

## 6 | Sistemi unidimensionali

### §26 Sistemi a un grado di libertà

Dato un sistema di *punti materiali*, i.e. di corpi puntiformi provvisti di massa, chiameremo *numero di gradi di libertà* il numero di quantità indipendenti che devono essere specificate per definire univocamente la configurazione del sistema. Se il sistema ha  $n$  gradi di libertà esistono allora, almeno localmente,  $n$  coordinate  $(x_1, \dots, x_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  che ne individuano la posizione in modo univoco. Chiameremo *spazio delle configurazioni* del sistema il dominio di variabilità delle coordinate; lo spazio delle configurazioni sarà in generale un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$ . Nel presente capitolo studieremo il moto di *sistemi a un grado di libertà*, i.e. sistemi meccanici il cui stato è univocamente determinato da una sola variabile; per questo motivo chiameremo tali sistemi anche *sistemi unidimensionali*.

I sistemi a un grado di libertà costituiscono un caso particolare dei sistemi planari studiati nel §21 del capitolo precedente. Per determinare le traiettorie nel piano delle fasi si può procedere come visto per i sistemi planari; vedremo che, alternativamente, è possibile ricondurre lo studio delle traiettorie allo studio di una funzione scalare, l'energia potenziale del sistema.

La rilevanza dello studio di sistemi a un grado di libertà risiede nel fatto che si tratta dei più semplici sistemi meccanici, e quindi sistemi fisicamente interessanti, in cui si può applicare con successo la teoria generale e i risultati dell'analisi qualitativa sviluppati nei capitoli precedenti. Infatti, in tal caso, è sempre possibile risolvere le equazioni del moto, per lo meno in forma implicita. Inoltre si riesce sempre a rappresentare le traiettorie nello spazio delle fasi, così da visualizzare e interpretare graficamente i risultati in maniera semplice. In altre parole si può arrivare a una conoscenza completa del moto. In generale questo non sarà più possibile non appena si passi a due gradi di libertà (a meno che non si facciano ulteriori ipotesi sul sistema).

Un sistema meccanico a un grado di libertà è individuato in ogni istante dai valori che assumono la coordinata  $x$  e la velocità  $\dot{x}$  di un punto materiale. L'equazione che descrive il moto è (cfr. la definizione 17.28)

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (26.1)$$

dove  $m$  è una costante positiva (*massa* del punto) e  $F : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione

di classe  $C^1$  (forza che agisce sul punto); l'insieme aperto  $A \subset \mathbb{R}$  costituisce lo spazio delle configurazioni del sistema. Fisicamente, il sistema descrive un punto materiale sottoposto all'azione di una forza e al "vincolo" di muoversi lungo una direzione prefissata (cfr. il capitolo 9 per una definizione formale di sistema vincolato).

Risolvere l'equazione (26.1) significa trovare la soluzione  $x(t)$ , fissati i dati iniziali al tempo  $t_0$ , i.e.  $x(t_0) = \bar{x}$  e  $\dot{x}(t_0) = \bar{v}$ , con  $(\bar{x}, \bar{v}) \in A \times \mathbb{R}$ . Per sottolineare la dipendenza dai dati iniziali scriveremo anche, consistentemente con le notazioni introdotte nel capitolo 3,  $x(t) = \varphi(t, (\bar{x}, \bar{v}))$ . Il fatto che  $F$  sia di classe  $C^1$  garantisce l'esistenza di un'unica soluzione  $x(t)$ , fissati i dati iniziali, per il teorema di esistenza e unicità (teorema 11.29).

Se la funzione  $F(x, \dot{x}, t)$  in (26.1) non dipende esplicitamente dalla velocità e dal tempo, i.e.  $F(x, \dot{x}, t) = F(x)$ , scriveremo

$$m\ddot{x} = F(x), \quad F(x) = -\frac{dV}{dx}(x), \quad (26.2)$$

con  $V : A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  definita a meno di una costante additiva; quindi il sistema meccanico è conservativo (cfr. la definizione 17.31). Indicheremo con un apice le derivate della funzione  $V$ , per esempio

$$V'(x) := \frac{dV}{dx}(x), \quad V''(x) := \frac{d^2V}{dx^2}(x), \quad V'''(x) := \frac{d^3V}{dx^3}(x), \quad (26.3)$$

almeno finché l'ordine di derivazione non è troppo alto (nel qual caso la notazione con gli apici diverrebbe pesante).

**Osservazione 26.1** Il sistema (26.1) è un sistema dinamico della forma  $\dot{z} = f(z, t)$ , dove  $z = (x, y) \in A \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  e  $f(z, t)$  è il campo vettoriale di componenti  $(y, m^{-1}F(x, y, t))$ ; nel caso del sistema (26.2), si ha  $f(z, t) = f(z) = (y, m^{-1}F(x))$ , i.e.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = m^{-1}F(x) = -m^{-1}V'(x). \end{cases} \quad (26.4)$$

**Definizione 26.2** (ENERGIA) Dato il sistema (26.2), la funzione

$$E(x, \dot{x}) := T(\dot{x}) + V(x), \quad T(\dot{x}) := \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (26.5)$$

prende il nome di energia totale del sistema (o energia tout court). Il termine  $T(\dot{x})$  prende il nome di energia cinetica, mentre il termine  $V(x)$  prende il nome di energia potenziale.

**Lemma 26.3** (LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA) La funzione (26.5) è una costante del moto per il sistema (26.2).

*Dimostrazione.* A partire dalla definizione di  $E$  in (26.5), se ne calcola la derivata temporale, ottenendo

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x} \left( m\ddot{x} + V'(x) \right), \quad (26.6)$$

e si utilizza la (26.2) per concludere che  $dE/dt = 0$ . ■

**Osservazione 26.4** Dalla (26.6) si deduce che, se  $x(t)$  è soluzione della (26.2), allora esiste una costante  $E_0$  tale che

$$E(x(t), \dot{x}(t)) = E_0, \quad (26.7)$$

per ogni tempo  $t$  per cui la soluzione  $x(t)$  è definita. Utilizzando l'espressione (26.5) di  $E(x, \dot{x})$ , per  $\dot{x} \neq 0$  possiamo riscrivere la (26.7) come

$$y = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \Phi(x), \quad \Phi(x) := \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - V(x))}. \quad (26.8)$$

Poiché, fissati  $E_0$  e  $\bar{x}$ , risulta determinato il valore della velocità  $\bar{v}$ , a meno del segno, possiamo indicare la soluzione  $x(t) = \varphi(t, (\bar{x}, \bar{v}))$  con  $\varphi_{E_0}^{\pm}(t, \bar{x})$ , dove il segno  $\pm$  dipende dal segno di  $\bar{v}$ . Se  $\bar{v} = 0$  il segno in (26.8) non è definito. Tuttavia, se  $\bar{x}$  non è un punto stazionario di  $V$ , si ha  $V'(\bar{x}) \neq 0$ , così che  $\ddot{x}(0) \neq 0$  per  $t = 0$  e quindi il segno di  $\dot{x}(t)$  è definito per  $t \neq 0$  sufficientemente piccolo; in conclusione il segno in  $\varphi_{E_0}^{\pm}(t, \bar{x})$  è ben definito anche per dati iniziali tali che  $\bar{v} = 0$ . D'altra parte, se  $\bar{v} = 0$  e  $V'(\bar{x}) = 0$ , allora  $(\bar{x}, \bar{v})$  è un punto di equilibrio e quindi  $\varphi(t, (\bar{x}, \bar{v})) = (\bar{x}, \bar{v}) \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 26.5** (MOTO ASINTOTICO) Sia  $(x_0, 0)$  un punto di equilibrio per il sistema dinamico (26.4) e sia  $E_0$  tale che  $E(x_0, 0) = E_0$ . Diremo che la traiettoria descritta da  $x(t)$  è asintotica a  $x_0$  se  $x(t) \rightarrow x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$ . Se  $x(t) \rightarrow +\infty$  (o  $x(t) \rightarrow -\infty$ ) per  $t \rightarrow +\infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$ , diremo che la traiettoria è asintotica a  $+\infty$  (o asintotica a  $-\infty$ ).

Supponiamo d'ora in poi che gli zeri di  $F$  in (26.2) (i.e. i punti  $x$  tali che  $F(x) = 0$ ) siano punti isolati e indichiamo con  $X_{E_0}$  l'insieme dei punti  $x$  tali che  $E_0 - V(x) = 0$ . Uno zero  $x_0$  di una funzione si dice di *ordine*  $k$  se la prima derivata non nulla della funzione in  $x_0$  è quella di ordine  $k$ . Uno zero si dice *semplice* se è di ordine 1.

**Definizione 26.6** (PUNTO DI INVERSIONE) Uno zero semplice di  $E_0 - V(x)$  è detto punto di inversione del moto.

Si vede dalla (26.6) che, per  $x \notin X_{E_0}$ , una soluzione di (26.2) è anche soluzione di (26.8). Tuttavia la (26.8) ha più soluzioni della (26.2). Il teorema seguente mostra come procedere per determinare le soluzioni di (26.2) utilizzando la (26.8).

**Teorema 26.7** Consideriamo moti descritti dalla (26.2), con energia fissata  $E_0$ , e supponiamo che  $F(x)$  abbia zeri isolati. Sia  $x_0 \in X_{E_0}$ , i.e. tale che  $E_0 - V(x_0) = 0$ .

1. Se  $x_0$  è un punto di minimo relativo isolato di  $V(x)$ , allora esiste un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  tale che non esistono soluzioni di (26.2) con energia  $E_0$  e dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$ .
2. Se  $x_0$  è un punto di massimo relativo isolato di  $V(x)$ , allora esiste un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  tale che i moti con dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0)$  sono asintotici a  $x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$ , a seconda che sia  $\bar{x} < x_0$  o  $\bar{x} > x_0$ .
3. Se  $x_0$  è un punto di flesso isolato di  $V(x)$ , allora esiste un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  tale che esistono soluzioni di (26.2) con energia  $E_0$  e dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0)$  se e solo se  $V(\bar{x}) < V(x_0)$  (quindi solo a destra o solo a sinistra di  $x_0$ ); tali soluzioni sono asintotiche a  $x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$  se  $\bar{x} < x_0$  e per  $t \rightarrow -\infty$  se  $\bar{x} > x_0$ .
4. Se  $x_0$  è un punto di inversione del moto, i.e.  $V'(x_0) \neq 0$ , allora esiste un intorno  $B(x_0)$  di  $x_0$  tale che soluzioni con dati iniziali  $\bar{x} \in B(x_0)$ , con  $\bar{x} < x_0$  se  $V'(x_0) > 0$  e  $\bar{x} > x_0$  se  $V'(x_0) < 0$ , raggiungono il punto  $x_0$  in un tempo finito  $t_0 = t_0(\bar{x})$ , con  $t_0 > 0$  se  $\bar{x} < x_0$  e  $t_0 < 0$  se  $\bar{x} > x_0$ , con velocità finale  $\dot{x}(t_0) = 0$  e  $\dot{x}(t_0 + t)\dot{x}(t_0 - t) < 0$  per ogni  $t$  tale che  $x(t_0 \pm t) \in B(x_0)$ .

*Dimostrazione.* Nel caso 1,  $x_0$  è un punto di minimo relativo isolato per la funzione  $V(x)$ , quindi  $(x_0, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico corrispondente (26.4), per il teorema di Lagrange-Dirichlet (teorema 19.22). Poiché l'energia cinetica è una funzione positiva e l'energia potenziale  $V(x)$  è continua e ha in  $x_0$  un punto di minimo isolato, la condizione  $E(\bar{x}, \bar{v}) = E_0$  non può essere soddisfatta per  $\bar{x} \neq x_0$  sufficientemente vicino a  $x_0$ . Quindi esiste un intorno  $B(x_0)$  in cui non esistono soluzioni con energia  $E_0$  oltre al punto di equilibrio  $x_0$ .

Il caso 2 corrisponde a un punto  $x_0$  che è di massimo relativo isolato per  $V(x)$ . Consideriamo un dato iniziale  $\bar{x}$  tale che  $E_0 - V(x) > 0$  per  $x \neq x_0$  tale che  $|x - x_0| \leq |\bar{x} - x_0|$ . Possiamo supporre per concretezza che sia  $\bar{x} < x_0$  (il caso complementare si tratta allo stesso modo). Studiamo la soluzione  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  di (26.8) con  $x(0) = \bar{x}$ . Poiché la funzione  $\Phi(x)$  in (26.8) è lipschitziana (nel caso che stiamo considerando), la soluzione  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  è l'unica soluzione con dato iniziale  $\bar{x}$  e poiché  $dx/dt > 0$  tale soluzione è crescente. Per il teorema 11.27 (teorema di unicità), si ha  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x}) < x_0$  per ogni  $t$ . Inoltre si deve avere

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{E_0}^+(t, \bar{x}) = x_0,$$

perché altrimenti, se tale limite fosse  $x_0^* \neq x_0$ , si avrebbe

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\varphi}_{E_0}^+(t, \bar{x}) = \Phi(x_0^*) \neq 0,$$

essendo  $x_0$  un punto di massimo isolato per la funzione  $V(x)$ , e si troverebbe dunque un assurdo. Ne segue che la soluzione  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  è asintotica a  $x_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ . Analogamente si trova che la soluzione  $\varphi_{E_0}^-(t, \bar{x})$  è asintotica a  $x_0$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Il caso 3 si discute analogamente al caso 2, limitando però l'analisi ai valori di  $\bar{x}$  tali che  $V(\bar{x}) < V(x_0)$ .

Consideriamo infine il caso 4, in cui sia  $V'(x_0) \neq 0$ , i.e.  $E_0 - V(x)$  abbia uno zero di ordine uno in  $x_0$ . In questo caso  $\Phi(x)$  non è lipschitziana in  $x_0$  e quindi ci sono in generale più soluzioni con dato iniziale  $\bar{x}$ . Inoltre la condizione  $V'(x_0) \neq 0$  implica che solo i dati iniziali contenuti in uno dei due intorni (destro e sinistro) di  $x_0$  sono compatibili con valori dell'energia potenziale  $V(x)$  minori di  $E_0$ ; supponiamo, di nuovo per concretezza, che sia l'intorno sinistro. Sia  $\varphi_{E_0}^+(t, \bar{x})$  la soluzione con dato iniziale  $\bar{x} < x_0$  e  $\bar{v} > 0$ . Tale soluzione è crescente e, a differenza del caso precedente, esiste un tempo finito  $t_0$  tale che  $\varphi_{E_0}^+(t_0, \bar{x}) = x_0$ , dal momento che il campo vettoriale del corrispondente sistema dinamico è non nullo in  $(x_0, 0)$  ed è perciò limitato dal basso in un intorno opportuno di  $(x_0, 0)$  (cfr. il corollario 27.8 più avanti per maggiori dettagli). In generale possiamo continuare la soluzione di (26.7) con una funzione  $\varphi_{E_0}^*(t, \bar{x})$ , con  $t > t_0$ . Poniamo

$$t_1 := \inf\{t \geq t_0 : \dot{\varphi}_{E_0}^*(t, \bar{x}) < 0\},$$

che rappresenta il primo istante in cui la soluzione si allontana dal punto  $x_0$ , (per le ipotesi fatte e per la conservazione dell'energia,  $\dot{\varphi}_{E_0}^+(t_0, \bar{x}) = 0$  e la soluzione non può finire nell'intorno destro di  $x_0$ ). Se  $t_1 \neq t_0$  si deve avere

$$\ddot{\varphi}_{E_0}^*(t, \bar{x}) = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1), \quad \lim_{t \rightarrow t_0^+} \ddot{\varphi}_{E_0}^*(t, \bar{x}) = -\frac{1}{m}V'(x_0) \neq 0,$$

così che la derivata seconda della soluzione presenta una discontinuità in  $t = t_0$ . Quindi la continuazione scelta della soluzione di (26.8) non può essere anche una continuazione della soluzione di (26.2), poiché  $F(\varphi_{E_0}'(t, \bar{x}))$  è derivabile in  $t$ , essendo  $F(x)$  derivabile in  $x$ , e  $\varphi_{E_0}'(t, \bar{x})$  derivabile in  $t$ . In conclusione l'unica continuazione  $\varphi_{E_0}^*(t, \bar{x})$  della soluzione di (26.8) che sia *anche* soluzione di (26.2) è quella che si ottiene prendendo  $t_1 = t_0$ . ■

**Osservazione 26.8** La condizione  $\dot{x}(t_0+t)\dot{x}(t_0-t) < 0$  per ogni  $t$  tale che  $x(t_0 \pm t) \in B(x_0)$ , enunciata al punto 3 del teorema 26.7, afferma che, una volta che  $x(t)$  raggiunge il punto  $x_0$ , con velocità nulla, subito inverte la direzione del moto e torna indietro. Questo giustifica la definizione di  $x_0$  quale punto di inversione del moto (cfr. la definizione 26.6). La traiettoria  $x(t)$  può invertire direzione più volte al passare del tempo, quindi  $\dot{x}(t_0+t)$  può non avere segno definito per ogni  $t$  per cui è definita; tuttavia pur di scegliere l'intorno  $B(x_0)$  sufficientemente piccolo possiamo supporre che  $\dot{x}(t_0+t)$  abbia sempre lo stesso segno per  $t$  tale che  $x(t_0+t) \in B(x_0)$ . Analogamente si può ragionare per  $\dot{x}(t_0-t)$ .

**Osservazione 26.9** Il teorema 26.7 mostra che l'equazione (26.8) può essere utilizzata per determinare le soluzioni di (26.2). Il vantaggio è che si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine, risolubile per separazione di variabili.

## §27 Analisi qualitativa: aspetti preliminari

Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dall'equazione (26.2). Chiameremo *spazio delle fasi* o *piano delle fasi* lo spazio cartesiano di dimensione 2 le cui coordinate sono costituite dalla variabile di posizione  $x$  e dalla velocità corrispondente  $\dot{x}$ ; la prima sarà riportata sull'asse delle ascisse, la seconda su quello delle ordinate.

**Osservazione 27.1** Vedremo che in meccanica hamiltoniana si definisce spazio delle fasi l'insieme di definizione delle variabili configurazionali e dei rispettivi momenti (cfr. in particolare l'osservazione 71.10 del capitolo 16). Quindi, a rigor di termini, la seconda variabile dello spazio delle fasi di un sistema bidimensionale dovrebbe essere il momento  $p$  (che, come vedremo nel capitolo 11, è definito come la derivata della lagrangiana associata al sistema). Tuttavia nel caso del sistema (26.2) risulta  $p = m\dot{x}$ , quindi, a meno di un (irrilevante) fattore moltiplicativo le due variabili momento e velocità coincidono. Una denominazione più appropriata dell'insieme di definizione delle variabili  $(x, \dot{x})$  sarebbe *spazio posizione-velocità*, ma, per semplicità e per uniformarci all'uso corrente, useremo invece il termine spazio delle fasi.

**Definizione 27.2** (CURVE DI LIVELLO PER SISTEMI UNIDIMENSIONALI) *Dato il sistema meccanico unidimensionale (26.2), si chiama curva di livello di energia  $E_0$  il luogo dei punti dello spazio delle fasi definito da*

$$\Gamma_{E_0} := \left\{ (x, y) \in A \times \mathbb{R} : \frac{1}{2}my^2 + V(x) = E_0 \right\}. \quad (27.1)$$

**Lemma 27.3** *Dato il sistema dinamico (26.2), con  $V$  di classe  $C^2$ , le componenti connesse delle curve di livello (27.1) sono curve di classe  $C^2$  tranne che nei punti  $(x_0, 0)$ , con  $x_0$  punto critico di  $V$ .*

*Dimostrazione.* Definiamo

$$G(x, y) := E(x, y) - E_0 = \frac{1}{2}my^2 + V(x) - E_0.$$

L'equazione  $G(x, y) = 0$  stabilisce una relazione tra  $x$  e  $y$ . Poiché risulta

$$\left( \frac{\partial G}{\partial x}(x, y), \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right) = (V'(x), my) \neq (0, 0),$$

tranne che nei punti di equilibrio del sistema dinamico corrispondente (26.4), in un intorno di ogni punto che non sia di equilibrio possiamo applicare il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 4) ed esprimere  $y$  in funzione di  $x$  o, viceversa,  $x$  in funzione di  $y$ , i.e.  $y = Y(x)$  o  $x = X(y)$ , per opportune funzioni  $X$  o  $Y$ ; sempre per il teorema della funzione implicita le applicazioni  $x \mapsto Y(x)$  o  $y \mapsto X(y)$  sono di classe  $C^2$  se  $V$  è di classe  $C^2$ . ■

**Osservazione 27.4** Poiché la soluzione di (26.2) può essere espressa in termini della soluzione del corrispondente sistema dinamico (26.4), per evitare ambiguità, distingueremo sempre tra la traiettoria  $t \mapsto x(t)$  che descrive il moto per la (26.2) e la traiettoria nello spazio delle fasi  $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$  che esprime la soluzione di (26.4). Si noti in particolare che la traiettoria  $x(t)$  è data dalla proiezione sull'asse delle ascisse della traiettoria nello spazio delle fasi.

