelerazione di gravità (cfr. l'osservazione 32.11 più avanti) e  $\alpha \geq 0$  è il *coefficiente di attrito*. Le equazioni 24.1 descrivono il moto di un punto materiale di massa  $m$ , sospeso a un punto fisso tramite un'asta inestensibile di massa trascurabile, e vincolato a muoversi in un piano verticale; il termine d'attrito, ove presente ( $\alpha > 0$ ), è proporzionale alla velocità. Si veda l'esercizio 21 del capitolo 9 o l'esercizio 26 del capitolo 11 per la derivazione dell'equazione (24.1).

Per semplicità poniamo nel seguito  $g = 1$ ,  $\ell = 1$  e  $m = 1$  (che corrisponde a un'opportuna scelta delle unità di lunghezza, massa e tempo). Possiamo riscrivere (24.1) come un sistema dinamico planare della forma (21.1):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y, \\ \dot{y} = -\sin \theta - \alpha y, \end{cases} \quad (24.2)$$

con  $(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .

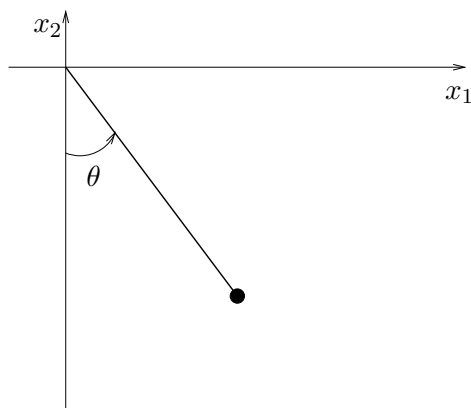


Figura 5.12: Pendolo semplice: il punto materiale ha coordinate  $(x_1, x_2) = (\ell \sin \theta, -\ell \cos \theta)$ .

### §24.1 Pendolo senza attrito: costante del moto

Iniziamo studiando il caso  $\alpha = 0$  (pendolo senza attrito):

$$\begin{cases} \dot{\theta} = y, \\ \dot{y} = -\sin \theta. \end{cases} \quad (24.3)$$

In tal caso la funzione

$$H(\theta, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos \theta), \quad (24.4)$$

che rappresenta l'energia del sistema (data dalla somma dell'energia cinetica  $T = y^2/2$  e dell'energia potenziale  $U = 1 - \cos \theta$ ), è una costante del moto: infatti si ha, come è immediato verificare,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} = y(-\sin \theta) + (1 - \cos \theta)y = 0, \quad (24.5)$$

così che  $\dot{H} = 0$  (cfr. l'osservazione 21.23). Questo vuol dire, che fissato un dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , si ha

$$H(\theta(t), y(t)) = H(\bar{\theta}, \bar{y}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (24.6)$$

se  $(\theta(t), y(t))$  è la soluzione del sistema (24.3) con dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y})$ .

### §24.2 Pendolo senza attrito: punti di equilibrio. Parte I

Abbiamo visto che i punti di equilibrio del sistema (24.3) sono i punti in cui si annulla il campo vettoriale – e quindi i punti critici di  $H$  (cfr. la (24.5)). Si hanno due punti di equilibrio:

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (\pi, 0), \quad (24.7)$$

tenendo conto delle condizioni periodiche al contorno, i.e. del fatto che  $\theta$  è definito mod  $2\pi$ , così che, in particolare, il punto  $(-\pi, 0)$  è identificato con  $(\pi, 0)$ . Il sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio  $x_0 = (\theta_0, 0)$ , con  $\sin \theta_0 = 0$ , è dato da

$$\dot{x} = A(x_0)(x - x_0), \quad x = (\theta, y) \quad (24.8)$$

dove

$$A(x_0) = A(\theta_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza del punto di equilibrio  $P_1$  si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori  $\lambda = \pm i$ , mentre in corrispondenza del punto di equilibrio  $P_2$  si ha

$$A(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori  $\lambda = \pm 1$ .

Per il teorema 18.7 possiamo concludere che il punto di equilibrio  $P_2$  è un punto di equilibrio instabile, mentre nessuna informazione possiamo trarre sul punto d'equilibrio  $P_1$  attraverso l'analisi del sistema linearizzato. Rimandiamo a dopo la discussione della stabilità del punto di equilibrio  $P_1$ .