**Osservazione 27.5** La legge di conservazione dell'energia (lemma 26.3) implica che ogni traiettoria  $t \mapsto x(t)$  corrisponde a una traiettoria nello spazio delle fasi il cui sostegno è contenuto all'interno di una stessa curva di livello. Una curva di livello può comunque contenere più orbite. Poiché le traiettorie sono continue, ogni orbita nello spazio delle fasi del sistema (26.2) è contenuta in una componente connessa di una curva di livello. Quindi le curve di livello (27.1), con  $V$  di classe  $C^2$ , sono unione di sostegni di curve piane di classe  $C^2$ , più eventualmente i punti che corrispondono a posizioni di equilibrio. Tali punti saranno della forma  $(x, \dot{x}) = (x_0, 0)$  e saranno perciò situati sull'asse delle ascisse (cfr. il lemma 28.4 più avanti). Notiamo anche che un punto dello spazio delle fasi non può appartenere a più curve di livello, per il teorema di unicità (teorema 11.27).

**Teorema 27.6** *Dato il sistema meccanico (26.2), se l'energia potenziale  $V: A \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata dal basso, i.e. se esiste una costante  $V_0$  tale che  $V(x) \geq V_0$  per ogni  $x \in A$ , allora per ogni dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{v})$ , le soluzioni  $\varphi(t, (\bar{x}, \bar{v}))$  sono definite globalmente in  $t$ , i.e.  $\forall t \in \mathbb{R}$ .*

*Dimostrazione.* Dalle (26.5) e (26.7) deduciamo che

$$|\dot{x}(t)| = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x(t)))} \leq C := \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V_0)}. \quad (27.2)$$

Integrando  $\dot{x}(t)$  e utilizzando la (27.2), si ottiene

$$|x(t) - \bar{x}| \leq \int_0^t ds |\dot{x}(s)| \leq C|t|,$$

per ogni  $t$  per cui la soluzione  $x(t)$  sia definita. Consideriamo allora, per  $T > 0$ , l'insieme

$$R_T := \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : |x - \bar{x}| \leq CT \quad |\dot{x}| \leq C\}.$$

Se la soluzione  $x(t)$  non è definita globalmente deve esistere un intervallo massimale  $(\alpha, \beta)$  tale che  $x(t)$  è definita solo per  $t \in (\alpha, \beta)$ , con  $|\alpha|, |\beta|$  non entrambi infiniti. Supponiamo che sia  $\beta < +\infty$ . Allora, per ogni  $t \in [0, \beta)$  si avrebbe  $x(t) \in R_\beta$  e quindi esisterebbe un compatto contenente la soluzione, in contraddizione con il corollario 13.13 (corollario del teorema del prolungamento). Analogamente si esclude che sia  $\alpha > -\infty$ . ■

**Teorema 27.7** *Sia  $\gamma$  un arco di curva di lunghezza finita contenuto in una curva di livello  $\Gamma_E$ . Se  $\gamma$  non contiene punti di equilibrio, allora il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è finito, i.e. la traiettoria nello spazio delle fasi che parte da un estremo di  $\gamma$  raggiunge l'altro estremo in un tempo finito.*

*Dimostrazione.* Poniamo  $y = \dot{x}$  e  $z = (x, y)$ . Siano  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  gli estremi dell'arco di curva  $\gamma$ . Non è restrittivo considerare il caso in cui  $\gamma$  si possa scrivere nella forma  $y = Y(x)$  o  $x = X(y)$ , per opportune funzioni  $X$  o  $Y$ . Se non è così infatti, poiché  $\gamma$  è un arco di curva regolare, lo si può dividere in più pezzi ciascuno dei quali è esprimibile in una di tali forme. Assumiamo per esempio che per ogni  $z \in \gamma$  si abbia

$$z = (x, y) = (x, Y(x)), \quad x \in [x_1, x_2];$$

il caso in cui si possa esprimere  $y$  in funzione di  $x$  si tratta in modo analogo. Parametizziamo la curva scrivendo  $t \mapsto z = z(t) = \varphi(t, z_1)$ . Vogliamo dimostrare che per ogni  $z_0 \in \gamma$  esiste un tempo  $t(z_0)$  tale che  $z(t(z_0)) = z_0$ , con  $|t(z_0)| < +\infty$ . Lungo  $\gamma$  si ha

$$\dot{z} = (\dot{x}, \dot{y}) = (Y(x), -V'(x)),$$

dove

$$|Y(x)| = \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}, \quad x \in [x_1, x_2],$$

per la (26.8). Sia  $z_0 = (x_0, y_0)$ , con  $x_1 < x_0 \leq x_2$ . Poiché  $[x_1, x_2]$  è compatto, il minimo

$$a := \min_{x \in [x_1, x_0]} |\dot{z}| = \min_{x \in [x_1, x_0]} \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x)) + (V'(x))^2}$$

esiste e si ha  $a > 0$ , in virtù dell'ipotesi che  $\gamma$  non contenga punti di equilibrio. La lunghezza dell'arco di curva  $\gamma_0$  che connette  $z_1$  a  $z_0$  è allora data da (cfr. la definizione nell'esercizio 36 del capitolo 3)

$$\ell_0 = \left| \int_0^{t(z_0)} dt \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right| = \left| \int_0^{t(z_0)} dt |\dot{z}(t)| \right| > a |t(z_0)|,$$

e poiché  $\ell_0 < +\infty$  possiamo concludere che  $t(z_0)$  è finito. ■

**Corollario 27.8** *Sia  $x_0$  un punto di inversione del moto per la (26.2). Esiste un intorno  $B(x_0)$  tale per ogni  $\bar{x} \in B(x_0)$ , con  $\bar{x} < x_0$  se  $V'(x_0) > 0$  e  $\bar{x} > x_0$  se  $V'(x_0) < 0$ , la traiettoria  $x(t)$  che parte da  $\bar{x}$  raggiunge  $x_0$  in un tempo  $t$  finito (con  $t > 0$  se  $\bar{x} < x_0$  e  $t < 0$  se  $\bar{x} > x_0$ ).*

*Dimostrazione.* Si consideri l'arco di curva nello spazio delle fasi che connette il punto  $(\bar{x}, \bar{v})$  con il punto  $(x_0, 0)$ . Per il teorema 27.7 il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è finito, in particolare è finito il tempo in cui la coordinata  $x$  passa dal valore  $\bar{x}$  al valore  $x_0$ . ■

## §28 Analisi qualitativa: struttura delle orbite

Consideriamo una funzione  $V: A \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}$ , e sia  $V_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  tale che  $V(x) \geq V_0$  per ogni  $x \in A$  (varrà il segno uguale per qualche  $x$  se  $V_0$  è un punto di minimo e il segno stretto se  $V_0$  è l'estremo inferiore di  $V$ : il secondo caso è possibile con  $V_0 > -\infty$  se  $y = V_0$  è un asintoto orizzontale per  $V$ ). Assumiamo per semplicità che la funzione  $V$  non sia costante in alcun intervallo; in particolare  $V$  ha punti critici isolati.

Denotiamo  $\mathcal{E}_m$  l'insieme dei punti di minimo della funzione  $V$ ,  $\mathcal{E}_M$  l'insieme dei punti di massimo,  $\mathcal{E}_M^0$  l'insieme dei punti di massimo in cui la derivata seconda è diversa da zero ed  $\mathcal{E}_*$  l'insieme dei punti critici non in  $\mathcal{E}_m$ , e indichiamo con  $\mathcal{E} := \mathcal{E}_m \cup \mathcal{E}_*$  l'insieme dei punti critici di  $V$ ; si ha  $\mathcal{E}_M^0 \subset \mathcal{E}_M \subset \mathcal{E}_* \subset \mathcal{E}$ . Il motivo per cui distinguiamo tra  $\mathcal{E}_M^0$  e  $\mathcal{E}_M \setminus \mathcal{E}_M^0$  risulterà chiaro dai lemmi 28.14 e 28.17 (cfr. in particolare le (28.3) e (28.4) più avanti). Se  $V$  è derivabile un numero sufficiente di volte,  $\mathcal{E}$  contiene punti in cui sono nulle le derivate fino a qualche ordine. Per esempio, se  $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$  si ha  $V'(x_0) = 0$  e  $V''(x_0) \neq 0$ , mentre se  $x_0 \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$  (per esempio se  $x_0$  è un punto di flesso orizzontale), si ha  $V'(x_0) = V''(x_0) = 0$  almeno.

Nella figura 6.1 è discusso, a scopo illustrativo, un esempio di energia potenziale, in cui si ha  $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_M^0$ , i.e.  $V''(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{E}_M$ .

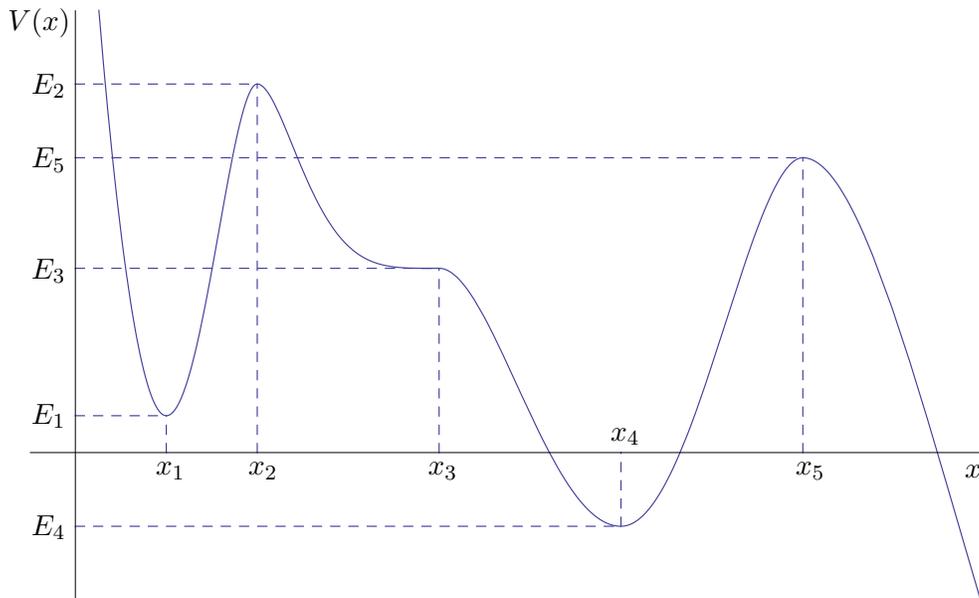


Figura 6.1: Esempio di energia potenziale  $V(x)$  e i corrispondenti sottoinsiemi di  $\mathcal{E}$ :  $\mathcal{E}_m = \{x_1, x_4\}$ ,  $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_M^0 = \{x_2, x_5\}$  e  $\mathcal{E}_* = \{x_2, x_3, x_5\}$ , dove  $x_1$  e  $x_4$  sono punti di minimo relativo,  $x_2$  e  $x_5$  sono punti di massimo relativo e  $x_3$  è un punto di flesso orizzontale. La funzione  $V(x)$  è definita solo per  $x > 0$ , tende a  $+\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$  e tende a  $-\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Per ogni valore  $E \in \mathbb{R}$  indichiamo con  $X_E$  i valori  $x \in A$  in corrispondenza dei quali si abbia  $V(x) = E$ ; risulterà  $X_E = \{x_1, \dots, x_N\}$ , con  $N \geq 1$  se  $X_E \neq \emptyset$ . Consideriamo anche gli intervalli chiusi (limitati o illimitati)  $I_1, \dots, I_{N'}$ , con  $N' \geq 1$ , contenuti in  $\mathbb{R}$  tali che

1.  $V(x) \leq E$  se  $x \in I_i$  per qualche  $i$ ,
2.  $V(x) < E$  se  $x \in I_i \setminus \partial I_i$  per qualche  $i$ ,

e poniamo  $\mathcal{I}_E = \{I_1, \dots, I_{N'}\}$ . Ovviamente sia  $N$  che  $N'$  variano al variare di  $E$ . Se  $x_j \in \mathcal{E}_M$  e  $E = V(x_j)$ , allora  $x_j$  è contemporaneamente l'estremo destro di un intervallo  $I_i$  e l'estremo sinistro di un intervallo  $I_{i+1}$ ; in altre parole gli intervalli possono avere un estremo in comune.

Se l'intervallo  $I_i$  è limitato risulta  $I_i = [x_j, x_{j+1}]$  per qualche  $j$ , a meno che non si abbia  $x_j \in \mathcal{E}_m$  e  $E = V(x_j)$ ; in tal caso esiste allora un intervallo degenere  $I_i = \{x_j\}$  contenente il solo punto  $x_j$ . Se  $I_i$  è illimitato risulterà  $I_i = [x_N, b)$ ,  $i = N'$ , oppure  $I_i = (a, x_1]$ ,  $i = 1$ ; gli ultimi due casi sono possibili solo se, rispettivamente,  $\lim_{x \rightarrow a} V(x) \leq E$  e  $\lim_{x \rightarrow b} V(x) \leq E$ , dove  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  e  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sono gli estremi destro e sinistro, rispettivamente, di  $A$ . Si veda per esempio la figura 6.2 per l'energia potenziale rappresentata nella figura 6.1 e per un fissato valore  $E$  dell'energia.

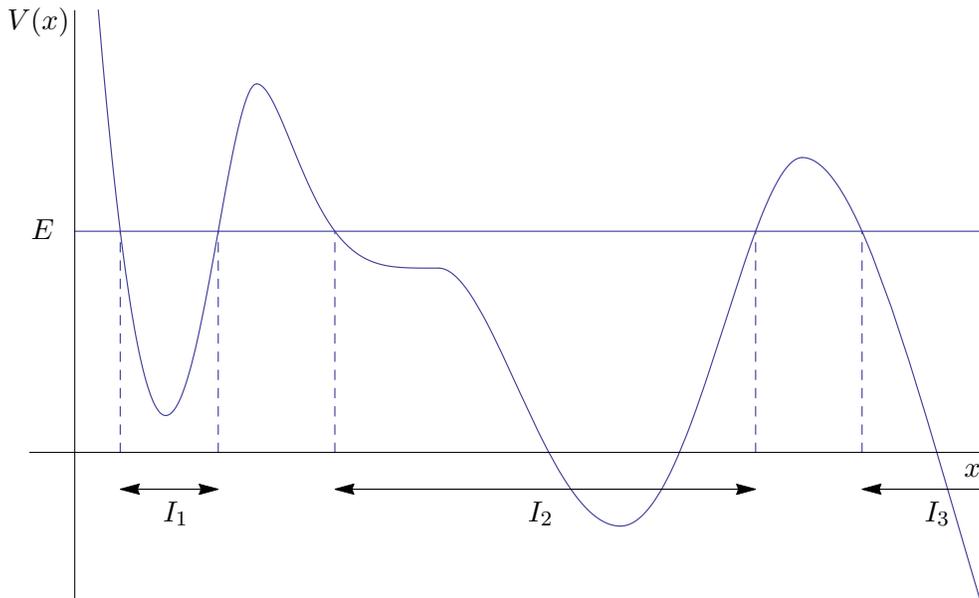


Figura 6.2: Fissato il valore di energia  $E$  come in figura, l'insieme  $\{x \in A : E - V(x) \geq 0\}$  risulta suddiviso in tre intervalli chiusi disgiunti  $I_1, I_2$  e  $I_3$ , i primi due limitati e il terzo è illimitato a destra.

Nel seguito analizzeremo le curve di livello corrispondenti al sistema (26.2) al variare dei valori che assume l'energia totale del sistema.

**Lemma 28.1** *Il punto  $x_0 \in X_E$  è un punto di inversione del moto per il sistema (26.2) se e solo se  $x_0 \notin \mathcal{E}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $x_0$  è un punto di inversione, si deve avere  $V'(x_0) \neq 0$  e quindi  $x_0 \notin \mathcal{E}$  poiché ogni punto in  $\mathcal{E}$  ha la derivata prima nulla. Viceversa, se  $x_0 \in X_E \setminus \mathcal{E}$  allora  $x_0$  è uno zero semplice di  $E - V(x)$  e quindi è un punto di inversione. ■

**Definizione 28.2** (VALORI CRITICI DELL'ENERGIA POTENZIALE) *Dato il sistema (26.2), chiameremo valori critici di  $V$*

1. *i valori assunti da  $V$  in corrispondenza dei suoi punti critici (se esistono), i.e. dei punti  $x$  tali che  $V'(x) = 0$ ,*
2. *i valori corrispondenti agli asintoti orizzontali di  $V$  (se esistono).*

**Lemma 28.3** *Se la funzione  $V$  ammette un estremo inferiore  $V_0$  l'insieme di valori critici è non nullo. Non esistono curve di livello corrispondenti a valori dell'energia  $E < V_0$ .*

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di valore critico e di curva di livello (cfr. le definizioni 28.2 e 27.2, rispettivamente). ■

**Lemma 28.4** *Consideriamo le curve di livello del sistema (26.2). Valgono le seguenti proprietà:*

1. *le curve di livello sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse;*
2. *il moto nello spazio delle fasi si svolge su orbite appartenenti a curve di livello, verso destra nel semipiano superiore e verso sinistra nel semipiano inferiore;*
3. *si possono avere punti di equilibrio solo sull'asse delle ascisse.*

*Dimostrazione.* La proprietà 1 segue dal fatto che l'equazione (27.1) che definisce la curva di livello è simmetrica rispetto alla variabile  $y = \dot{x}$ . La proprietà 2 segue dal fatto che sulle ordinate è riportata la variabile  $\dot{x}$ . Nel semipiano superiore, si ha  $\dot{x} > 0$ , così che  $x$  è crescente in  $t$ : il moto avviene nel verso in cui  $x$  aumenta, i.e. verso destra; analogamente nel semipiano inferiore si ha  $\dot{x} < 0$  e quindi ci si muove verso sinistra. Infine una posizione di equilibrio richiede  $\dot{x} = 0$  e questo è possibile solo sull'asse delle ascisse; da qui segue la proprietà 3. ■

**Lemma 28.5** *Sia  $E > V_0$  e sia  $I \in \mathcal{I}_E$ . Se  $I$  è illimitato a destra,  $I = [x_N, +\infty)$  e  $x_N \notin \mathcal{E}$ , allora l'orbita corrispondente nello spazio delle fasi*

- *interseca l'asse delle ascisse in  $x = x_N$ ,*
- *tende alla retta  $y = \pm \sqrt{(2/m)[E - V(+\infty)]}$  per  $x \rightarrow +\infty$ , dove  $V(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x)$ .*

Se  $V_0 > -\infty$  le traiettorie sono asintotiche, nel senso che se  $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0) \in \Gamma_E$ , con  $x_0 \geq x_N$ , si ha  $x(t) \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

*Dimostrazione.* Poiché l'energia è costante sulle curve di livello, per  $x = x_N$ , si ha  $E = V(x)$  e quindi  $\dot{x} = 0$ . Se definiamo  $V(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x)$  (dove  $V(+\infty) \leq E$  può anche essere  $-\infty$  se  $V_0 = -\infty$ ), si ha

$$E = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) + V(+\infty),$$

che dà il valore asintotico di  $y = \dot{x}$ , tenuto conto che  $V(+\infty) \leq E$  per ipotesi (se così non fosse, l'intervallo  $I$  non sarebbe illimitato).

Il campo vettoriale che descrive il sistema dinamico corrispondente (26.4) è dato da  $(y, -V'(x))$  e quindi non è mai nullo poiché  $y = 0$  per  $x = x_N$  e  $x_N \notin \mathcal{E}$ ; per il teorema 27.7 non possono esistere punti  $x_{\pm}$  tali che  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$ , con  $x_{\pm} < \infty$ . D'altra parte se  $V_0 > -\infty$  la soluzione  $x(t)$  non può neppure divergere a  $+\infty$  in un tempo finito, perché deve essere definita globalmente (cfr. il teorema 27.6). Quindi  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = +\infty$ . ■

**Lemma 28.6** *Sia  $E > V_0$  e sia  $I \in \mathcal{I}_E$ . Se  $I$  è illimitato a sinistra,  $I = (-\infty, x_1]$  e  $x_1 \notin \mathcal{E}$ , allora l'orbita corrispondente nello spazio delle fasi*

- *interseca l'asse delle ascisse in  $x = x_1$ ,*
- *tende alla retta  $y = \pm \sqrt{(2/m)[E - V(-\infty)]}$  per  $x \rightarrow -\infty$ , dove  $V(-\infty) := \lim_{x \rightarrow -\infty} V(x)$ .*

Se  $V_0 > -\infty$  le traiettorie sono asintotiche, nel senso che se  $(x(0), \dot{x}(0)) = (x_0, v_0) \in \Gamma_E$ , con  $x_0 \leq x_1$ , si ha  $x(t) \rightarrow -\infty$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è assolutamente analoga a quella del lemma 28.5. ■

**Teorema 28.7** *Se  $E$  non è un valore critico di  $V$  e  $I \in \mathcal{I}_E$  è illimitato, la componente connessa  $\gamma_E$  della curva di livello  $\Gamma_E$ , contenente i punti  $(x, \dot{x})$  con  $x \in I$ , è diffeomorfa a una retta.*

*Dimostrazione.* È una conseguenza dei lemmi 28.5 e 28.6; in particolare se  $V$  è di classe  $C^2$  la soluzione

$$t \in (-\infty, \infty) \mapsto (x(t), \dot{x}(t)) \in \gamma_E$$

stabilisce un'applicazione invertibile di classe  $C^2$  (e quindi un diffeomorfismo) tra la retta e l'orbita nello spazio delle fasi che costituisce una componente connessa  $\gamma_E$  di  $\Gamma_E$ . ■

**Osservazione 28.8** Le orbite  $\gamma_E$  del teorema 28.7 sono rettificabili, non solo localmente, come segue dal teorema della scatola di flusso (teorema 20.4), non contenendo punti di equilibrio, ma anche globalmente, come segue dal teorema 28.7. Inoltre esse sono *stabili*, nel senso che le orbite che si ottengono sostituendo  $E$  con  $E + \varepsilon$  sono tali che, per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^2$ , la

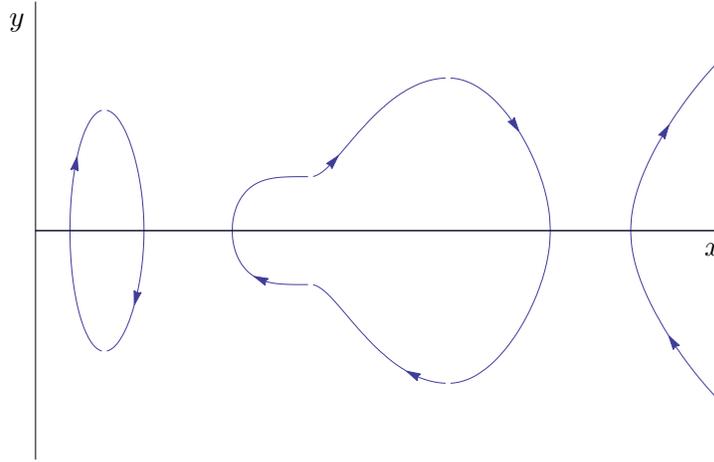


Figura 6.3: Curva di livello  $\Gamma_E$  corrispondente al valore di energia  $E$  della figura 6.2:  $\Gamma_E$  è costituita da tre componenti connesse, ciascuna delle quali rappresenta un'orbita.

distanza tra  $\gamma_E \cap K$  e  $\gamma_{E+\varepsilon} \cap K$  è di ordine  $\varepsilon$ , purché  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in modo che anche  $I_{E+s\varepsilon}$  non contenga punti di  $\mathcal{E}$  per  $s \in [0, 1]$ . Un esempio di orbita a cui si applica il teorema 28.7 è costituita dall'orbita a destra nella figura 6.3.

**Lemma 28.9** *Sia  $E \geq V_0$  e sia  $I \in \mathcal{I}_E$ . Se  $I = \{x_j\}$  per qualche  $1 \leq j \leq N$ , allora risulta  $x_j \in \mathcal{E}_m$  e la traiettoria corrispondente è tale che  $x(t) = x_j$  per ogni  $t$ , con  $\dot{x}(t) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Le condizioni  $V(x_j) = E$  e  $I = \{x_j\}$  implicano che  $V(x) > E$  per ogni  $x$  appartenente a un intorno sufficientemente piccolo di  $x_j$ . Possiamo quindi applicare il teorema 26.7, nel caso di un punto di minimo relativo isolato. ■

**Lemma 28.10** *Sia  $E > V_0$  e sia  $I \in \mathcal{I}_E$ . Se  $I = [x_j, x_{j+1}]$  per qualche  $1 \leq j \leq N - 1$ , con  $x_j < x_{j+1}$  tali che  $x_j, x_{j+1} \notin \mathcal{E}$ , allora l'orbita corrispondente nello spazio delle fasi*

- *interseca l'asse delle ascisse nei due punti  $x_j$  e  $x_{j+1}$ ,*
- *è il sostegno di una traiettoria periodica.*

*Dimostrazione.* La conservazione dell'energia implica che per  $x = x_j$  e per  $x = x_{j+1}$ , si ha  $V(x) = E$  e quindi  $\dot{x} = 0$ . La parte dell'orbita contenuta nel semipiano superiore, che collega i punti di  $\Gamma_E$  di ascisse  $x_j$  a  $x_{j+1}$ , è continua e limitata, poiché per  $x \in I$  la funzione  $V(x)$  è continua e limitata. L'orbita completa si ottiene per riflessione rispetto all'asse delle ascisse, per il lemma 28.4, ed è perciò un'orbita chiusa. I punti  $x_j$  e  $x_{j+1}$  sono punti di regolarità, come segue dal lemma 27.3, dato che, per ipotesi,  $x_j$  e  $x_{j+1}$  non sono punti critici di  $V$ .

Questo si può anche verificare esplicitamente notando che, esprimendo  $y = \dot{x}$  in funzione di  $x$ , i.e.  $y = Y(x) = \Phi(x)$  (cfr. la (26.8)), si ha

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2m(E - V(x))}} V'(x),$$

così che

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} \left| \frac{dY}{dx} \right| = \lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} \left| \frac{dY}{dx} \right| = +\infty.$$

Questo significa che l'angolo che la tangente alla curva  $Y(x)$ , in corrispondenza delle intersezioni dell'orbita con l'asse delle ascisse, forma con quest'ultimo è  $\pi/2$ .

Lungo l'orbita non ci sono punti di equilibrio; infatti i punti  $x_j$  e  $x_{j+1}$  non sono in  $\mathcal{E}$  per ipotesi e per tutti gli altri punti  $(x, \dot{x})$  dell'orbita si ha  $\dot{x} \neq 0$ , laddove i punti di equilibrio devono sempre giacere sull'asse delle ascisse (cfr. la proprietà 3 del lemma 28.4). Per il teorema 27.7 non possono esistere punti  $x_{\pm} \in I$  tali che  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = x_{\pm}$ . Ne segue che la traiettoria nello spazio delle fasi che parte da un punto qualsiasi  $(\bar{x}, \bar{v}) \in \Gamma_E$ ,  $\bar{x} \in I$ , deve ritornare nel punto di partenza dopo un tempo finito e, di conseguenza, per il teorema di unicità (teorema 11.27), è periodica. In particolare sarà periodica la traiettoria  $t \mapsto x(t)$ . ■

**Teorema 28.11** *Se  $E$  non è un valore critico di  $V$  e  $I \in \mathcal{I}_E$  è limitato, la componente connessa  $\gamma_E$  della curva di livello  $\Gamma_E$  che contiene i punti  $(x, \dot{x})$ , con  $x \in I$ , è un'orbita diffeomorfa a un cerchio. Se  $E = E_0 + \varepsilon^2$ , dove  $E_0 = V(x_0)$  e  $x_0 \in \mathcal{E}_m$  è tale che  $V''(x_0) \neq 0$ , allora per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo,  $\gamma_E$  differisce per infinitesimi  $o(\varepsilon)$  da un'ellisse con semiassi  $O(\varepsilon)$ .*

*Dimostrazione.* È una conseguenza del lemma 28.10. In particolare la soluzione, essendo periodica, verifica la relazione

$$x(t + T) = x(t), \quad T > 0,$$

dove  $T$  è il *periodo* del moto. Poiché  $V$  è di classe  $C^2$

$$t \in [0, T] \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$$

stabilisce un'applicazione invertibile di classe  $C^2$  (i.e. un diffeomorfismo) tra il cerchio di lunghezza  $T$  e l'orbita nello spazio delle fasi, che è una componente connessa  $\gamma_E$  di  $\Gamma_E$ .

Inoltre, se  $x_0 \in \mathcal{E}_m$  e  $V''(x_0) \neq 0$  (e quindi  $V''(x_0) > 0$ ), in corrispondenza di valori dell'energia  $E = E_0 + \varepsilon^2$ , per  $\varepsilon$  piccolo, l'orbita  $\gamma$  assume la forma

$$\frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}c(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) = \varepsilon^2, \quad c := V''(x_0), \quad (28.1)$$

dove  $c > 0$ . Pertanto  $\gamma_E$  differisce da un'ellisse di semiassi di ordine  $\varepsilon$  a meno di infinitesimi in  $\varepsilon$  di ordine superiore al primo. ■

**Osservazione 28.12** Le orbite  $\gamma_E$  del teorema 28.11 sono localmente rettificabili, per il teorema della scatola di flusso (teorema 20.4), non contenendo punti di equilibrio, e stabili, nel senso che le curve che si ottengono sostituendo  $E$  con  $E + \varepsilon$  sono tali che, per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^2$ , la distanza tra  $\gamma_E \cap K$  e  $\gamma_{E+\varepsilon} \cap K$  è di ordine  $\varepsilon$ , purché  $\varepsilon$  sia sufficientemente piccolo in modo che anche  $I_{E+s\varepsilon}$  non contenga punti di  $\mathcal{E}$  per  $s \in [0, 1]$ . L'orbita ha diametro che tende a zero per  $E \rightarrow E_0$ ; si noti che il punto  $x_0 \in \mathcal{E}_m$  è un punto di equilibrio stabile, per il teorema 19.22. Esempi di orbite a cui si applica il teorema 28.11 sono l'orbita a sinistra e l'orbita al centro nella figura 6.3.

**Definizione 28.13** (CUSPIDE) Sia  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva nel piano. Un punto  $\varphi(t_0)$ ,  $t_0 \in J$ , si dice cuspidale se  $\dot{\varphi}(t)$  è definito per ogni  $t \neq t_0$  in un intorno di  $t_0$  e

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \dot{\varphi}(t) = - \lim_{t \rightarrow t_0^-} \dot{\varphi}(t) \neq 0.$$

i.e. se il vettore tangente cambia segno attraversando il punto  $\varphi(t_0)$  lungo la curva.

**Lemma 28.14** Sia  $V$  una funzione di classe  $C^3$ . Sia  $E > V_0$  e sia  $I \in \mathcal{I}_E$ , con  $I = [x_j, x_{j+1}]$  per qualche  $1 \leq j \leq N - 1$ .

1. Se  $x_j \notin \mathcal{E}$  e  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$  tale che  $V'''(x_{j+1}) \neq 0$ , allora ci sono due orbite corrispondenti nello spazio delle fasi: una interseca l'asse delle ascisse nel punto  $x_j$  ed è il sostegno di una traiettoria  $(x(t), y(t))$ , con  $x(t)$  asintotica a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ , per ogni dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{v}) \in \Gamma_E$ , con  $\bar{x} \in [x_j, x_{j+1}]$ ; l'altra è costituita dall'unico punto  $(x_{j+1}, 0)$  e la corrispondente traiettoria è tale che  $x(t) = x_{j+1} \forall t \in \mathbb{R}$ . La componente connessa  $\gamma_E$  della curva di livello  $\Gamma_E$  che contiene le due orbite ha una cuspidale nel punto  $(x_{j+1}, 0)$ .
2. Se  $x_{j+1} \notin \mathcal{E}$  e  $x_j \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$  tale che  $V'''(x_j) \neq 0$ , valgono simili considerazioni, con il ruolo dei due punti scambiato.
3. Se  $x_j, x_{j+1} \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$ , con  $V'''(x_j), V'''(x_{j+1}) \neq 0$ , si hanno quattro orbite: una è il sostegno di una traiettoria  $(x(t), y(t))$ , con  $x(t)$  asintotica a  $x_j$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow +\infty$ ; un'altra è il sostegno di una traiettoria  $(x(t), y(t))$ , con  $x(t)$  asintotica a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $x_j$  per  $t \rightarrow +\infty$ ; le restanti due sono i punti di equilibrio  $(x_j, 0)$  e  $(x_{j+1}, 0)$ .

*Dimostrazione.* Discutiamo esplicitamente il caso 1 (i casi 2 e 3 si discutono in modo analogo). Poiché  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M^0$ , si ha  $V'(x_{j+1}) = V''(x_{j+1}) = 0$  e quindi, in un intorno sinistro di  $x_{j+1}$ , risulta

$$V(x) = V(x_{j+1}) + \frac{1}{3!}c(x - x_{j+1})^3 + o((x - x_{j+1})^3), \quad c := V'''(x_{j+1}),$$

dove  $c > 0$ , dato che  $c \neq 0$  e  $V(x) < E$  per  $x \in [x_j, x_{j+1}]$ .

Pertanto, per  $x \in [x_j, x_{j+1}]$  sufficientemente vicino a  $x_{j+1}$ , l'equazione della curva di livello  $\Gamma_E$  è data da

$$\frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{6}c(x - x_{j+1})^3 + o((x - x_{j+1})^3) = 0, \quad (28.2)$$

così che, in un intorno sinistro di  $x_{j+1}$  si ha

$$y = \pm \sqrt{\frac{c}{3m}} (x_{j+1} - x)^{3/2} + o((x_{j+1} - x)^{3/2}), \quad (28.3)$$

che mostra l'esistenza di una cuspidi in  $(x_{j+1}, 0)$  (cfr. l'esercizio 7). Il fatto che la traiettoria  $x(t)$  sia asintotica, sia per  $t \rightarrow +\infty$  che per  $t \rightarrow -\infty$ , segue dal corollario 13.13 (corollario del teorema del prolungamento), tenuto conto che le traiettorie  $t \rightarrow (x(t), \dot{x}(t))$  hanno luogo in una regione limitata e devono quindi essere definite per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . ■

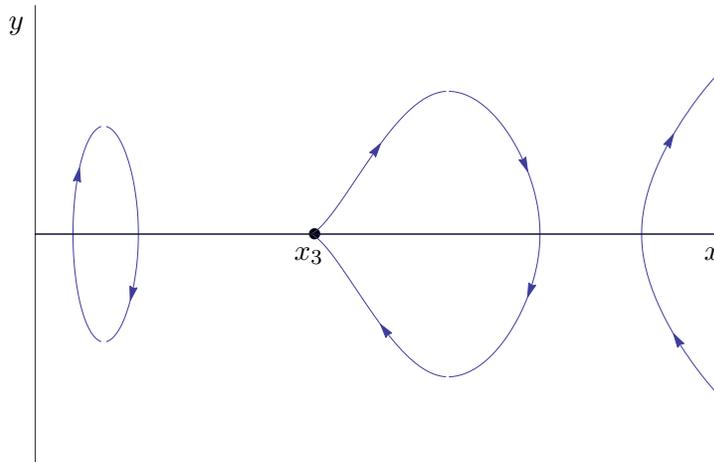


Figura 6.4: Curva di livello  $\Gamma_{E_3}$  corrispondente al valore di energia  $E_3 = V(x_3)$ , con  $V$  dato dalla figura 6.1, dove  $x_3 \in \mathcal{E}_* \setminus \mathcal{E}_M$  è un punto di flesso orizzontale. Si hanno quattro orbite, che corrispondono a: un moto periodico, un punto di equilibrio, un moto limitato asintotico e un moto illimitato asintotico.

**Osservazione 28.15** Se  $V$  è di classe  $C^k$ ,  $c = V'''(x_{j+1}) = 0$  e la prima derivata non nulla in  $x_{j+1}$  è la derivata di ordine  $p$ , con  $3 < p \leq k$ , si ha ancora un risultato analogo al lemma 28.14. Infatti, in un intorno di  $x_{j+1}$ , varrà un'espressione della forma (28.3), con l'esponente  $3/2$  sostituito da  $p/2$ , e si avrà ancora una cuspidi. Analoghe considerazioni valgono per  $x_j$ .

**Osservazione 28.16** L'orbita del lemma 28.14 è topologicamente equivalente (ovvero omeomorfa) alle orbite vicine, cioè corrispondenti a valori di energia sufficientemente vicini a  $E$ , ma non è a esse diffeomorfa, essendo il punto  $(x_{j+1}, 0)$  una cuspidi per  $\Gamma_E$ . Un esempio a cui si applicano i risultati del lemma 28.14 è dato dall'orbita al centro nella figura 6.4; si noti in particolare la cuspidi nel punto  $(x_3, 0)$ .

**Lemma 28.17** Sia  $E > V_0$  e sia  $I = [x_j, x_{j+1}] \in \mathcal{I}_E$ .

1. Se  $x_j \in \mathcal{E}_M^0$  e  $x_{j+1} \notin \mathcal{E}$ , allora il punto  $x_j$  corrisponde al punto di equilibrio instabile  $(x_j, 0)$  per il sistema dinamico (26.4), mentre i dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v}) \in \Gamma_E$  con  $\bar{x} \in (x_j, x_{j+1}]$  danno origine a traiettorie  $(x(t), y(t))$ , con  $x(t)$  asintotica a  $x_j$  per  $t \rightarrow \pm\infty$ . La componente connessa  $\gamma_E$  della curva di livello  $\Gamma_E$  che contiene le due orbite ha tangenza obliqua in  $x_j$ .
2. Se invece  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_M^0$  e  $x_j \notin \mathcal{E}$ , valgono analoghi risultati, con il ruolo dei due punti scambiato.
3. Se infine  $x_j, x_{j+1}$  appartengono entrambi a  $\mathcal{E}_M^0$ , allora  $(x_j, 0)$  e  $(x_{j+1}, 0)$  sono punti di equilibrio instabili; le traiettorie  $(x(t), y(t))$  che si originano da  $(\bar{x}, \bar{v}) \in \Gamma_E$ , con  $\bar{x} \in (x_j, x_{j+1})$ , sono tali che  $x(t)$  è asintotica a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow \infty$  e a  $x_j$  per  $t \rightarrow -\infty$ , se  $\bar{v} > 0$ , ed è invece asintotica a  $x_j$  per  $t \rightarrow \infty$  e a  $x_{j+1}$  per  $t \rightarrow -\infty$ , se  $\bar{v} < 0$ .