### §24.3 Pendolo senza attrito: curve di livello. Parte I

Sia

$$\gamma_E = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : H(\theta, y) = E\} \quad (24.9)$$

la curva di livello che corrisponde all'energia  $E$ . In generale curve di livello particolarmente significative per un sistema dinamico che ammette una costante del moto  $H$  sono quelle che corrispondono ai valori critici di  $H$ . Si ha

$$H(P_1) = H(0, 0) = 0, \quad H(P_2) = H(\pi, 0) = 2.$$

Innanzitutto notiamo che deve essere  $E \geq 0$  poiché  $y^2 \geq 0$  e  $1 - \cos \theta \geq 0$ : inoltre il valore  $E = 0$  è assunto solo in corrispondenza del punto  $(\theta, y) = (0, 0)$ .

Possiamo graficare le curve di livello nel piano  $(\theta, y)$ , con  $|\theta| \leq \pi$ , utilizzando la (24.4) per esprimere  $y$  in funzione di  $\theta$ . Otteniamo dunque

$$y = \pm \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}, \quad (24.10)$$

dove  $E \geq 0$  ha il ruolo di parametro. Per quanto detto sopra la curva di livello  $\gamma_0$  contiene il solo punto di equilibrio  $P_1$ .

Dalla (24.10) si vede che, se  $E > 0$ , è sufficiente studiare la determinazione positiva della radice quadrata: una volta nota la curva (24.10) che corrisponde al semipiano superiore, da essa si può ottenere la curva che corrisponde al semipiano inferiore per semplice riflessione rispetto all'asse delle ascisse. La derivata prima della (24.10), per  $y > 0$ , è data da

$$\frac{dy}{d\theta} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2(E-1+\cos \theta)}}, \quad (24.11)$$

e ha quindi il segno di  $-\sin \theta$ . Pertanto la curva  $\theta \mapsto y$  è crescente per  $-\pi \leq \theta \leq 0$  e decrescente per  $0 \leq \theta \leq \pi$ , e raggiunge il valore massimo in  $\theta = 0$ .

La curva di livello  $\gamma_2$ , per  $y \geq 0$ , è definita dall'equazione

$$y = y_+(\theta) := \sqrt{2(1+\cos \theta)}, \quad (24.12)$$

che si annulla solo per  $\theta = \pm\pi$ . Inoltre  $y_+(\theta)$  vale 0 in  $\theta = -\pi$ , cresce per  $-\pi \leq \theta \leq 0$  fino a raggiungere il valore massimo in  $\theta = 0$ , dato da  $y_+(0) = 2$ , e decresce poi per  $0 \leq \theta \leq \pi$ , fino a raggiungere nuovamente il valore 0 in  $\theta = \pi$ . La tangente in  $\theta = 0$  vale 0, mentre in  $\theta = \pm\pi$  vale  $\mp 1$ , come si può ricavare dalla (24.11); si ha infatti

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\pi} &= \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{-\sin \theta}{\sqrt{2(1+\cos \theta)}} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{-\sin \theta}{2 \cos(\theta/2)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{\mp \sin \pi - \cos \pi (\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2}{2 \cos(\pi/2) \mp \sin(\pi/2) (\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2} = \lim_{\theta \rightarrow \pm\pi} \frac{(\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2}{\mp (\theta \mp \pi) + O(\theta \mp \pi)^2} = \mp 1. \end{aligned}$$

Che la tangente in  $\theta = 0$  valga 0, oltre che per calcolo diretto, si può dedurre anche dal fatto che la curva  $y = y(\theta)$  è regolare e simmetrica per riflessione rispetto all'asse delle ordinate (poiché pari in  $\theta$ ). Analogamente si ottiene la determinazione negativa di  $y = y_-(\theta)$ , i.e.

$$y = y_-(\theta) := -y_+(\theta) = -\sqrt{2(1+\cos \theta)}, \quad (24.13)$$

per  $E = 2$ : sarà una curva che decresce da  $y_-(-\pi) = 0$  verso il valore  $y_-(0) = -2$ , per poi ricrescere fino a raggiungere il valore  $y_-(\pi) = 0$ .

In conclusione la curva di livello  $\gamma_2$  contiene tre orbite: il punto di equilibrio  $P_2$ , la curva  $\mathcal{C}_1$  descritta dalla (24.12) e la curva  $\mathcal{C}_2$  descritta dalla (24.13), che si ottiene dalla curva  $\mathcal{C}_1$  per riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Le curve  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  costituiscono i due rami della *separatrice* del pendolo (cfr. l'osservazione 28.23 più avanti).

Per determinare il verso di percorrenza delle orbite basta notare che deve essere  $\dot{\theta} = y$ . Quindi  $\theta$  è una funzione crescente di  $t$  per  $y > 0$  e decrescente per  $y < 0$ . Di conseguenza il moto lungo la curva  $\mathcal{C}_1$  avviene verso destra, mentre il moto lungo la curva  $\mathcal{C}_2$  avviene verso

sinistra. Il moto su ciascuna delle due curve è un moto asintotico, i.e. è un moto che tende al punto di equilibrio  $P_2$  in un tempo infinito; per esempio, scelto un dato iniziale  $\bar{x} = (\bar{\theta}, \bar{y}) \in \mathcal{C}_1$ , si ha  $\dot{\theta} = \sqrt{2(1 + \cos \theta)}$ , da cui si ottiene

$$\int_{\bar{\theta}}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} = t, \quad (24.14)$$

che mostra che  $\theta(t)$  è definito per ogni  $t \in \mathbb{R}$  e tende a  $\pm\pi$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ . Notiamo che la (24.14) si risolve esplicitamente, scrivendo

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(1 + \cos \theta)}} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\tan x \cos^2 x} = \log \tan x,$$

dove si sono effettuate, nell'ordine, le sostituzioni  $\varphi = \theta/2$ ,  $\alpha = \varphi + \pi/2$  e  $x = \alpha/2$  (e si è tenuto conto che  $\cos \varphi \geq 0$  poiché  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ), così che

$$\theta(t) = 4 \arctan (e^t \tan((\bar{\theta} + \pi) / 4)) - \pi \quad (24.15)$$

descrive il moto sulla separatrice.

#### §24.4 Pendolo senza attrito: punti di equilibrio. Parte II

Torniamo allo studio della stabilità del punto  $P_1$ . Poiché la funzione  $H$  assume valore  $H = 2$  solo lungo la curva di livello  $\gamma_2$  e  $H(P_1) = 0$ , per continuità si deve avere  $0 < H(\theta, y) < 2$  per ogni  $(\theta, y) \neq (0, 0)$  appartenente all'insieme aperto  $\mathcal{A}$  racchiuso dalla curva di livello  $\gamma_2$ . Per il teorema di Weierstrass (cfr. l'esercizio 14 del capitolo 1) la funzione  $H|_{\bar{\mathcal{A}}}$  ammette massimo e minimo in  $\bar{\mathcal{A}}$ . Poiché l'unico punto critico interno è  $P_1$ , i punti di massimo e di minimo vanno cercati in  $P_1$  e sulla frontiera  $\partial\mathcal{A}$  (cfr. l'esercizio 3). Sulla frontiera la funzione vale  $H = 2$  e in  $P_1$  si ha  $H(P_1) = 0$ . Quindi  $P_1$  è un punto di minimo. Questo poteva anche essere verificato calcolando la matrice hessiana  $\mathcal{H}(\theta, y)$  della funzione  $H$  in  $P_1$ ,

$$\mathcal{H}(P_1) := \begin{pmatrix} H_{\theta\theta}(P_1) & H_{\theta y}(P_1) \\ H_{y\theta}(P_1) & H_{yy}(P_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e notando che  $\det \mathcal{H}(P_1) = 1$  e  $H_{\theta\theta} = 1$  (cfr. l'esercizio 4). Per concludere che il punto  $P_1$  è stabile, definiamo la funzione di Ljapunov

$$W(\theta, y) := H(\theta, y) - H(0, 0) = H(\theta, y)$$

e applichiamo il teorema 19.10, ovvero il teorema di Lagrange-Dirichlet (teorema 19.22).