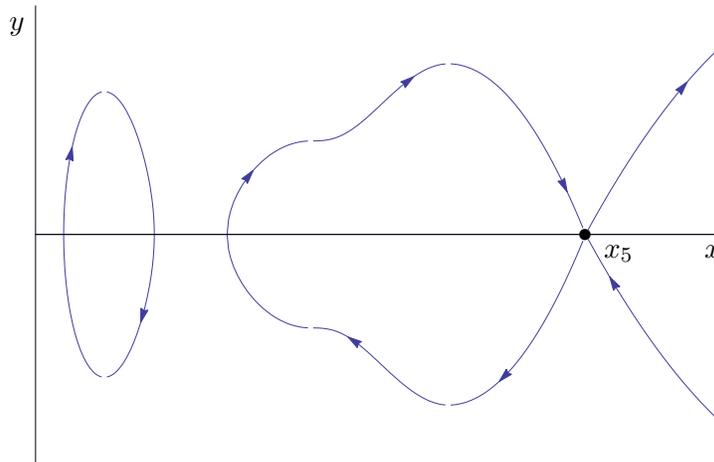


Figura 6.5: Curva di livello  $\Gamma_{E_5}$  corrispondente al valore di energia  $E_5 = V(x_5)$ , con  $V$  dato dalla figura 6.1, dove  $x_5 \in \mathcal{E}_M^0$  è un punto di massimo. Si hanno cinque orbite, che corrispondono a: un moto periodico, un moto limitato asintotico, un punto di equilibrio e due moti illimitati asintotici.

*Dimostrazione.* Se  $x_j \in \mathcal{E}_M^0$ , le curve di livello, in un intorno destro di  $x_j$ , assumono la forma

$$y = \pm \sqrt{\frac{c}{m}} |x - x_j| + o(x - x_j), \quad c := |V''(x_0)|. \quad (28.4)$$

Questo si vede facilmente procedendo come nella dimostrazione del lemma 28.14. Analoghe considerazioni valgono se  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_M^0$ , considerando un intorno sinistro di  $x_{j+1}$ . Ovviamente se un intervallo  $[x_j, x_{j+1}]$  è tale che il suo estremo sinistro  $x_j$  è in  $\mathcal{E}_M^0$ , esiste allora un intervallo contiguo  $[x_{j-1}, x_j]$  (oppure  $(-\infty, x_j]$ ,  $j = 1$ ) il cui estremo destro è in  $\mathcal{E}_M^0$ . Quindi esiste

un intorno di  $x_j$  in cui le curve di livello assumono la forma (28.4). Similmente si ragiona se  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_M^0$ . Come nella dimostrazione del lemma 28.14, il corollario 13.13 implica che le traiettorie  $x(t)$  sono asintotiche a  $x_{j+1}$  se  $\bar{v} > 0$  e a  $x_j$  se  $\bar{v} < 0$ . ■

**Osservazione 28.18** Un punto  $x_j$  in  $\mathcal{E}_M^0$  corrisponde a un punto di equilibrio instabile  $(x_j, 0)$  per il sistema dinamico corrispondente (26.4). Infatti, dalla forma delle curve di livello contenente  $(x_j, 0)$  e dalla proprietà 2 del lemma 28.4, concludiamo che esistono direzioni lungo cui ci si allontana e direzioni lungo cui ci si avvicina a  $(x_j, 0)$  – che corrispondono, rispettivamente, ad autovalori positivi e negativi della matrice del sistema linearizzato (cfr. l'esercizio 8).

**Osservazione 28.19** Esempi di curve a cui si applica il lemma 28.17 sono la curva a destra della figura 6.5 e la curva della figura 6.6.

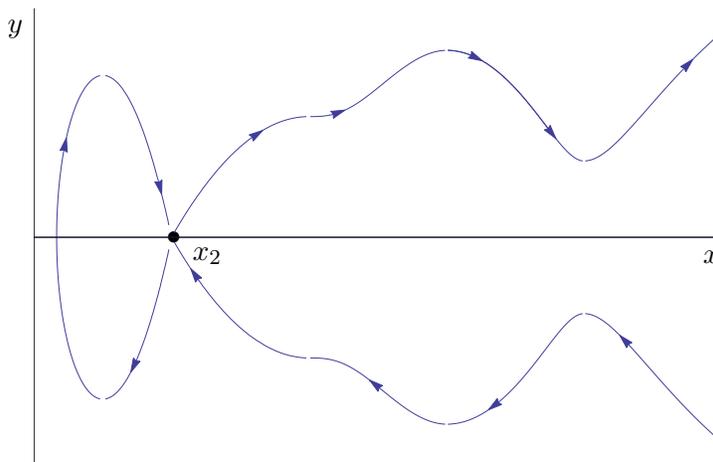


Figura 6.6: Curva di livello  $\Gamma_{E_2}$  corrispondente al valore di energia  $E_2 = V(x_2)$ , con  $V$  dato dalla figura 6.1, dove  $x_2 \in \mathcal{E}_M^0$  è un punto di massimo. Si hanno quattro orbite, che corrispondono a: un moto limitato asintotico, un punto di equilibrio e due moti illimitati asintotici.

**Lemma 28.20** Sia  $E > V_0$  e sia  $I = [x_N, \infty) \in \mathcal{I}_E$ . Se  $x_N \in \mathcal{E}_*$ , allora il punto  $x_j$  corrisponde a un punto di equilibrio instabile  $(x, \dot{x}) = (x_N, 0)$  per il sistema dinamico (26.4), mentre i dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v}) \in \Gamma_E$  con  $\bar{x} \in (x_N, \infty)$  generano traiettorie  $(x(t), y(t))$  tali che  $x(t)$  è asintotica a  $x_N$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $+\infty$  per  $t \rightarrow \infty$ , se  $\bar{v} > 0$ , ed è asintotica a  $+\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$  e a  $x_N$  per  $t \rightarrow \infty$ , se  $\bar{v} < 0$ . Analoghi risultati valgono se invece  $I = (-\infty, x_1]$ , con  $x_1 \in \mathcal{E}_*$ .

*Dimostrazione.* Segue dall'analisi effettuata per dimostrare i lemmi 28.5, 28.6 e 28.17. ■

**Definizione 28.21** (TRAIETTORIE OMOCLINE ED ETEROCLINE) Una traiettoria  $x(t)$  si dice omoclina se, per  $t \rightarrow \pm\infty$ , è asintotica allo stesso punto. Una traiettoria  $x(t)$  si dice eteroclina se è asintotica a due punti diversi per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ .

**Definizione 28.22** (SEPARATRICI) *Le componenti connesse di una curva di livello che sono orbite di traiettorie  $(x(t), y(t))$ , con  $x(t)$  asintotica a punti di equilibrio instabili, prendono il nome di separatrici.*

**Osservazione 28.23** Orbite corrispondenti a traiettorie omocline ed eterocline sono rappresentate nella figura 6.7. Un esempio di traiettoria omocline si è incontrato quando si è studiato il pendolo (cfr. il §24). La curva di livello che corrisponde al valore di energia  $E = 2$  (cfr. il §24.3) contiene il punto di equilibrio  $(\pi, 0)$  e le due orbite che uniscono il punto  $(\pi, 0)$  con se stesso (ricordiamo che  $(-\pi, 0)$  si identifica con  $(\pi, 0)$  per le condizioni periodiche al contorno). Tali orbite costituiscono i due rami della *separatrice del pendolo*. Le traiettorie  $x(t)$  tali che  $(x(t), y(t))$  hanno come orbite tali rami sono traiettorie omocline.

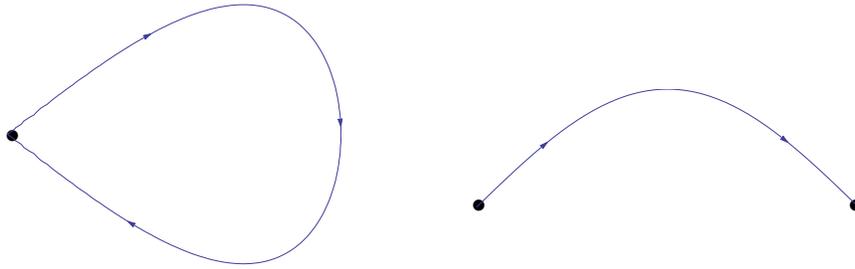


Figura 6.7: Esempi di traiettorie omocline ed eterocline.

**Teorema 28.24** *Se  $I = [x_j, x_{j+1}]$  con  $x_{j+1} \in \mathcal{E}_* = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_m$  e  $x_j \notin \mathcal{E}$ , allora la traiettoria  $(x(t), y(t))$  con dati iniziali  $(x_0, v_0) \in \Gamma_E$ , dove  $x_0 \in I \setminus \{x_{j+1}\}$ , è tale che  $x(t)$  è una traiettoria omocline. Analogamente, se  $x_j \in \mathcal{E}_*$  e  $x_{j+1} \notin \mathcal{E}$ , allora la traiettoria  $(x(t), y(t))$  con dati iniziali  $(x_0, v_0) \in \Gamma_E$ , dove  $x_0 \in I \setminus \{x_j\}$ , è tale che  $x(t)$  è una traiettoria omocline.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue immediatamente dai lemmi 28.14, 28.17 e 28.20. ■

**Teorema 28.25** *Se  $I = [x_j, x_{j+1}]$  con  $x_j, x_{j+1} \in \mathcal{E}_* = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_m$ , allora la traiettoria  $x(t)$  con dati iniziali  $(x_0, v_0) \in \Gamma_E$ , dove  $x_0 \in I \setminus \{x_j, x_{j+1}\}$ , è eterocline.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue immediatamente dai lemmi 28.14 e 28.17. ■

**Corollario 28.26** *Dato il sistema meccanico (26.2) e fissata l'energia  $E$ , una componente connessa compatta  $\gamma$  della curva di livello  $\Gamma_E$  è percorsa da una traiettoria periodica se e solo se  $\gamma$  non contiene punti di equilibrio. Le intersezioni di  $\gamma$  con l'asse  $\dot{x} = 0$  sono punti di inversione del moto.*

*Dimostrazione.* Segue dall'analisi precedente. ■

## §29 Periodi e tempi di percorrenza delle orbite

Nel presente paragrafo vogliamo mostrare che è sempre possibile scrivere il tempo di percorrenza di un arco di curva di livello non contenente punti di equilibrio come integrale definito o, al più, come somma di integrali definiti. In particolare si potrà scrivere sempre come integrale definito il periodo di una qualsiasi traiettoria periodica.

Per poter determinare il valore numerico del tempo di percorrenza (in particolare del periodo di una traiettoria periodica) occorrerà naturalmente calcolare l'integrale. Non è detto che questo sia possibile analiticamente: non necessariamente infatti la funzione integranda rientra nella classe delle funzioni di cui si riesce a calcolare l'integrale in termini di funzioni elementari. In principio, si può sempre cercare di calcolare l'integrale numericamente. A volte può essere utile, però, avere semplicemente una stima del valore numerico del periodo, senza calcolarne il valore esatto. Vedremo nel prossimo paragrafo un metodo per stimare i periodi delle traiettorie periodiche.

Consideriamo il sistema (26.2), con energia fissata a un valore  $E$ . Sia  $\Gamma_E$  la corrispondente curva di livello e siano  $P_1 = (x_1, v_1)$  e  $P_2 = (x_2, v_2)$  due punti appartenenti alla stessa componente connessa di  $\Gamma_E$ . Indichiamo con  $\gamma$  l'arco (o un arco) di curva in  $\Gamma_E$  che connette  $P_1$  con  $P_2$  e supponiamo che  $\gamma$  non contenga punti di equilibrio. Il *tempo di percorrenza*  $\tau$  di  $\gamma$  da  $P_1$  a  $P_2$  è, in valore assoluto, il tempo  $\tau(P_1, P_2)$  necessario per muoversi lungo  $\gamma$  da  $P_1$  a  $P_2$ .

Se  $x_1 < x_2$  e  $v_1, v_2 > 0$ , allora  $\gamma$  non interseca l'asse delle ascisse e quindi, *a fortiori*, non contiene punti di equilibrio. La (26.8) dà

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}, \quad (29.1)$$

dove il dato iniziale  $v_1 > 0$  fissa il segno  $+$ . Il verso di percorrenza è da sinistra verso destra, per la proprietà 2 del lemma 28.4 (cfr. la figura 6.8).

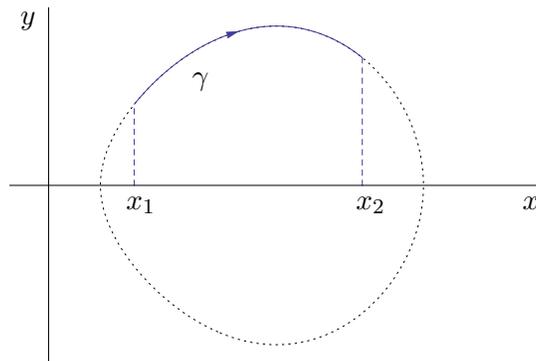


Figura 6.8: Arco di curva  $\gamma$  che connette due punti nel semipiano superiore appartenenti alla stessa curva di livello  $\Gamma_E$ ; la curva tratteggiata rappresenta la componente connessa di  $\Gamma_E$  contenente  $\gamma$ .

Dalla (29.1) si ottiene immediatamente, per separazione di variabili,

$$\tau(P_1, P_2) := \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (29.2)$$

Se  $x_1 > x_2$  e  $v_1, v_2 < 0$ , il tempo di percorrenza  $\tau$  è dato ancora dalla (29.2) in quanto i due estremi di integrazione sono invertiti e, nel contempo, in (29.1) il segno è  $-$ . In tal caso il verso di percorrenza è da destra a sinistra.

In generale, purché il segno di  $\dot{x}(t)$  si mantenga costante durante la traiettoria (i.e. la parte di  $\gamma$  compresa tra  $P_1$  e  $P_2$  non intersechi l'asse delle ascisse), il tempo necessario perché il sistema si muova dal punto  $P_1$  al punto  $P_2$  è dato da

$$\tau(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right|, \quad (29.3)$$

dove il modulo permette di ignorare se  $x_1 < x_2$  o  $x_1 > x_2$ .

Supponiamo ora che, al contrario,  $\gamma$  intersechi l'asse delle ascisse. Sia  $P_0 = (x_0, v_0)$  tale punto (o uno di tali punti, se ce ne sono più di uno). Sono possibili due casi:  $P_0$  può essere o non essere un punto di equilibrio.

**Lemma 29.1** *Sia  $\Gamma_E$  una curva di livello del sistema (26.4) e sia  $P_0 = (x_0, 0) \in \Gamma_E$  un punto di equilibrio. Sia  $P_1 \in \Gamma_E$  tale che*

- $P_1 = (x_1, v_1)$ , con  $x_1 \neq x_0$  e  $v_1 \neq 0$ ,
- $P_1$  giace sulla stessa componente connessa  $\gamma$  di  $\Gamma_E$  che contiene  $P_0$ ,
- non vi è alcun altro punto di equilibrio lungo  $\gamma$  tra  $P_0$  e  $P_1$ .

Allora la traiettoria che parte da  $P_1$  tende a  $P_0$  per  $t \rightarrow +\infty$  (se  $x_1 < x_0$  e  $v_1 > 0$  oppure se  $x_1 > x_0$  e  $v_1 < 0$ ) o per  $t \rightarrow -\infty$  (se  $x_1 < x_0$  e  $v_1 < 0$  oppure se  $x_1 > x_0$  e  $v_1 > 0$ )

*Dimostrazione.* Il lemma 29.1 è implicato dalla discussione del §28 – in particolare dai lemmi 28.14, 28.17 e 28.20. Qui diamo una dimostrazione alternativa usando l'espressione (29.3) del tempo di percorrenza.

Consideriamo il caso  $x_1 < x_0$  (il caso  $x_1 > x_0$  si discute allo stesso modo). Supponiamo per il momento che sia  $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$ . Poiché, nelle vicinanze del punto  $P_0$ , che deve essere un punto di equilibrio instabile, le curve di livello assumono la forma (28.4), l'integrale

$$\tau(P_1, P_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right| \quad (29.4)$$

è divergente comunque sia scelto il punto iniziale, come è facile verificare utilizzando il *criterio del confronto per la convergenza degli integrali* (cfr. la nota bibliografica). Infatti, utilizziamo l'additività degli integrali per scrivere l'integrale in (29.4) come somma di due integrali, i.e.

$$\tau(P_1, P_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \right|. \quad (29.5)$$

dove  $\varepsilon$  è tale (cfr. la (28.4))

$$\begin{aligned} E - V(x) &\leq |c| (x - x_0)^2 & \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0], \\ E - V(x) &\geq E - V(x_0 - \varepsilon) & \forall x \in [x_1, x_0 - \varepsilon], \end{aligned}$$

dove  $c = V''(x_0)$ . Quindi, in (29.5), possiamo stimare

$$\left| \int_{x_1}^{x_0-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \right| \leq \frac{|x_0 - \varepsilon - x_1|}{\min_{x \in [x_1, x_0-\varepsilon]} \sqrt{E-V(x-\varepsilon)}} \leq \frac{|x_0 - \varepsilon - x_1|}{\sqrt{E-V(x_0-\varepsilon)}} < +\infty, \quad (29.6a)$$

$$\left| \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \right| \geq \sqrt{\frac{1}{c}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{|x - x_0|}, \quad (29.6b)$$

dove l'ultimo integrale diverge. In particolare se  $v_1 > 0$  (cfr. la figura 6.9) la traiettoria si muove verso  $P_0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , se invece  $v_1 < 0$  la traiettoria si muove verso  $P_0$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

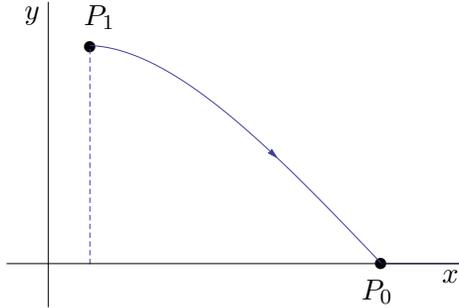


Figura 6.9: Discussione del lemma 29.1 nel caso  $x_1 < x_0$  e  $v_1 > 0$ .

Se  $x_0 \notin \mathcal{E}_M^0$  allora in luogo della (28.4) si utilizza la (28.3), con  $3/2$  sostituito da  $p/2$  per qualche  $p > 3$  (cfr. l'osservazione 28.15), e valgono le stesse conclusioni. ■

**Lemma 29.2** Sia  $\Gamma_E$  una curva di livello del sistema (26.4) e sia  $P_0 = (x_0, 0)$  un punto di  $\Gamma_E$  sull'asse delle ascisse che non è un punto di equilibrio. Sia  $P_1 \in \Gamma_E$  tale che

- $P_1 = (x_1, v_1)$ , con  $x_1 \neq x_0$  e  $v_1 \neq 0$ ,
- $P_1$  giace sulla stessa componente connessa  $\gamma$  di  $\Gamma_E$  che contiene  $P_0$ ,
- non vi è alcun punto di equilibrio lungo  $\gamma$  tra  $P_0$  e  $P_1$ .

Allora la traiettoria che parte da  $P_1$  raggiunge  $P_0$  in un tempo finito.

*Dimostrazione.* Come per il lemma 29.1, anche il lemma 29.2 è stato già dimostrato nel §28. Qui diamo una dimostrazione alternativa, usando la (29.3) e ottenendo un'espressione esplicita del tempo di percorrenza (cfr. la figura 6.10).

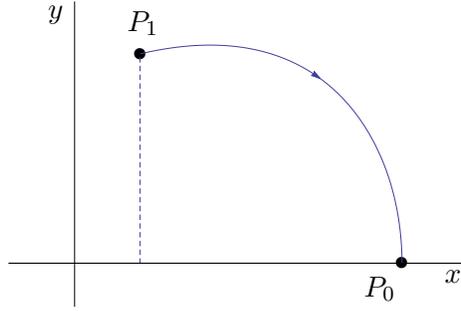


Figura 6.10: Discussione del lemma 29.2 nel caso  $x_1 < x_0$  e  $v_1 > 0$ .