### §24.5 Pendolo senza attrito: curve di livello. Parte II

Studiamo ora le curve di livello per altri valori di  $E$ . Consideriamo la regione  $\mathcal{A}$  definita nel §24.4. Per il teorema 21.21 possiamo concludere che tutte le orbite contenute in  $\mathcal{A} \setminus \{P_1\}$  sono chiuse e contengono  $P_1$  al loro interno. La stessa conclusione può essere ottenuta per calcolo esplicito studiando le curve (24.10) per  $0 < E < 2$ .

Si vede (al solito consideriamo  $y \geq 0$ ) che esiste  $\theta_0 \in (0, \pi)$  tale che

$$y = \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)} \quad (24.16)$$

si annulla per  $\theta = \pm\theta_0$  e la derivata in tali punti vale

$$\left. \frac{dy}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\theta_0} = -\frac{\sin \theta_0}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta_0)}} = \pm\infty,$$

poiché il denominatore si annulla, mentre il numeratore ha valore finito. Disegnando anche il tratto  $y < 0$  della curva si ottiene una curva chiusa regolare che interseca l'asse delle ascisse nei due punti  $\pm\theta_0$ . Tale curva è simmetrica sia per riflessione rispetto all'asse delle ascisse sia per riflessione rispetto all'asse delle ordinate. Ciascuna di tali orbite corrisponde a un moto oscillatorio del pendolo: la corrispondente traiettoria periodica è chiamata una *soluzione oscillatoria*.

Analogamente si possono analizzare le curve di livello che corrispondono a valori di energia  $E > 2$ . In tal caso  $y(\pm\pi) > 0$  e la derivata (24.11), calcolata a  $\theta = \pm\pi$  vale  $dy/d\theta(\pm\pi) = 0$ , poiché il denominatore non si annulla mai, mentre  $\sin \pm\pi = 0$ . Si tratta di curve regolari chiuse (si tenga conto delle condizioni periodiche al contorno!) che descrivono moti di rotazione completa del pendolo: le traiettorie periodiche corrispondenti sono chiamate *soluzioni rotatorie*.

Notiamo che in questo caso il teorema 21.21 non è immediatamente applicabile. Tuttavia si può ragionare analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del teorema per concludere che le orbite sono chiuse. Infatti  $H(\theta, y)$  tende all'infinito per  $y \rightarrow \pm\infty$ , quindi, fissato un valore  $E$  tale che  $H(\theta(t), y(t)) = E$ , il moto si deve svolgere in una regione limitata  $A$ . Poiché la traiettoria è sempre contenuta nell'insieme compatto  $\bar{A}$ , per  $\bar{x} = (\bar{\theta}, \bar{y}) \in \gamma_E$  si deve avere  $L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$ , per il lemma 19.9. D'altra parte  $L_\omega(\bar{x})$  è compatto e non può contenere punti di equilibrio. Infatti gli unici punti di equilibrio del sistema sono  $P_1$  e  $P_2$ , che si trovano su curve di livello  $\gamma_{E'}$ , con  $E' \neq E$  (poiché  $E' = 0, 2$  mentre  $E > 2$ ). Per il teorema 21.7 allora  $L_\omega(\bar{x})$  deve essere un'orbita chiusa; inoltre essa deve svolgersi intorno al toro (i.e. deve andare da  $\theta = -\pi$  a  $\theta = \pi$ ), perché altrimenti sarebbe un'orbita chiusa non contenente alcun punto di equilibrio (contro il teorema 21.18). La situazione è rappresentata nella figura 5.13.

Dall'analisi precedente concludiamo che tutte le curve di livello che corrispondono a valori  $E \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 2\}$ , i.e. a valori  $E > 0$  escluso  $E = 2$ , costituiscono i sostegni di traiettorie periodiche. La curva di livello  $\gamma_2$  si chiama separatrice in quanto separa le orbite dei moti oscillatori da quelle dei moti rotatori.

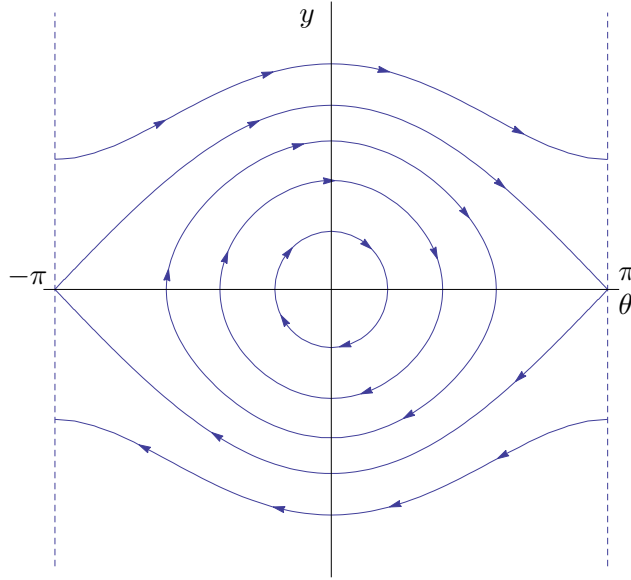


Figura 5.13: Alcune curve di livello e orbite significative per il pendolo senza attrito: la curva di livello  $\gamma_2$  separa le orbite che corrispondono a moti oscillatori da quelle che corrispondono a moti rotatori.

Possiamo calcolare il periodo delle traiettorie periodiche o, almeno, esprimerne il periodo come integrale definito. Consideriamo prima il caso di una orbita chiusa  $\gamma$  che rappresenti una curva di livello  $\gamma_E$ , con  $0 < E < 2$  (cfr. la figura 5.14). Indichiamo con  $(\theta_1, 0)$  e  $(\theta_2, 0)$  i due punti in cui la curva  $\gamma$  interseca l'asse  $y = 0$ ; per le proprietà di parità precedentemente notate si ha  $\theta_1 = -\theta_2 = \theta_0$  (cfr. la (24.16)). Per la (24.10) si ha  $y = y_+(\theta) := \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}$  quando  $y \geq 0$  e  $y = y_-(\theta) := -\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}$  quando  $y \leq 0$ . Scriviamo allora  $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ , dove

$$\gamma_+ = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : \theta \in [\theta_1, \theta_2], y = y_+(\theta)\}, \quad (24.17a)$$

$$\gamma_- = \{(\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : \theta \in [\theta_1, \theta_2], y = y_-(\theta)\}. \quad (24.17b)$$

La prima delle (24.3) dà

$$\dot{\theta} = y_+(\theta) = \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)} \quad (24.18)$$

lungo l'arco di curva  $\gamma_+$  e

$$\dot{\theta} = y_-(\theta) = -\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)} \quad (24.19)$$

lungo l'arco di curva  $\gamma_-$ . Scelto il dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y}) \in \gamma$ , se  $(\theta(t), y(t))$  è il punto raggiunto al tempo  $t$  dalla traiettoria con dato iniziale  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  e  $T$  è il periodo della traiettoria, si ha

$$(\theta(T), y(T)) = (\bar{\theta}, \bar{y}),$$

poiché, per definizione di periodo,  $T$  è il tempo necessario per ritornare nel punto che costituisce il dato iniziale. Tale relazione non dipende dal particolare dato iniziale scelto. Se infatti si fosse scelto un diverso dato iniziale  $(\bar{\theta}', \bar{y}') \in \gamma$  e avessimo definito

- $T'$  come il tempo necessario per ritornare in  $(\bar{\theta}', \bar{y}')$ ,
- $t$  come il tempo necessario per andare da  $(\bar{\theta}, \bar{y})$  a  $(\bar{\theta}', \bar{y}')$ ,
- $t'$  come il tempo necessario per andare da  $(\bar{\theta}', \bar{y}')$  a  $(\bar{\theta}, \bar{y})$ ,

si avrebbe avuto  $T = t + t'$  e  $T' = t' + t$ , quindi  $T' = T$ .

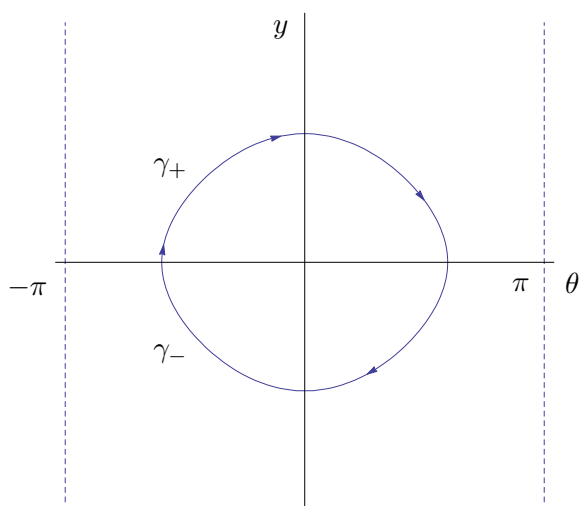


Figura 5.14: Orbita chiusa con energia  $E < 2$ .