Poiché  $V'(x_0) \neq 0$ , l'integrale che esprime il tempo di percorrenza, i.e.

$$\tau(P_1, P_0) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left| \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right|,$$

è convergente. Questo si può vedere ragionando come nella dimostrazione del lemma 29.1. Si scrive l'integrale come somma di due integrali, di cui uno è finito perché il denominatore non si annulla mai (cfr. la (29.6a)) e l'altro è un integrale improprio che, a differenza di quanto accade in (29.6b), converge, come è facile vedere sempre utilizzando il criterio del confronto per la convergenza degli integrali. Infatti per  $|x - x_0| < \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, si ha  $|V(x) - V(x_0)| \geq c|x - x_0|/4$ , con  $c = |V'(x_0)| \neq 0$ , e quindi

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \leq \sqrt{\frac{4}{c}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{|x - x_0|}} < +\infty, \tag{29.7}$$

così che  $\tau(P_1, P_0) < +\infty$ . ■

**Corollario 29.3** *Siano  $P_1 = (x_1, v_1)$  e  $P_2 = (x_2, v_2)$  due punti di  $\Gamma_E$  che giacciono sulla stessa componente connessa e tali che  $v_1 v_2 < 0$ . Sia  $\gamma$  un arco di curva in  $\Gamma_E$  compreso tra  $P_1$  e  $P_2$ . Allora valgono i seguenti risultati:*

1. se  $\gamma$  contiene punti di equilibrio, non esistono traiettorie, nello spazio delle fasi, che colleghino i due punti lungo  $\gamma$ ;
2. se invece  $\gamma$  non contiene punti di equilibrio, il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è finito ed è

$$\tau(P_1, P_2) = \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \left| \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right| + \left| \int_{x_2}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \right| \right),$$

dove  $x_0$ , tale che  $P_0 = (x_0, 0) \in \gamma$ , è l'unico punto d'intersezione di  $\gamma$  con l'asse  $\dot{x} = 0$ .

*Dimostrazione.* Se  $\gamma$  contiene punti di equilibrio, questi devono giacere sull'asse delle ascisse; il tempo che impiegherà la traiettoria per raggiungere uno di essi partendo da  $P_1$  è infinito per il lemma 29.1. Quindi la traiettoria non raggiungerà  $P_2$ .

Se  $\gamma$  non contiene punti di equilibrio, allora deve attraversare l'asse delle ascisse in un solo punto, che chiameremo  $P_0$ . Infatti, se  $\gamma$  intersecasse l'asse delle ascisse una seconda volta, la traiettoria che parte da  $P_1$  dovrebbe tornare nel semipiano di partenza e l'orbita corrispondente dovrebbe essere chiusa in quanto simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  (per il lemma 28.4); quindi  $P_2$  dovrebbe essere interno a  $\gamma$  contro l'ipotesi che ne fosse un estremo. Basta allora applicare il lemma 29.2 e la (29.3), dopo aver diviso  $\gamma$  in due tratti, che connettono, rispettivamente,  $P_1$  a  $P_0$  e  $P_0$  a  $P_2$ . ■

**Osservazione 29.4** Dati due punti  $P_1$  e  $P_2$  appartenenti alla stessa componente connessa di  $\Gamma_E$ , può succedere che esistano due archi di curva  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  che li colleghino. Questo può succedere per esempio se  $P_1$  e  $P_2$  appartengono all'orbita percorsa da una traiettoria periodica; in tal caso l'enunciato 2 del corollario 29.3 si applica sia a  $\gamma_1$  sia a  $\gamma_2$ . Un'altra possibilità è che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  intersechino l'asse delle ascisse, rispettivamente, in un punto di inversione  $x_1$  e in un punto  $x_2 \in \mathcal{E}_M$  (o in generale  $x_2 \in \mathcal{E}_*$ ); in tal caso l'enunciato 1 del corollario 29.3 si applica a  $\gamma_2$ , mentre l'enunciato 2 si applica a  $\gamma_1$ .

**Lemma 29.5** *Sia  $E$  tale che  $\Gamma_E$  contiene una componente connessa chiusa  $\gamma$  priva di punti di equilibrio. Allora il moto su  $\gamma$  è periodico e il periodo è dato da*

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}},$$

dove  $x_-$  e  $x_+$  sono le due radici dell'equazione  $E - V(x) = 0$  (e sono tali che  $(x_{\pm}, 0) \in \gamma$ ).

*Dimostrazione.* Dividiamo  $\gamma$  in due archi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , che connettono  $(x_-, 0)$  a  $(x_+, 0)$  nel semipiano superiore e, rispettivamente, nel semipiano inferiore dello spazio delle fasi. Allora il tempo di percorrenza di  $\gamma$  è dato (tenuto conto dei segni e dell'osservazione 26.4) da

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_+}^{x_-} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (29.8)$$

I due integrali in (29.8) sono opposti, così che segue immediatamente l'asserto. ■

**Teorema 29.6** *Sia  $(x_0, 0)$  un punto di equilibrio stabile per il sistema (26.4), con  $V$  di classe  $C^2$  tale che  $V''(x_0) > 0$ . Se  $T(\varepsilon)$  il periodo del moto corrispondente a energia  $E(\varepsilon) = V(x_0) + \varepsilon^2$ , si ha*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0 := 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad k = V''(x_0), \quad (29.9)$$

dove  $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$  è il periodo dell'oscillatore armonico di massa  $m$  e costante elastica  $k$ .

*Dimostrazione.* Scriviamo  $E_0 := V(x_0)$ . Il moto corrispondente all'energia  $E(\varepsilon) := E_0 + \varepsilon^2$  si svolge su un'orbita chiusa non contenente punti di equilibrio, per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo, poiché la funzione  $V$  ha per ipotesi un punto di minimo isolato in  $x_0$  (cfr. il teorema 28.11). Quindi il moto è periodico e, per il lemma 29.5, il periodo è dato da

$$T(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-(\varepsilon)}^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{(E(\varepsilon) - V(x))}}, \quad (29.10)$$

dove  $x_{\pm}(\varepsilon)$  sono le due soluzioni dell'equazione  $E_0 + \varepsilon^2 - V(x) = 0$  (vicine a  $x_0$  entro  $\varepsilon$ , di nuovo per il teorema 28.11).

Poiché  $V$  è di classe  $C^2$  si può sviluppare nell'intorno del punto  $x_0$  e si ottiene

$$V(x) = E_0 + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + R(x; x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x; x_0)}{(x - x_0)^2} = 0,$$

dove  $k = V''(x_0)$  e  $R(x; x_0)$  è una funzione di classe  $C^2$  (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3).

Riscriviamo il periodo (29.10) come  $T(\varepsilon) = T_+(\varepsilon) + T_-(\varepsilon)$ , dove

$$T_+(\varepsilon) := 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x_+(\varepsilon)} \frac{dx}{\sqrt{E(\varepsilon) - V(x)}}, \quad T_-(\varepsilon) := 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_-(\varepsilon)}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E(\varepsilon) - V(x)}},$$

Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_+(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_-(\varepsilon) = \frac{T_0}{2}, \quad (29.11)$$

con  $T_0$  definito in (29.9). Studiamo esplicitamente  $T_+(\varepsilon)$  (il secondo limite si studia in maniera analoga). Scriviamo  $r(x; x_0) = 2R(x; x_0)/k$  e introduciamo il cambiamento di coordinate

$$x \mapsto y = \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) \sqrt{1 + \frac{r(x; x_0)}{(x - x_0)^2}}. \quad (29.12)$$

tale che, in termini della nuova coordinata, si ha  $E(\varepsilon) - V(x) = \varepsilon^2(y^2 - 1)$ . Inoltre si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{2}} \left( \sqrt{1 + \frac{r(x; x_0)}{(x - x_0)^2}} + \frac{\frac{1}{2} \frac{r'(x; x_0)}{x - x_0} - \frac{r(x; x_0)}{(x - x_0)^2}}{\sqrt{1 + \frac{r(x; x_0)}{(x - x_0)^2}}} \right). \quad (29.13)$$

Il cambiamento di coordinate (29.12) è ben posto per  $\varepsilon$  piccolo; infatti si ha (cfr. l'esercizio 4)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x; x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r'(x; x_0)}{x - x_0} = 0,$$

così che possiamo concludere che esiste una costante positiva  $K_\varepsilon$  tale che

$$\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{2}} (1 - K_\varepsilon) \leq \left| \frac{dy}{dx} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{k}{2}} (1 + K_\varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_\varepsilon = 0. \quad (29.14)$$

Si può quindi calcolare il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  di  $T_+(\varepsilon)$  e si trova (cfr. l'esercizio 9)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_+(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin y \Big|_0^1 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (29.15)$$

da cui segue il primo limite in (29.11). ■

### §30 Stime di periodi

Come detto all'inizio del §29, nel presente paragrafo ci occupiamo del problema di stimare il periodo di una traiettoria periodica, utilizzando i risultati trovati al paragrafo precedente, più precisamente il fatto che è sempre possibile rappresentare il periodo come integrale definito.

Supponiamo dunque di avere un'orbita chiusa  $\gamma$  percorsa da una traiettoria periodica. Sia  $E$  il valore di energia che compete alla traiettoria e siano  $x_-$  e  $x_+ > x_-$  le intersezioni dell'orbita  $\gamma$  con l'asse delle ascisse, i.e. i valori di  $x$  tali che  $E - V(x) = 0$  (cfr. la figura 6.11). Tali intersezioni esistono necessariamente, a meno che  $x$  non sia un angolo, come nel caso del pendolo discusso nel §24 (cfr. l'osservazione 30.4 più avanti). Il periodo della traiettoria è dato dal lemma 29.5 ed è quindi

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E - V(x))}}. \quad (30.1)$$

Possiamo allora scrivere

$$E - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\Phi(x), \quad (30.2)$$

dove  $\Phi$  è una funzione di classe  $C^2$  (se  $V$  è di classe  $C^2$ ) e positiva per  $x \in [x_-, x_+]$ .

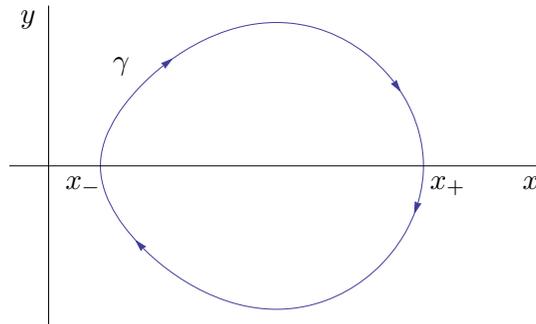


Figura 6.11: Orbita chiusa corrispondente a una traiettoria periodica.

**Proposizione 30.1** Sia  $\gamma$  un'orbita chiusa e siano  $x_-$  e  $x_+$  le sue intersezioni con l'asse delle ascisse. Se esistono due costanti positive  $C_1$  e  $C_2$  tali che

$$C_1 \leq \Phi(x) \leq C_2 \quad \forall x \in [x_-, x_+], \quad (30.3)$$

dove  $\Phi(x)$  è definito in (30.2), allora si ha

$$T_1 \leq T \leq T_2, \quad T_1 = \sqrt{\frac{2m\pi^2}{C_2}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{2m\pi^2}{C_1}}. \quad (30.4)$$

dove  $T$  è il periodo (30.1) della traiettoria che ha  $\gamma$  come orbita.

*Dimostrazione.* Se valgono le stime (30.3) e definiamo

$$T_1 := \sqrt{\frac{2m}{C_2}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_-)(x_+-x)}}, \quad T_2 := \sqrt{\frac{2m}{C_1}} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_-)(x_+-x)}} = T_2, \quad (30.5)$$

possiamo scrivere

$$T_1 \leq \sqrt{2m} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(E-V(x))}} \leq T_2. \quad (30.6)$$

È immediato verificare che si ha

$$I(x_-, x_+) = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x-x_-)(x_+-x)}} = \pi. \quad (30.7)$$

Infatti, operando la sostituzione

$$z = \frac{x-x_-}{x_+-x_-},$$

l'integrale  $I(x_-, x_+)$  diventa

$$I(x_-, x_+) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = I, \quad (30.8)$$

che mostra innanzitutto che non c'è dipendenza da  $x_-, x_+$ ; con la sostituzione  $z = \sin^2 \theta$ , con  $\theta \in [0, \pi/2]$ , si verifica subito che l'integrale in (30.8) vale  $I = \pi$ : questo implica la (30.6). Dalle (30.5) e (30.6) segue immediatamente la (30.4). ■

**Osservazione 30.2** In generale ci si può porre il problema di stimare il periodo di una traiettoria periodica entro una qualsiasi precisione prefissata. In formule, questo vuol dire che, fissato  $\varepsilon > 0$ , si vogliono trovare due valori  $T_1$  e  $T_2$  tali che  $T_1 \leq T \leq T_2$ , con  $\max\{T - T_1, T_2 - T\} \leq \varepsilon$ . La proposizione 30.1 fornisce una stima abbastanza grossolana del periodo, ma non consente di stimare il periodo entro una precisione arbitraria. Per far questo occorrerebbe un'analisi più raffinata di quella svolta sopra.

**Esempio 30.3** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3).$$

Si verifichi che la traiettoria con condizioni iniziali  $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$  è periodica. Si scriva il periodo della traiettoria come integrale definito e se ne dia una stima (cfr. l'esercizio 18 per uno studio completo del sistema meccanico).

*Discussione dell'esempio.* Si ha

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3) = x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6, \quad (30.9a)$$

$$V'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 22x = 2x(3x^4 - 12x^2 + 11), \quad (30.9b)$$

$$V''(x) = 30x^4 - 72x^2 + 22 = 2(15x^4 - 36x^2 + 11). \quad (30.9c)$$

L'equazione del moto è

$$\ddot{x} = -V'(x) = -2x(3x^4 - 12x^2 + 11).$$

I punti stazionari di  $V(x)$  si trovano imponendo che  $x$  soddisfi una delle seguenti equazioni:

$$x = 0, \quad x^2 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x^2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}},$$

così che si trovano i 5 valori

$$x = 0, \quad x = x_{\pm 1} := \pm \sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{3}}}, \quad x = x_{\pm 2} := \pm \sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

Si ha

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V''(0) = 22 > 0, \quad (30.10a)$$

$$V(x_{\pm 1}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad V'(x_{\pm 1}) = 0, \quad V''(x_{\pm 1}) = 8(1 - 2\sqrt{3}) < 0, \quad (30.10b)$$

$$V(x_{\pm 2}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad V'(x_{\pm 2}) = 0, \quad V''(x_{\pm 2}) = 8(1 + 2\sqrt{3}) > 0. \quad (30.10c)$$

Il sistema dinamico corrispondente ha perciò 5 punti di equilibrio:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_{\pm 1} = \left( \pm \sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}, 0 \right), \quad P_{\pm 2} = \left( \pm \sqrt{2 + 1/\sqrt{3}}, 0 \right).$$

Poiché  $x_0 = 0$  e  $x_{\pm 1} = \pm\sqrt{2 - 1/\sqrt{3}}$  sono punti di minimo per l'energia potenziale  $V(x)$ , per il teorema di Lagrange-Dirichlet (teorema 19.22) i punti di equilibrio  $P_0$ ,  $P_{-2}$  e  $P_2$  sono stabili per il sistema dinamico corrispondente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -V'(x); \end{cases}$$

basta infatti prendere

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_0)$$

e, rispettivamente,

$$W(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x) - V(x_{\pm 1})$$

come funzione di Ljapunov. Riguardo ai punti  $P_{\pm 2}$  basta analizzare le curve di livello, utilizzando i risultati del §29; alternativamente si può studiare il sistema linearizzato e verificare che uno dei due autovalori corrispondenti ha parte reale negativa.

L'energia corrispondente al dato iniziale  $(x(0), \dot{x}(0)) = (\bar{x}, \bar{y})$  è data da

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}^2 + V(\bar{x}) = 0.$$

Dal grafico della curva  $x \mapsto V(x)$  si vede che il dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$  si trova su un'orbita chiusa, che attraversa l'asse delle ascisse nei punti  $x_- = -1$  e  $x_+ = 1$ , come è immediato verificare, di nuovo utilizzando i risultati del §29. Si ha

$$E - V(x) = (1 - x^2)(2 - x^2)(3 - x^2),$$

così che

$$T = 2 \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2)(2-x^2)(3-x^2)}}.$$

Utilizzando le notazioni di (30.2), scriviamo

$$E - V(x) = \Phi(x)(1 - x^2) = \Phi(x)(1 + x)(1 - x),$$

dove

$$\Phi(x) := (2 - x^2)(3 - x^2).$$

Per  $x \in [-1, 1]$  si ha

$$1 \cdot 2 = 2 \leq \Phi(x) \leq 2 \cdot 3 = 6,$$

così che vale la (30.3), con  $C_1 = 2$  e  $C_2 = 6$ . Possiamo perciò applicare la proposizione 30.1 e concludere che si ha

$$T_1 \leq T \leq T_2,$$

dove

$$T_1 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{2\pi^2}{2}} = \pi,$$

così che

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}} \leq T \leq \pi$$

fornisce una stima dal basso e dall'alto del periodo  $T$ .

**Osservazione 30.4** Come notato nell'osservazione 30.2, per ottenere stime più raffinate, occorrono approssimazioni migliori della funzione integranda in (30.1). Questo in particolare è necessario quando si vogliono stimare periodi di moti rotatori nel caso in cui  $x$  sia un angolo, come per esempio nel caso del pendolo (cfr. il §24), in cui le orbite non attraversano l'asse delle ascisse.

**Nota bibliografica** Per gli argomenti trattati nel presente capitolo, specie per i primi tre paragrafi, abbiamo seguito prevalentemente [Dell'Antonio, Cap. II]. Per l'equazione di Duffing menzionata nell'esercizio 10 e il suo ruolo nella teoria dei sistemi caotici rimandiamo per esempio a [Guckenheimer & Holmes] o [Lichtenberg & Lieberman].

Per una trattazione esaustiva degli integrali impropri e dei criteri di convergenza si veda per esempio [Giusti-1, Cap. 6].

## Esercizi

**Esercizio 1** Siano  $u, v: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni continue in  $[\alpha, \beta]$  e derivabili in  $(\alpha, \beta)$ , con derivata  $\dot{v}(t) \neq 0$  per  $t \in (\alpha, \beta)$ . Il teorema di Cauchy afferma che esiste  $t_1 \in (\alpha, \beta)$  tale che

$$\frac{u(\beta) - u(\alpha)}{v(\beta) - v(\alpha)} = \frac{\dot{u}(t_1)}{\dot{v}(t_1)},$$

per qualche  $t_1 \in (\alpha, \beta)$ . Si dimostri il teorema. [*Soluzione.* Definiamo

$$g(t) = u(t)(v(\beta) - v(\alpha)) - v(t)(u(\beta) - u(\alpha)),$$

così che  $g(\beta) = g(\alpha) = u(\alpha)v(\beta) - u(\beta)v(\alpha)$ . Possiamo applicare il teorema di Rolle (cfr. l'esercizio 3 del capitolo 2) e concludere che esiste almeno un punto  $t_1 \in (\alpha, \beta)$  tale che  $\dot{g}(t_1) = 0$ . In termini delle funzioni  $u, v$  si ha

$$0 = \dot{g}(t_1) = \dot{u}(t_1)(v(\beta) - v(\alpha)) - \dot{v}(t_1)(u(\beta) - u(\alpha)),$$

da cui segue l'asserto.]

**Esercizio 2** Siano  $u, v$  due funzioni continue in  $[\alpha, \beta]$  e derivabili in  $(\alpha, \beta)$  tali che  $u(t_0) = v(t_0) = 0$  e  $\dot{v}(t) \neq 0 \forall t \in (\alpha, \beta) \neq \{t_0\}$ . Il teorema di de l'Hôpital afferma che se esiste (finito o infinito) il limite

$$\ell = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{u}(t)}{\dot{v}(t)},$$

allora si ha

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u(t)}{v(t)} = \ell.$$

Si dimostri il teorema. [Suggerimento. Per il teorema di Cauchy (cfr. l'esercizio 1) si ha

$$\frac{u(t)}{v(t)} = \frac{u(t) - u(t_0)}{v(t) - v(t_0)} = \frac{\dot{u}(t_1)}{\dot{v}(t_1)},$$

dove  $t_1$  è un punto compreso tra  $t$  e  $t_0$ . Quindi

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\dot{u}(t_1)}{\dot{v}(t_1)} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{\dot{u}(t_1)}{\dot{v}(t_1)} = \ell.$$

dove si è usato che  $t_1 \rightarrow t_0$  per  $t \rightarrow t_0$ .]