In particolare il periodo  $T$  è dato da  $T = T_1 + T_2$ , se  $T_1$  rappresenta il tempo per andare da  $(\theta_1, 0)$  a  $(\theta_2, 0)$  lungo l'arco  $\gamma_+$  della curva  $\gamma$  e  $T_2$  rappresenta il tempo per andare da  $(\theta_2, 0)$  a  $(\theta_1, 0)$  lungo l'arco  $\gamma_-$  della curva  $\gamma$ . Quindi

$$T_1 = \int_0^{T_1} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{y_+(\theta)}, \quad T_2 = \int_0^{T_2} dt = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{y_-(\theta)}, \quad (24.20)$$

come si ricava dalle (24.18) e (24.19). Si vede subito dalla (24.20), usando che  $y_+(\theta) = -y_-(\theta)$ , che

$$T_1 = T_2 = \frac{T}{2},$$

così che possiamo concludere che

$$T = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{y_+(\theta)} = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E-1+\cos\theta)}}.$$



D'altra parte  $\theta_2 = \theta_0$ , dove  $\theta_0$  è la radice positiva dell'equazione

$$E - 1 + \cos \theta_0 = 0 \quad \implies \quad \theta_0 = \arccos(1 - E),$$

che, per  $0 < E < 2$  (così che  $-1 < 1 - E < 1$ ), è un angolo compreso tra 0 e  $\pi$ . In conclusione

$$T = 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}, \quad \theta_0 = \arccos(1 - E). \quad (24.21)$$

Se invece consideriamo una curva di livello  $\gamma_E$ , con  $E > 2$ , essa comprenderà due componenti connesse  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$ , che rappresentano due orbite chiuse distinte (cfr. la figura 5.15).

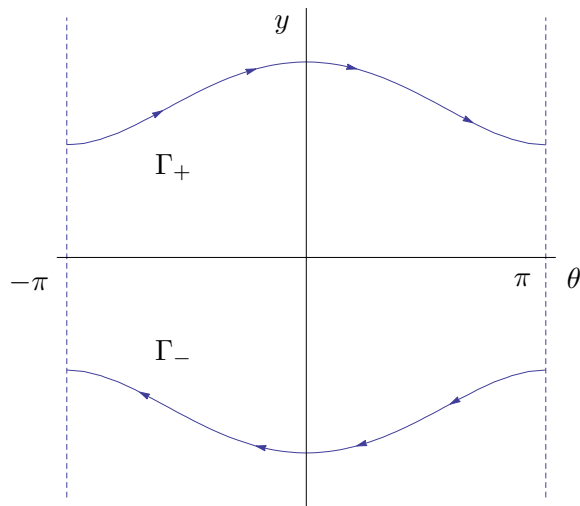


Figura 5.15: Orbite chiuse con energia  $E > 2$ .

Di nuovo per parità esse avranno lo stesso periodo. È quindi sufficiente considerarne una, per esempio quella descritta dall'equazione

$$y = y_+(\theta) := \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}.$$

In questo caso il periodo è dato dal tempo  $T$  necessario per andare da  $(-\pi, y(-\pi))$  a  $(\pi, y(\pi))$  (che rappresenta lo stesso punto, per le condizioni periodiche al contorno). Si ha

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{y_+(\theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}. \quad (24.22)$$

### §24.6 Pendolo con attrito

Studiamo ora il caso  $\alpha > 0$ . In tal caso la funzione (24.3) non è più una costante del moto. I punti di equilibrio sono sempre dati da  $P_1$  e  $P_2$  in (24.7), come è immediato verificare. Il

sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio  $(\theta_0, 0)$ , con  $\sin \theta_0 = 0$ , è in tal caso dato dalla (24.8), con

$$A(x_0) = A(\theta_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta_0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza del punto di equilibrio  $P_1$  si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \quad (24.23)$$

mentre in corrispondenza del punto di equilibrio  $P_2$  si ha

$$A(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}, \quad (24.24)$$

così che si vede che nel caso (24.23) entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa, mentre nel caso (24.24) uno dei due autovalori ha parte reale positiva. Per il teorema 18.5 il punto  $P_1$  è asintoticamente stabile, mentre per il teorema 18.7 il punto di equilibrio  $P_2$  è instabile.