**Esercizio 3** Si utilizzi il teorema di de l'Hôpital per discutere l'esercizio 36 del capitolo 4. [Soluzione. Sotto le ipotesi dell'esercizio 36 del capitolo 4 si ha

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (f(x) + f'(x))}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell + \ell',$$

così che se  $\ell$  è finito si deve avere  $\ell' = 0$ .]

**Esercizio 4** Sia  $u(t)$  una funzione di classe  $C^p$ . Si dimostri che se  $u(t)$  è un *infinitesimo* di ordine  $k$  per  $t \rightarrow 0$ , i.e.  $u(t) = O(t^k)$ , con  $k \leq p$ , allora per  $n \leq k$  la derivata di ordine  $n$  di  $u(t)$  è un infinitesimo di ordine  $k - n$ . [Soluzione. Applicando  $k$  volte il teorema di de l'Hôpital (cfr. l'esercizio 2), si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(t)}{t^k} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{u}(t)}{k t^{k-1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ddot{u}(t)}{k(k-1) t^{k-2}} = \dots = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u^{(k-1)}(t)}{k(k-1) \dots 2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u^{(k)}(t)}{k!},$$

fin tanto che i limiti esistono. D'altra parte l'ultimo esiste se  $u$  è di classe  $C^k$  ed è uguale a  $\ell := u^{(k)}(0)/k!$  (eventualmente nullo), quindi esistono anche tutti gli altri limiti e sono uguali a  $\ell$ .]

**Esercizio 5** Si mostri che le curve descritte dalle equazioni  $x^3 - y^2 = 0$  e  $x^2 - y^3 = 0$  hanno, rispettivamente, una cuspide orizzontale e una cuspide verticale nell'origine. [Soluzione. Si può parametrizzare la curva di equazione  $x^3 - y^2 = 0$  come  $t \mapsto \varphi(t)$ , dove  $\varphi(t) = (t, t^{3/2})$  per  $t \geq 0$  e  $\varphi(t) = (-t, -(-t)^{3/2})$  per  $t < 0$ . Si ha allora  $\dot{\varphi}(t) = (1, (3/2)t^{1/2})$  per  $t > 0$  e  $\dot{\varphi}(t) = (-1, (3/2)(-t)^{3/2})$  per  $t < 0$ . Quindi  $\dot{\varphi}(t)$  è definito per ogni  $t \neq 0$  e  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{\varphi}(t) = (1, 0)$ , mentre  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \dot{\varphi}(t) = (-1, 0)$ . Nel caso della curva di equazione  $x^2 - y^3 = 0$ , si ragiona allo stesso modo, con il ruolo di  $x$  e  $y$  scambiati.]

**Esercizio 6** Sia  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $k \geq 3$ . Si mostri che la curva descritta dall'equazione  $x^k - y^2 = 0$  ha una cuspide orizzontale nell'origine. [Soluzione. Si ragiona come nell'esercizio 5 usando la parametrizzazione  $t \mapsto (t, t^{k/2})$  per  $t \geq 0$  e  $t \mapsto (-t, -(-t)^k)$  per  $t < 0$ .]

**Esercizio 7** Si dimostri che la curva descritta dall'equazione (28.2) ha una cuspide orizzontale in  $(x_{j+1}, 0)$ . [Soluzione. Per  $x$  in un intorno sinistro di  $x_{j+1}$  la curva è costituita da due rami  $\gamma_+$  e  $\gamma_-$ , dove  $\gamma_{\pm}$  possono essere parametrizzati come  $t \mapsto \varphi_{\pm}(t) := (x_{j+1} \mp t, \kappa(\pm t)^{3/2} + o((\pm t)^{3/2}))$ , per  $t \geq 0$  e  $t \leq 0$  rispettivamente, dove  $\kappa = \sqrt{2c/m}$ . Quindi si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{\varphi}_{\pm}(t) = \left( \pm 1, \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2} \kappa (\pm t)^{1/2} + o((\pm t)^{1/2}) \right) \right) = (\pm 1, 0),$$

dove si è tenuto conto dell'esercizio 4 per controllare gli infinitesimi nelle derivate.]

**Esercizio 8** Sia  $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  e sia  $x_0 \in \mathcal{E}_M^0$  un punto di massimo relativo per  $V$ , con  $V''(x_0) \neq 0$ . Si dimostri che  $x_0$  è un punto di equilibrio instabile utilizzando il teorema 18.7. [Suggerimento. La matrice del sistema dinamico linearizzato ha autovalori  $\lambda = \pm \sqrt{-V''(x_0)/m}$ , dove  $V''(x_0) < 0$  per ipotesi, quindi uno dei due autovalori è positivo.]

**Esercizio 9** Si dimostri la (29.15). [Suggerimento. Con il cambiamento di coordinate (29.12), tenendo conto che  $E(\varepsilon) - V(x) = \varepsilon^2(y^2 - 1)$  e l'equazione  $E(\varepsilon) - V(x) = 0$  diventa  $y^2 - 1 = 0$ , così che  $y = 1$  se  $x = x_+(\varepsilon)$ , si trova

$$T_+(\varepsilon) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{dy}{\varepsilon\sqrt{1-y^2}} \left| \frac{dx}{dy} \right|,$$

dove

$$\varepsilon\sqrt{\frac{2}{k}}(1 + K_\varepsilon)^{-1} \leq \left| \frac{dx}{dy} \right| \leq \varepsilon\sqrt{\frac{2}{k}}(1 - K_\varepsilon)^{-1},$$

per la (29.14). Si trova quindi

$$(1 + K_\varepsilon)^{-1} 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \leq T_+(\varepsilon) \leq (1 - K_\varepsilon)^{-1} 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

così che, passando al limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  e tenendo conto che  $K_\varepsilon \rightarrow 0$ , segue la (29.15).]

**Esercizio 10** Si studi il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0$$

al variare dei parametri  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . In particolare si dimostrino le seguenti proprietà.

- Se  $\alpha, \beta > 0$  tutti i moti sono limitati e periodici.
- Se  $\alpha, \beta < 0$  tutti i moti sono illimitati.
- Se  $\alpha > 0$  e  $\beta < 0$  il sistema possiede una separatrice ed esistono moti illimitati.
- Se  $\alpha < 0$  e  $\beta > 0$  il sistema possiede una separatrice e tutti i moti sono limitati.

In presenza di attrito e con l'aggiunta di un termine forzante  $f(\omega t)$ , con  $f$  periodica, l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 + \gamma \dot{x} = f(\omega t),$$

che è nota come *equazione di Duffing*. L'equazione di Duffing è un'equazione largamente studiata come esempio notevole di sistema nonlineare, al pari del *pendolo forzato*  $\ddot{x} + \sin x + \gamma \dot{x} = f(\omega t)$  (cfr. la nota bibliografica).

**Esercizio 11** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = 3x^2 - 2x.$$

Si scelga l'energia potenziale corrispondente  $V(x)$  in modo tale che sia  $V(0) = 0$ .

- (1) Si verifichi che il moto che si svolge sulla curva di livello  $\Gamma_E$ , con  $E = 1/8$ , per un'opportuna scelta del dato iniziale  $\bar{x}$ , è periodico.
- (2) Si discuta se la scelta del dato iniziale al punto (1) è univoca.
- (3) Si stimi il periodo del moto di cui al punto (1).
- (4) Si trovi esplicitamente la legge del moto in corrispondenza dei dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v}) = (1, 0)$ .

**Esercizio 12** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale descritto dall'equazione

$$\ddot{x} = -a + \sin x,$$

dove  $x \in \mathbb{R}$  e il parametro  $a = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$  è tale che  $\sin(\pi/12) = a$ .

- (1) Si verifichi che per ogni valore dell'energia  $E$ , il sistema ammette al più una traiettoria periodica.
- (2) Si studino le curve di livello nello spazio delle fasi.
- (3) Si descriva come cambia lo scenario, in particolare il numero di traiettorie periodiche, al variare di  $a \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 13** Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \lambda x, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x^5 - x + \frac{4}{3}x^3 - \lambda y, \end{cases}$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \geq 0$ .

- (1) Si verifichi che per  $\lambda = 0$  il sistema descrive il moto su una retta di un punto di massa  $m = 1$  soggetto a una forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^6}{18} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^2}{2}.$$

- (2) Per  $\lambda = 0$  si determinino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si verifichi che per  $\lambda = 1$  l'origine è asintoticamente stabile e il disco

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1/10\}$$

è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

**Esercizio 14** Dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^2(1-x)(3-x),$$

si dimostri che la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v}) = (1, 0)$  è periodica e se ne stimi il periodo.

**Esercizio 15** Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos 2x, \quad x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi.$$

- (1) Si studi la funzione  $V(x)$ .
- (2) Si scrivano le equazioni del corrispondente sistema dinamico planare.
- (3) Si discutano qualitativamente le curve di livello dell'energia.
- (4) Si determinino tutti i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.
- (5) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale  $(x, \dot{x}) = (-2\pi/3, 0)$  è periodica.
- (6) Si scriva il periodo della traiettoria del punto precedente come integrale definito.

**Esercizio 16** Dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^4 - ax^2,$$

si studi il sistema dinamico corrispondente al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$ . [*Suggerimento.* I punti stazionari di  $V$  sono  $x = 0$ , per ogni valore di  $a$ , e, se  $a > 0$ ,  $x = \pm x_0$ , dove  $x_0 := \sqrt{a}/2$ . Per  $a \leq 0$  si ha quindi il solo punto di equilibrio  $(0, 0)$ , che è stabile, dal momento che  $x = 0$  è in tal caso un punto di minimo isolato di  $V$ . Per  $a > 0$ ,  $x = 0$  è un punto di massimo, quindi corrisponde a un punto di equilibrio instabile, mentre  $x = \pm x_0$  sono punti di minimo isolati, quindi corrispondono a punti di equilibrio stabili. Per  $a \leq 0$ , tutte le traiettorie sono periodiche e le rispettive orbite contengono l'origine al loro interno. Per  $a > 0$ , la curva di livello  $\Gamma_0$  (cfr. la definizione 27.2) contiene, oltre al punto di equilibrio instabile, le orbite di due soluzioni omocline, che costituiscono i lobi di una lemniscata (cfr. l'esempio 21.9) passante per l'origine. Tutte le altre traiettorie sono periodiche; le rispettive orbite sono curve chiuse che circondano la lemniscata se  $E > 0$  e curve chiuse contenute all'interno dei due lobi della lemniscata e contenenti a loro volta uno dei due punti di equilibrio stabili se  $E < 0$ .]

**Esercizio 17** Dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (a - bx^2)(c - dx^2),$$

si studi il sistema dinamico corrispondente, al variare dei parametri reali  $a, b, c, d$ . [*Suggerimento.* Se  $b = d = 0$ ,  $V$  è costante. Se  $d = 0$  e  $b \neq 0$ , se  $c = 0$  di nuovo  $V$  è costante, mentre se  $c \neq 0$ , si ha  $V(x) = A - Bx^2$ , dove  $A := ca$  e  $B := cb \neq 0$ : in tal caso  $(0, 0)$  costituisce l'unico punto di equilibrio del sistema, ed è stabile se  $B < 0$ , instabile se  $B > 0$ . Se  $b, d \neq 0$ , si ha  $V = V_0 - Ax^2 + Bx^4$ , dove  $A := ad + bc$  e  $B := bd \neq 0$ ; possiamo quindi scrivere  $V(x) = V_0 + BU(x)$ , dove  $U := x^4 - ax^2$ , dove abbiamo ridefinito  $a := A/B$ . Il valore di  $V_0$  è irrilevante, poiché nell'equazione del moto compare solo la derivata  $V'(x)$ ; se  $B > 0$ , il sistema può essere studiato come il sistema meccanico dell'esercizio 17, mentre, se  $B < 0$ , si può ragionare in modo simile tenendo conto che cambiare il segno dell'energia potenziale equivale a ribaltarne il grafico rispetto all'asse orizzontale.]

**Esercizio 18** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3).$$

- (1) Si scriva l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
  - (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
  - (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
  - (4) Si discutano qualitativamente le curve di livello nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
  - (5) Si studi la traiettoria con condizioni iniziali  $(x(0), \dot{x}(0)) = ((2 - 1/\sqrt{3})^{1/2}, 0)$ .
  - (6) Si discuta cosa succede se, nel caso precedente, si modifica il valore della velocità iniziale in  $\dot{x}(0) > 0$ .
- [*Suggerimento.* Si veda l'esempio 30.3 per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio. La curva di livello su cui giacciono i due punti di equilibrio instabili contiene inoltre le orbite di due soluzioni eterocline (asintotiche a uno dei due punti nel passato e all'altro nel futuro) e le orbite di due soluzioni omocline (asintotica ciascuna a uno dei due punti sia nel passato che nel futuro).]

**Esercizio 19** Dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^4},$$

si dimostri che la traiettoria con dati iniziali  $(\bar{x}, \bar{v}) = (\sqrt{2}, 0)$  è periodica e se ne stimi il periodo.

**Esercizio 20** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)e^{-x}.$$

- (1) Si scrivano l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico corrispondente e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (4) Si studino le curve di livello dell'energia e le traiettorie del sistema nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (5) Si verifichi che la traiettoria con condizioni iniziali  $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, \sqrt{2})$  è periodica.
- (6) Se ne scriva il periodo  $T$  come integrale definito e se ne dia una stima.

[Suggerimento. L'energia potenziale  $V(x)$  ha un minimo in  $x_1 = 1 - \sqrt{2}$  e un massimo in  $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ . Il grafico di  $V(x)$  e il piano delle fasi del sistema sono rappresentati nella figura 6.12.

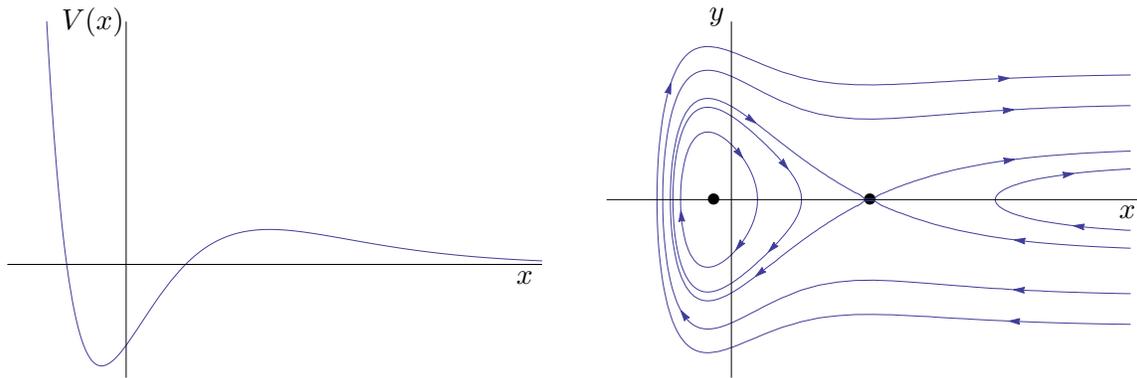


Figura 6.12: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 20.

**Esercizio 21** Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{k}{x} + \frac{1}{x^2},$$

al variare del parametro reale  $k$ .

**Esercizio 22** Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^4 + 8x^3 + 2ax^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

- (1) Per  $a = 5$  si studi il grafico dell'energia potenziale.
- (2) Per  $a = 5$  si discuta la stabilità dei punti di equilibrio del sistema dinamico associato.
- (3) Per  $a = 5$  si studi qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (4) Al variare del parametro  $a \in \mathbb{R}$  si discuta brevemente come cambia lo scenario.

[Suggerimento. Per  $a = 5$  l'energia potenziale  $V(x)$  ha un massimo in  $-1$  e due minimi, in  $-5$  e  $0$ ; il grafico di  $V(x)$  e il piano delle fasi sono rappresentati nella figura 6.13. Per  $a \in \mathbb{R}$ , i punti stazionari di  $V$ , oltre a  $0$ , sono  $x_{\pm} = -3 \pm \sqrt{9-a}$ , per  $a \leq 9$ . Quindi, per  $a > 9$  c'è solo un minimo, per  $a = 9$  ci sono un minimo in  $0$  e un flesso orizzontale in  $-3$ , per  $0 < a < 9$  ci sono un massimo in  $x_+$  e due minimi, in  $0$  e  $x_-$  (con  $V(0) = V(x_-) = 0$  per  $a = 8$ ), per  $a = 0$  ci sono un minimo in  $x_-$  e un flesso orizzontale in  $0$ , per  $a < 0$  ci sono un massimo in  $0$  e due minimi (in  $x_-$  e  $x_+$ ). I grafici di  $V(x)$  per alcuni valori significativi di  $a$  sono rappresentati nella figura 6.14.]

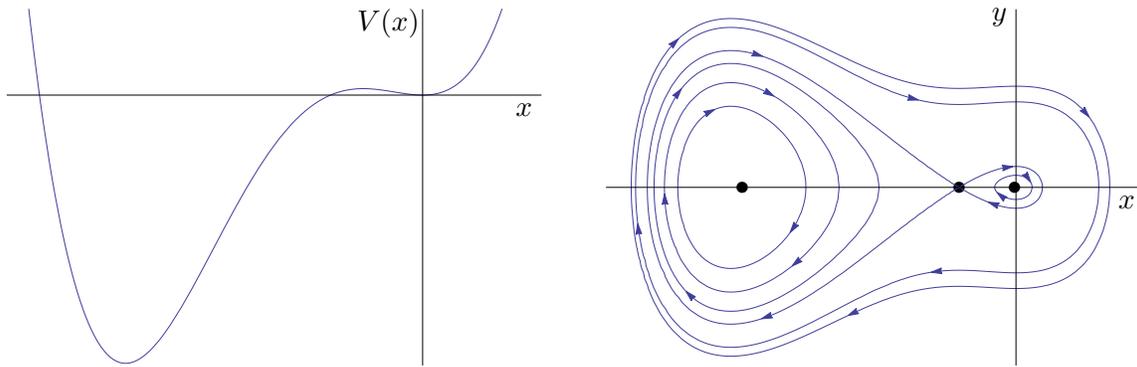


Figura 6.13: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 22 per  $a = 5$ .

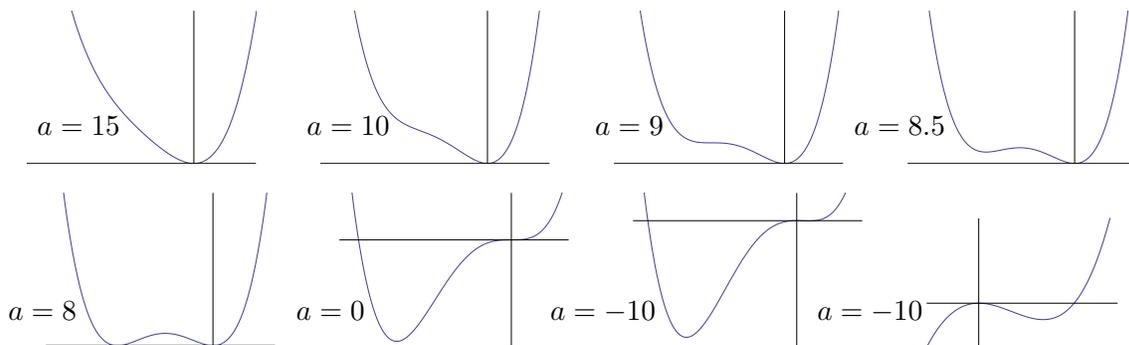


Figura 6.14: Grafico dell'energia potenziale dell'esercizio 22 per alcuni valori di  $a$ . L'ultimo grafico è un ingrandimento del grafico per  $a = -10$  nell'intervallo  $[-0.6, 1.6]$ , per evidenziare il minimo in  $x_+$ .

**Esercizio 23** Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 2x^6 - 15x^4 + 24x^2, & x \geq 0, \\ Ax^2, & x < 0, \end{cases} \quad A \in \mathbb{R}.$$

- (1) Si fissi  $A$  in modo che  $V(x)$  sia di classe  $C^2$ .
- (2) Si scrivano le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (3) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (4) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (5) Si discuta qualitativamente il moto nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (6) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \sqrt{22})$  è asintotica.
- (7) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (3/2, 0)$  è periodica.
- (8) Si scriva il periodo dell'orbita periodica al punto (7) come integrale definito.