Possiamo utilizzare il teorema di Barbašin-Krasovskij (teorema 19.18) per dare una stima del bacino d'attrazione di  $P_1$ . Consideriamo la curva  $\mathcal{C}$  corrispondente a una curva di livello  $\gamma_E$ , con  $0 < E < 2$ , del sistema (24.3) che descrive il pendolo senza attrito. Ovviamente  $\mathcal{C}$  non è una curva che contenga orbite per il sistema (24.2). Sia  $\mathcal{A}$  la regione limitata racchiusa dalla curva  $\mathcal{C}$  e sia  $P = \overline{\mathcal{A}}$ . Notiamo innanzitutto che si ha, lungo le traiettorie,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -\alpha y^2, \quad (24.25)$$

così che la funzione  $W = H$  verifica le proprietà 1 e 2 del teorema di Barbašin-Krasovskij. Vogliamo dimostrare che  $P$  verifica le tre condizioni 3 del teorema. La condizione 3(a) è ovviamente soddisfatta poiché  $x_0 \in P$  per costruzione. Per dimostrare che  $P$  è positivamente invariante, i.e. la proprietà 3(b), è sufficiente far vedere che, sulla frontiera di  $P$ , i.e. su  $\mathcal{C}$ , il campo vettoriale è diretto verso l'interno (cfr. l'esercizio 24 del capitolo 4). Il campo vettoriale del sistema dinamico (24.2) è definito dalla funzione

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x), \quad f_0(x) = (y, -\sin \theta), \quad f_1(x) = (0, -\alpha y), \quad (24.26)$$

i.e. si può vedere come somma di due campi vettoriali, di cui  $f_0(x)$  descrive il sistema dinamico (24.3), mentre  $f_1(x)$  tiene conto del termine di attrito. Il campo vettoriale  $f_0(x)$  è tangente

a  $\mathcal{C}$  in ogni suo punto: infatti per costruzione  $\mathcal{C}$  è una curva di livello del sistema dinamico  $\dot{x} = f_0(x)$ , quindi il vettore tangente alla curva  $\mathcal{C}$  in un suo punto  $x$  è diretto lungo il campo vettoriale  $f_0(x)$ . D'altra parte il campo vettoriale  $f_1(x)$  è diretto lungo l'asse delle ordinate e punta verso il basso se  $y > 0$  e verso l'alto se  $y < 0$  (e si annulla sui punti  $y = 0$  di  $\mathcal{C}$ ): quindi  $f_1(x)$  spinge verso l'interno della regione  $\mathcal{A}$ . Ne segue che il campo vettoriale risultante (24.2) è diretto verso l'interno di  $\mathcal{A}$ . Dimostriamo ora che è verificata anche la proprietà 3(c). Poiché  $\dot{W} = \dot{H}$  è data dalla (24.25) si ha  $\dot{W} = 0$  solo se  $y = 0$ . Basta dunque dimostrare che non esistono traiettorie interamente contenute nell'insieme

$$\mathcal{S} := \{(\theta, y) \in \mathcal{A} : y = 0, \theta \neq 0\}; \quad (24.27)$$

questo infatti implica che non esiste alcuna traiettoria in  $P \setminus \{(0, 0)\}$  tale che  $\dot{W}(z) = 0$  per ogni  $z$  lungo la traiettoria. In altre parole basta dimostrare che per ogni punto  $x \in \mathcal{S}$  il campo vettoriale (24.26) non è diretto lungo l'asse delle ascisse, così che, se a un certo istante  $t_1$  la traiettoria passa per  $\mathcal{S}$ , allora al tempo  $t = t_1 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente piccolo, essa dovrà abbandonare  $\mathcal{S}$ . Poiché per ogni punto  $(\theta, y) \in \mathcal{S}$  si ha  $f(\theta, y) = (0, -\sin \theta)$  si vede che il campo vettoriale è sempre diretto ortogonalmente a  $\mathcal{S}$ : infatti  $\sin \theta = 0$  solo per  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , ma entrambi i punti  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$  non sono contenuti in  $\mathcal{S}$ .