**Esercizio 24** Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(\theta) = \sin^2 \theta + \alpha \cos^4 \theta, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con  $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Al variare del parametro  $\alpha$  si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si scrivano l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
  - (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
  - (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(\theta)$ .
  - (4) Si discuta qualitativamente il moto del sistema.
  - (5) Si determini per quali valori di  $\alpha$  la traiettoria con condizioni iniziali  $(\theta(0), y(0)) = (0, 1)$  è periodica e per quali valori è asintotica.
  - (6) Per i valori di  $\alpha$  per i quali la traiettoria è periodica, si scriva il periodo  $T(\alpha)$  come integrale definito. Si dimostri in particolare per  $\alpha = 1$  la traiettoria è periodica e  $T(1) \leq 2\pi$ .
- [Suggerimento. I grafici dell'energia potenziale  $V(x)$  e le orbite nel piano delle fasi sono rappresentati nelle figure 6.15÷6.18 a seconda del valore di  $\alpha$ .]

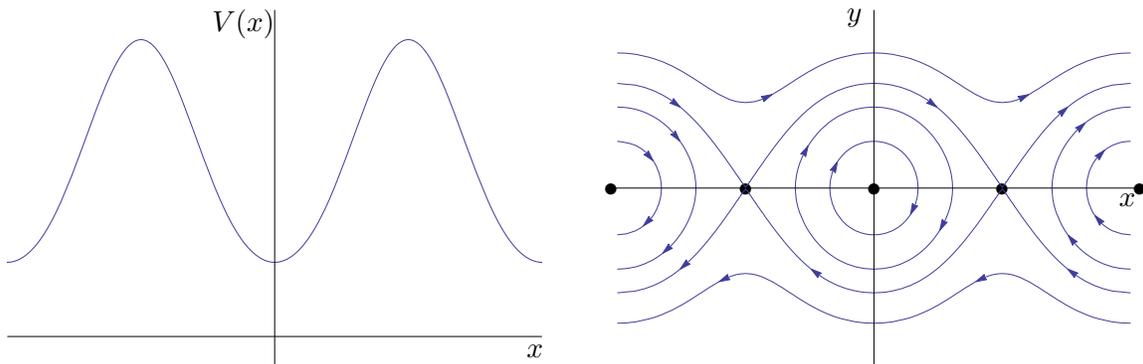


Figura 6.15: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 24 per  $\alpha \leq 1/2$ .

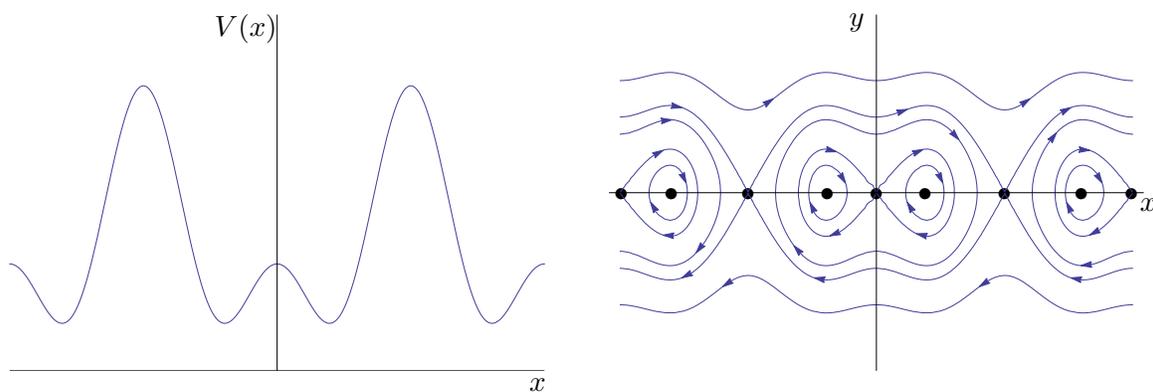


Figura 6.16: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 24 per  $\alpha \in (1/2, 1)$ .

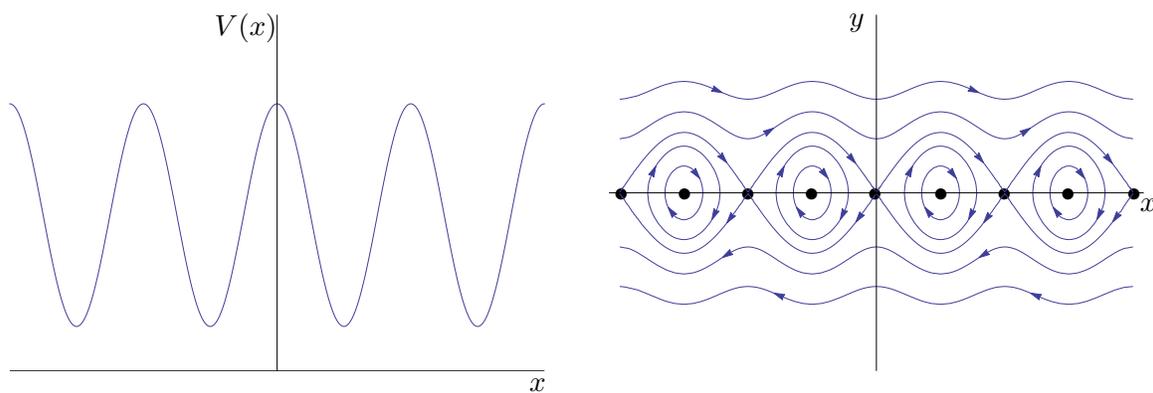


Figura 6.17: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 24 per  $\alpha = 1$ .

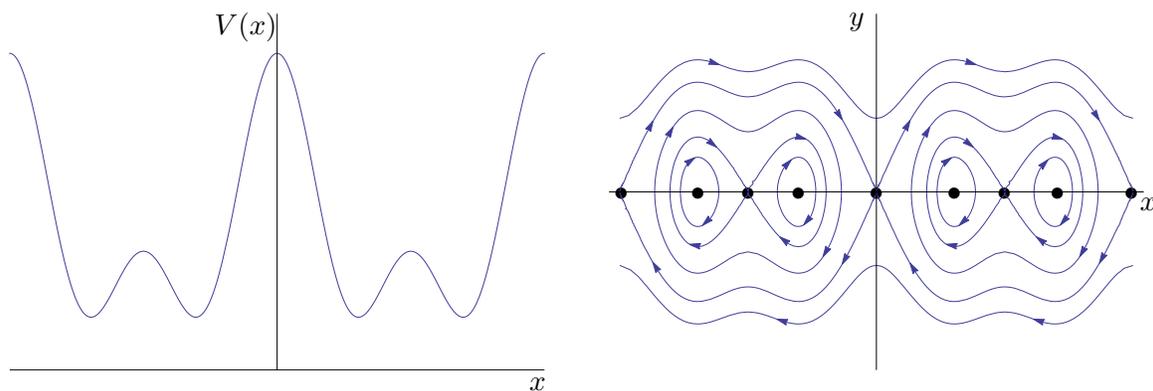


Figura 6.18: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 24 per  $\alpha > 1$ .

**Esercizio 25** Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \left( a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right), \quad a \in \mathbb{R},$$

Al variare di  $a$  si discutano i seguenti punti.

- (1) Si studi il grafico dell'energia potenziale.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si analizzi qualitativamente il moto nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (4) Per  $a = -1$  si studi qualitativamente la traiettoria con posizione iniziale  $x(0) = -1$  ed energia nulla, e si dica se esiste un tempo  $T$  in cui la soluzione attraversa l'asse  $y$ .

[Suggerimento. I grafici dell'energia potenziale  $V(x)$  e le orbite nel piano delle fasi sono rappresentati nelle figure 6.19÷6.21 a seconda del valore di  $a$ .]

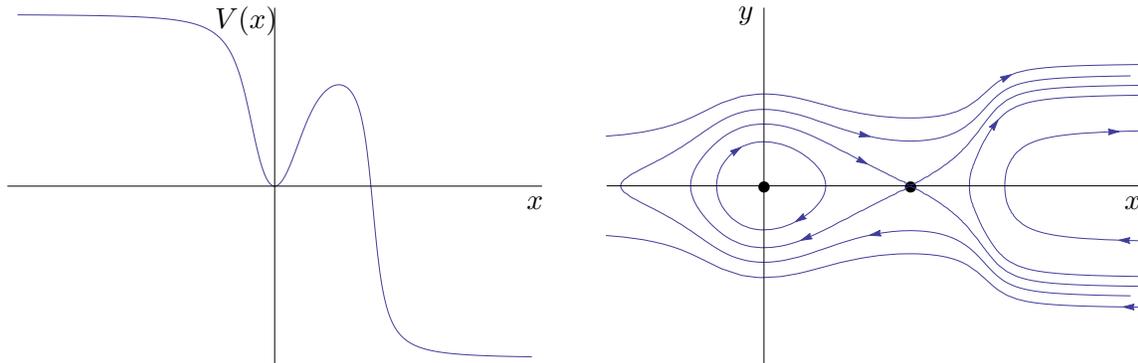


Figura 6.19: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 25 per  $a > 0$ .

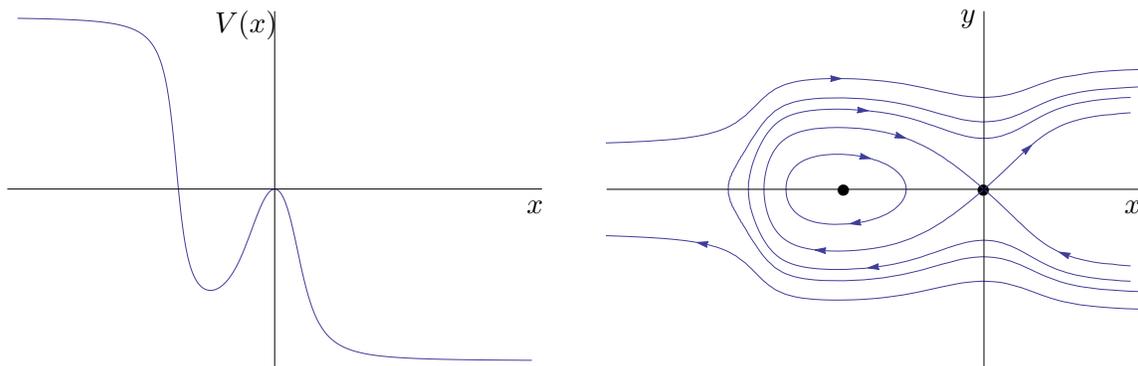


Figura 6.20: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 25 per  $a = 0$ .

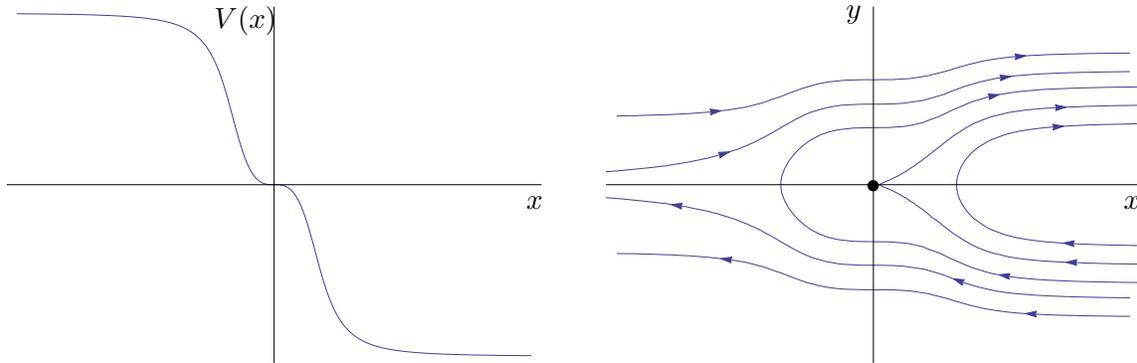


Figura 6.21: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 25 per  $a < 0$ .

**Esercizio 26** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{2x^2} (2x^2 - 1) (x^2 - 1)^2.$$

- (1) Si scriva l'equazione del moto.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico corrispondente e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si determini analiticamente la curva di livello che corrisponde al valore  $E = 0$  dell'energia.
- (4) Si discutano qualitativamente le altre curve di livello nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (5) Si verifichi che la traiettoria con condizioni iniziali  $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, \sqrt{2})$  è periodica.
- (6) Se ne scriva il periodo  $T$  come integrale definito.
- (7) Si stimi il periodo  $T$ .

[*Suggerimento.* L'energia potenziale  $V(x)$  ha tre minimi (in  $-1, 0, 1$ ) e due massimi (in  $x = \pm 2^{-1/4}$ ). Il grafico di  $V(x)$  e il piano delle fasi del sistema sono rappresentati nella figura 6.22.]

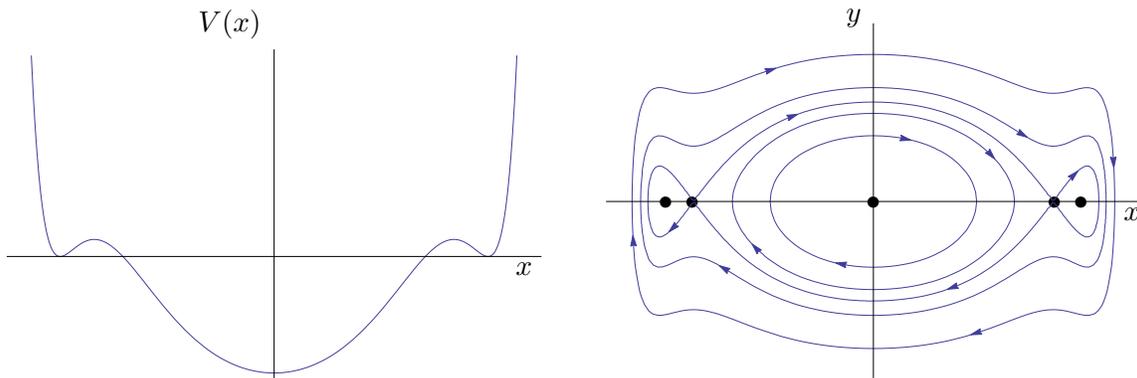


Figura 6.22: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 26.

**Esercizio 27** Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x^3}, \quad a \in \mathbb{R},$$

Si risponda alle seguenti domande al variare del parametro  $a$ .

- (1) Si studi il grafico dell'energia potenziale.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studi qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .

[*Suggerimento.* I punti critici di  $V(x)$  sono  $x = x_1 := 1 - \sqrt{1+3a}$  e  $x = x_2 := 1 + \sqrt{1+3a}$ , se  $a \geq -1/3$ . Quindi, se  $a < -1/3$  non ci sono punti stazionari, se  $a = -1/3$  c'è un flesso orizzontale in 1, se  $a \in (-1/3, 0)$  c'è un massimo in  $x_1 > 0$  e un minimo in  $x_2$ , se  $a = 0$  c'è un minimo in  $x_2$ , se  $a > 0$  c'è un massimo in  $x_1 < 0$  e un minimo in  $x_2$ . I grafici dell'energia potenziale  $V(x)$  e le orbite nel piano delle fasi sono rappresentati nelle figure 6.23÷6.27 a seconda del valore di  $a$ .]

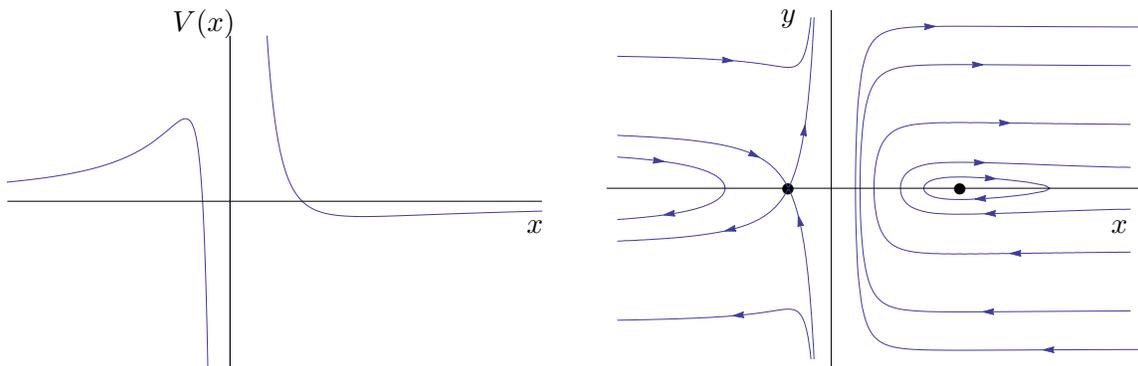


Figura 6.23: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 27 per  $a > 0$ .

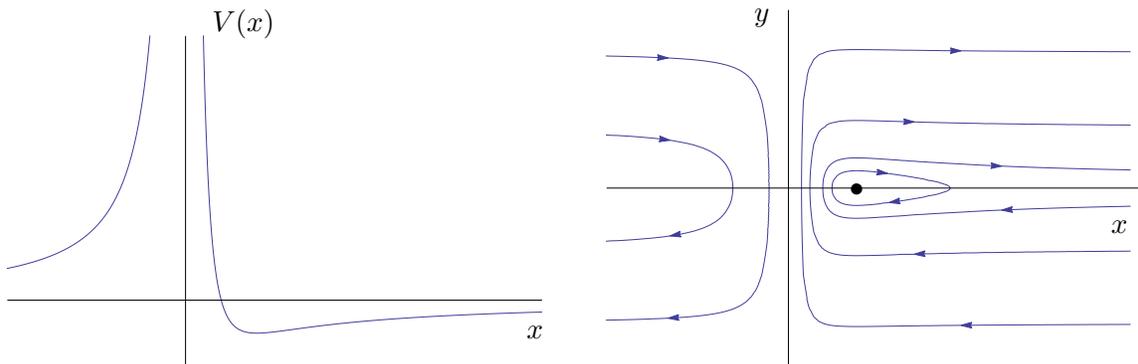


Figura 6.24: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 27 per  $a = 0$ .

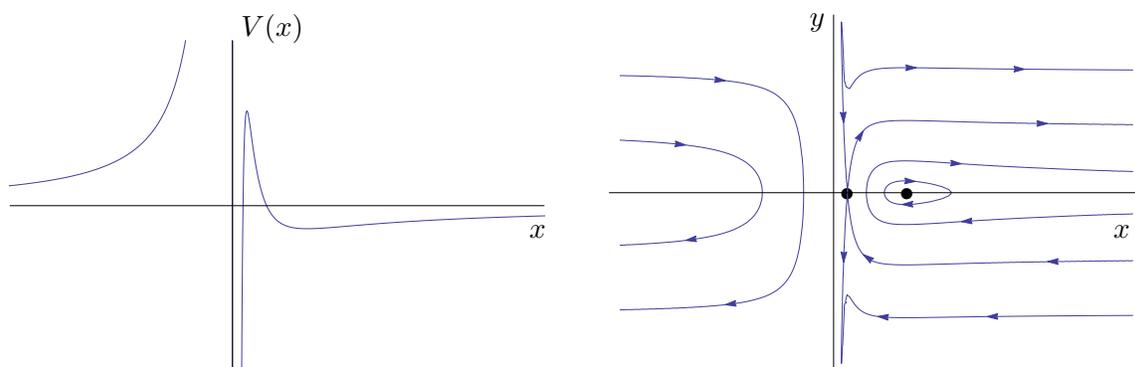


Figura 6.25: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 27 per  $a \in (-1/3, 0)$ .