L'argomento si può applicare a qualsiasi curva  $\mathcal{C}$  che corrisponda a una curva di livello  $\gamma_E$ , con  $0 < E < 2$ : la regione  $\mathcal{A}$  racchiusa da una qualsiasi di tali curve costituisce una stima del bacino d'attrazione del punto  $P_1$ .

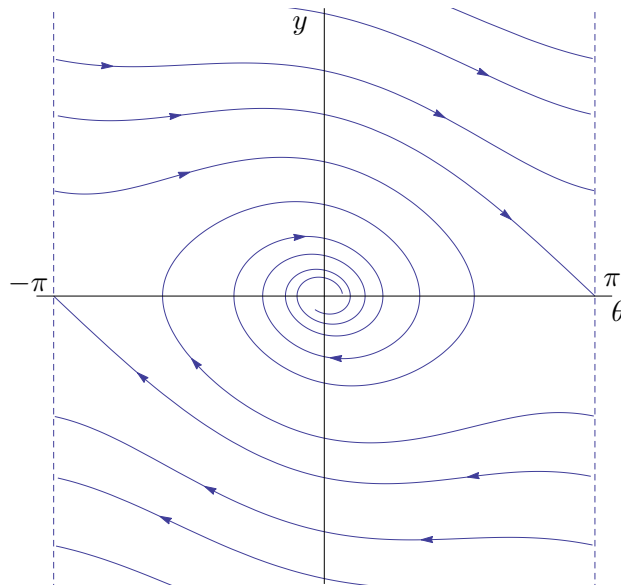


Figura 5.16: Piano delle fasi per il pendolo con attrito.

Se calcoliamo la derivata sostanziale della funzione (24.4), troviamo  $\dot{H} = -\alpha y^2$  (cfr. la (24.25)). Si ha

$$H(\theta(t), y(t)) = H(\theta(0), y(0)) + \int_0^t ds \dot{H}(\theta(s), y(s)) = H(\theta(0), y(0)) - \alpha \int_0^t ds y^2(s). \quad (24.28)$$

Dal momento che  $H(\theta, y) \geq 0 \forall (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , l'integrale in (24.28), essendo positivo per ogni  $t > 0$ , deve convergere per  $t \rightarrow +\infty$ . Questo comporta che  $y(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  (cfr. l'esercizio 8). Inoltre, anche  $\dot{y}(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  (cfr. di nuovo l'esercizio 8). Poiché  $\dot{y} = -\sin \theta - \alpha y$ , si ha  $\sin \theta(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Quindi  $\theta(t)$  tende a 0 o a  $\pi$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Ne concludiamo che per ogni dato iniziale  $\bar{x} \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ , si ha  $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (0, 0)$  oppure  $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (\pi, 0)$ . Le traiettorie asintotiche a  $P_2 = (\pi, 0)$  si muovono lungo una curva regolare che costituisce quella che si chiama la *varietà stabile* di  $P_2$  (cfr. la nota bibliografica). Tale curva ha un ramo nel semipiano superiore e un ramo nel semipiano inferiore. Tutte le traiettorie che partono da punti al di fuori di tali varietà sono invece asintotiche a  $P_1$ . La situazione è rappresentata nella figura 5.16.

## §25 Un esempio propedeutico di sistema planare

Discutiamo in dettaglio un secondo esempio di sistema planare, che, per quanto fisicamente meno interessante del pendolo matematico visto al paragrafo precedente, costituisce comunque un utile paradigma per gli esercizi più avanti.

Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot{y} = -4xy(x^2 + y^2 - 2). \end{cases} \quad (25.1)$$

(1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) \quad (25.2)$$

è una costante del moto.

(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

(3) Si analizzino le curve di livello di  $H(x, y)$  nel piano, se ne determini qualitativamente la forma e se ne discuta il verso di percorrenza.

(4) Si risolvano esplicitamente le equazioni del moto, i.e. si trovi la soluzione  $(x(t), y(t))$ , in corrispondenza del dato iniziale  $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ .

### §25.1 Costante del moto

Si verifica facilmente che

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 4xy(x^2 + y^2 - 2), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2).$$