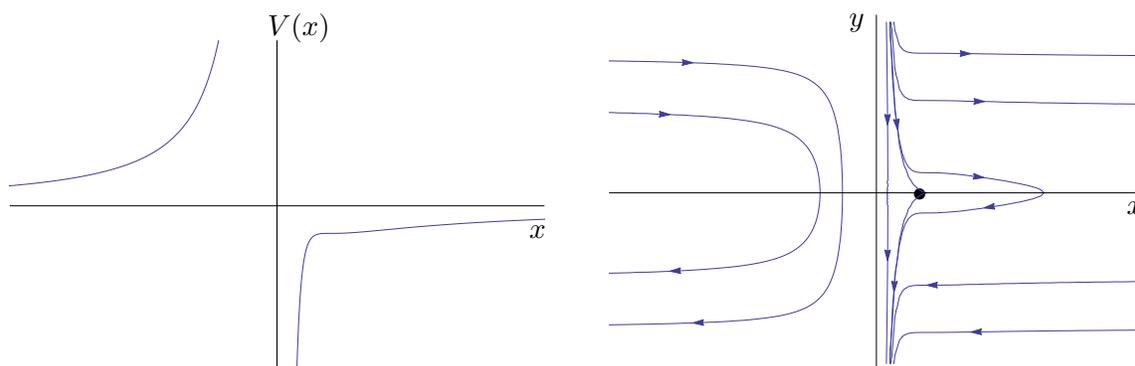


Figura 6.26: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 27 per  $a = -1/3$ .

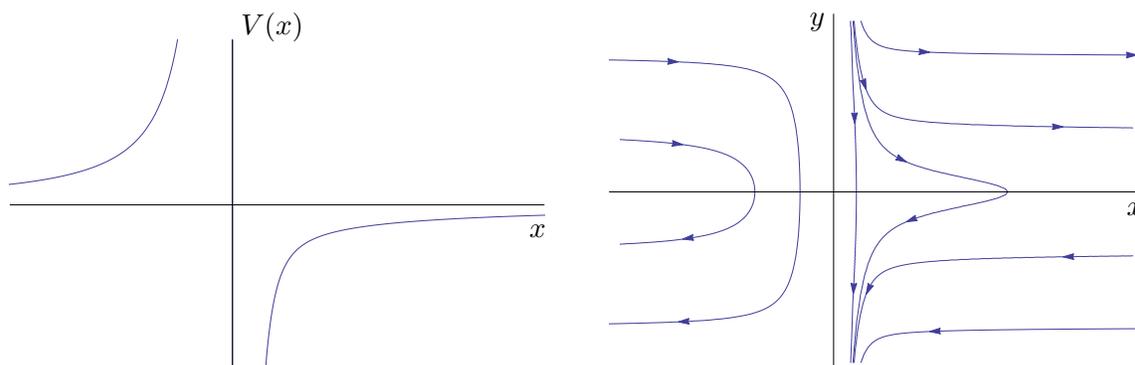


Figura 6.27: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 27 per  $a < -1/3$ .

**Esercizio 28** Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^4}{|x^2 - 1|} + (\alpha - 1)x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

- (1) Per  $\alpha = 1$ , si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
- (2) Per  $\alpha = 1$ , si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (3) Per  $\alpha = 1$ , si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (4) Per  $\alpha = 1$ , si discuta qualitativamente il moto nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (5) Si discuta come cambia lo scenario al variare del parametro  $\alpha$  in  $\mathbb{R}$ .
- (6) Si mostri che per ogni valore di  $\alpha \in \mathbb{R}$  l'intervallo  $|x| < 1$  è invariante.

[*Suggerimento.* Il grafico dell'energia potenziale e le traiettorie nel piano delle fasi per  $\alpha = 1$  sono rappresentati nella figura 6.28. In generale i punti stazionari, oltre a  $x = 0$ , sono  $x = x_{\pm 1} := \pm(1 + \sqrt{1/\alpha})^{1/2}$ , se  $\alpha > 0$ , e  $x = x_{\pm 2} := \pm(1 - \sqrt{1/(2 - \alpha)})^{1/2}$ , se  $\alpha < 1$ . Quindi per  $\alpha \geq 1$  si hanno tre minimi in  $0, x_{-1}, x_1$ , per  $\alpha \in (0, 1)$  si hanno quattro minimi in  $x_{-1}, x_{-2}, x_2, x_1$  e un massimo in  $x = 0$ , per  $\alpha < 0$  si hanno un massimo in  $x = 0$  e due minimi in  $x_{-2}, x_2$ ; per  $x \rightarrow \pm\infty$ , si ha  $V(x) \rightarrow +\infty$  se  $\alpha > 0$ ,  $V(x) \rightarrow 1$  se  $\alpha = 0$  e  $V(x) \rightarrow -\infty$  se  $\alpha < 0$  (cfr. la figura 6.29).]

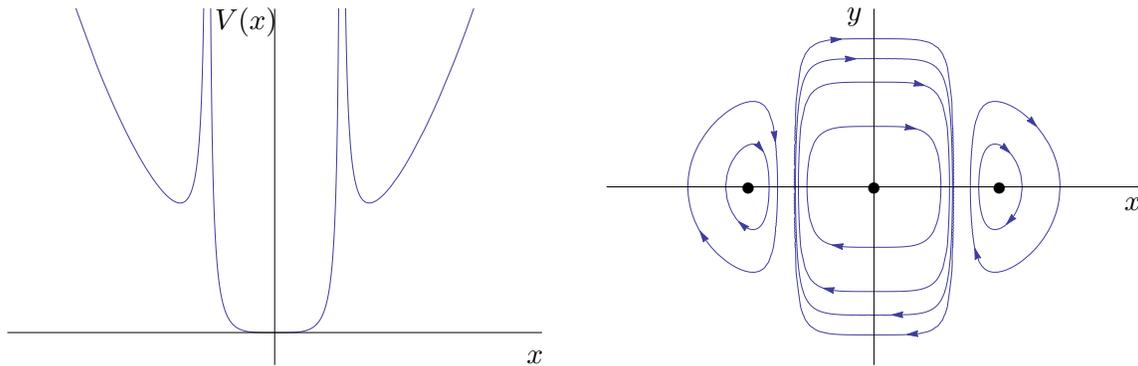


Figura 6.28: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 29 per  $\alpha = 1$ .

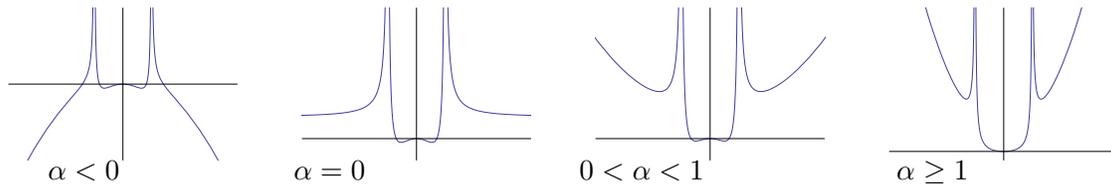


Figura 6.29: Grafico dell'energia potenziale dell'esercizio 29 al variare di  $\alpha$ .

**Esercizio 29** Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = 2(1 - \cos x) + \cos 2x,$$

con  $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$ .

- (1) Si studi la funzione  $V(x)$ .
- (2) Si studino qualitativamente le curve di livello dell'energia del corrispondente sistema dinamico.
- (3) Si determinino tutti i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.
- (4) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale  $(x, \dot{x}) = (-2\pi/3, 0)$  è periodica e se ne scriva il periodo della traiettoria del punto come integrale definito.

**Esercizio 30** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale  $P$  di massa  $m$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{5}\alpha x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 2\beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si consideri preliminarmente il caso  $\alpha = 0$ .

- (1) Per  $\alpha = 0$ , si studi il grafico dell'energia potenziale, al variare del parametro  $\beta \in \mathbb{R}$ .
- (2) Per  $\alpha = 0$ , si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità, al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$ .
- (3) Per  $\alpha = 0$ , si studino qualitativamente le traiettorie del sistema, al variare di  $\beta \in \mathbb{R}$ .
- (4) Si consideri ora il caso  $\alpha > 0$  e si risponda alle stesse domande, al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  e di  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 31** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{\alpha}{2n}x^{2n}.$$

Al variare dei parametri  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$  si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si studi il grafico dell'energia potenziale.
  - (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
  - (3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
  - (4) In particolare si dimostri che per  $n$  fissato, al variare di  $\alpha$ , o tutti i dati iniziali che non siano punti di equilibrio danno luogo a traiettorie periodiche o non esistono traiettorie periodiche. Nel primo caso si scriva il periodo  $T$  come integrale definito.
  - (5) Si espliciti la dipendenza dall'energia  $E$  del periodo trovato al punto precedente.
  - (6) Si dica per quale valore di  $n$  il periodo  $T$  non dipende da  $E$  e lo si calcoli esplicitamente.
  - (7) Si scriva un'equazione differenziale  $dT/dE = f(T)$  per la funzione  $T = T(E)$ .
- [Suggerimento. Per  $\alpha > 0$ , tutti i moti sono periodici e, in accordo con la (30.1), si ha

$$T = \sqrt{2} \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \sqrt{\frac{2}{E}} \left( \frac{2nE}{\alpha} \right)^{1/2n} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^{2n}}} = C_n(\alpha) E^{(1-n)/2n},$$

dove  $x_{\pm}$  sono tali che  $x_{\pm}^{2n} = 2nE/\alpha$ , con  $x_- < 0 < x_+$ , e la costante  $C_n(\alpha)$  è esplicitamente calcolabile. Quindi  $T$  non dipende da  $E$  se  $n = 1$  (nel qual caso si ha  $C_1(\alpha) = 2\pi/\sqrt{\alpha}$ ). In generale  $T$  soddisfa l'equazione differenziale  $T' = A_n(\alpha) T^{(1-3n)/(1-n)}$ , dove  $T' = dT/dE$  e  $A_n(\alpha) := \beta_n(C_n(\alpha))^{-\beta_n}$ , con  $\beta_n = (1-n)/2n$ .]

**Esercizio 32** Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{6x^6} + \frac{\beta}{2}x^2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Per  $\beta = 1$ , si variare del parametro  $\alpha$  si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si scrivano l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (4) Si discuta qualitativamente il moto del sistema.

Si consideri ora  $\beta \in \mathbb{R}$  e si risponda alle seguenti domande.

- (5) Si discuta come cambia lo scenario al variare di entrambi i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{R}$ .
- (6) Si determinino in particolare i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per i quali tutti i moti sono periodici.

**Esercizio 33** Si consideri il sistema meccanico conservativo che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{3}|x|^3 - x^2 + \alpha x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Al variare del parametro  $\alpha$  si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si scrivano le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (4) Si discuta qualitativamente il moto nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
- (5) Si dimostri che per  $\alpha = -1$  la traiettoria con energia totale  $E = 0$  è periodica.

**Esercizio 34** Si studi il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{|x|} + x + \alpha \log x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Al variare di  $\alpha$  si discutano i seguenti punti.

- (1) Si studi il grafico dell'energia potenziale.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si analizzino qualitativamente il moto nel piano  $(x, \dot{x})$ .
- (4) Per  $\alpha = 0$  si verifichi che la traiettoria con dato iniziale  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 3/\sqrt{2})$  è periodica.
- (5) Si scriva il periodo della traiettoria del punto (5) come integrale definito e se ne dia una stima.

[Suggerimento. I punti stazionari di  $V(x)$  sono  $x_0 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}$  e, se  $\alpha \geq 1$ ,  $x_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}$  (con  $x_- = x_+ = -1$  per  $\alpha = 1$ ). Quindi  $V(x)$  ha un minimo in  $x_0 > 0$  per ogni valore di  $\alpha$ , mentre, a sinistra dell'origine, non ci sono punti stazionari per  $\alpha < 1$ , c'è un flesso orizzontale in  $-1$  per  $\alpha = 1$  e ci sono un minimo in  $x_+$  e un massimo in  $x_-$  per  $\alpha > 1$ . I grafici dell'energia potenziale  $V(x)$  e le orbite nel piano delle fasi sono rappresentati nelle figure 6.30÷6.32 a seconda del valore di  $a$ .]

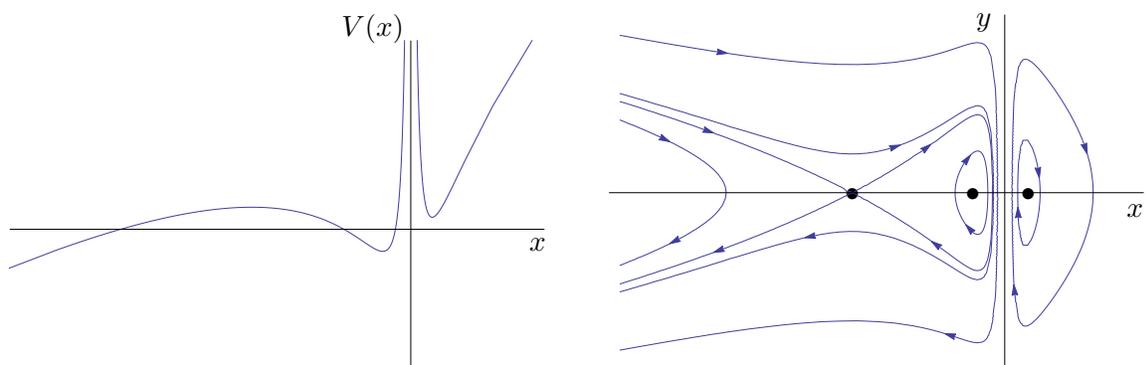


Figura 6.30: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 34 per  $\alpha > 1$ .

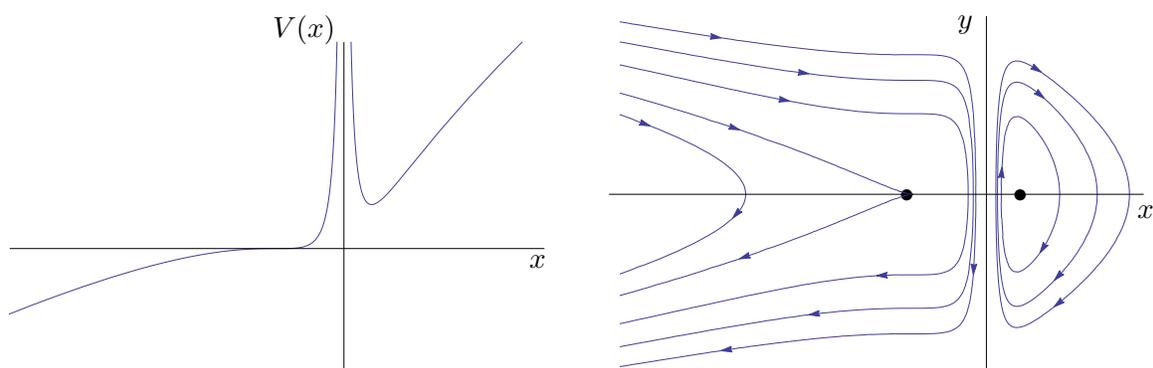


Figura 6.31: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 34 per  $\alpha = 1$ .

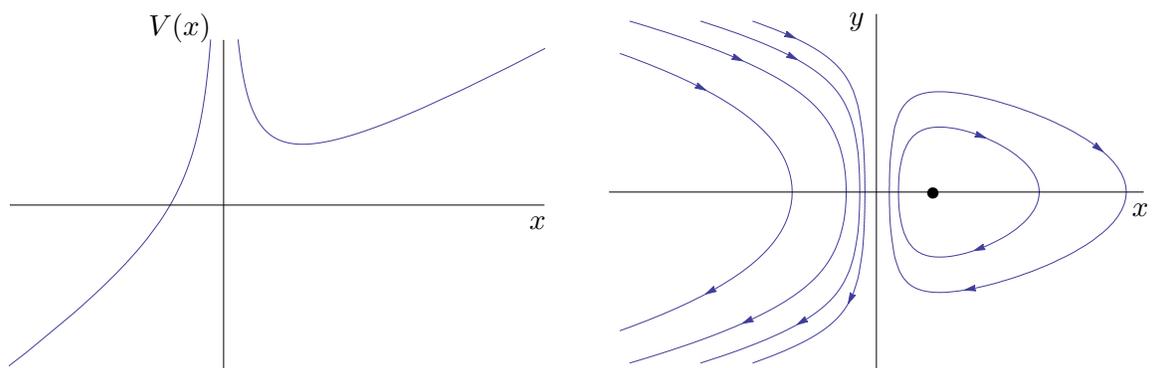


Figura 6.32: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 34 per  $\alpha < 1$ .

**Esercizio 35** Si consideri il sistema meccanico conservativo che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$ , sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x^2} - \alpha e^{-2x^2} + e^{-3x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- (1) Si scrivano le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
  - (2) Per  $\alpha = 2$ , si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
  - (3) Per  $\alpha = 2$  si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
  - (4) Per  $\alpha = 2$  si discuta qualitativamente il moto nel piano  $(x, y) = (x, \dot{x})$ .
  - (5) Si discuta come cambiano il grafico di  $V(x)$  e l'analisi qualitativa del moto per  $\alpha \leq 0$  e  $\alpha > 2$ .
  - (6) Lo stesso del punto precedente al variare di  $\alpha \in (0, 2)$ .
- [Suggerimento. Per  $\alpha = 2$ , i punti stazionari di  $V(x)$  sono  $x_0 = 0$  e  $x_{\pm} = \pm\sqrt{\log 3}$ :  $x_0$  è un punto di minimo assoluto, mentre  $x_{\pm}$  sono punti di massimo relativo. Il grafico di  $V(x)$  e le orbite nel piano delle fasi sono rappresentati nella figura 6.33. Per  $\alpha \neq 2$  si ragiona in modo analogo.]

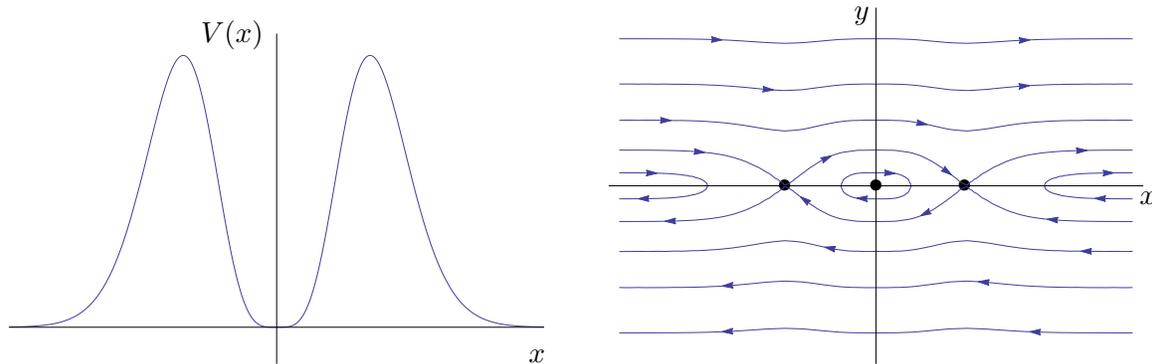


Figura 6.33: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 35.

**Esercizio 36** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale costituito da un punto materiale di massa  $m = 2$  sottoposto a una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = 4x^2 - 6x - \log x^2.$$

- (1) Si scrivano le equazioni del sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
- (4) Si dimostri in particolare che tutte le traiettorie non di equilibrio sono periodiche.
- (5) Si consideri lo stesso sistema in presenza d'attrito: si determinino i nuovi punti di equilibrio e si dimostri che tutte le traiettorie non di equilibrio tendono asintoticamente a un punto di equilibrio.

**Esercizio 37** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = x^3 - x.$$

- (1) Si scrivano l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (4) Si discuta qualitativamente il moto del sistema.

**Esercizio 38** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = V_{\text{LJ}}(x) := V_0 \left[ \left( \frac{\sigma}{x} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{x} \right)^6 \right],$$

dove  $V_0$  e  $\sigma$  sono due costanti positive. L'energia potenziale  $V_{\text{LJ}}$  è nota come *energia potenziale di Lennard-Jones* e descrive approssimativamente l'interazione tra atomi neutri o tra molecole.

- (1) Si scrivano l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
- (4) Si discuta qualitativamente il moto del sistema.
- (5) Si determini l'insieme dei dati iniziali a cui corrispondono traiettorie periodiche.

[*Suggerimento.* Per parità basta considerare  $x > 0$ . Si ha un unico punto stazionario,  $x_0 = 2^{1/6}\sigma$ , che è un punto di minimo assoluto. Il grafico di  $V(x)$  e le orbite nel piano delle fasi sono rappresentati nella figura 6.34 per  $x > 0$ .]

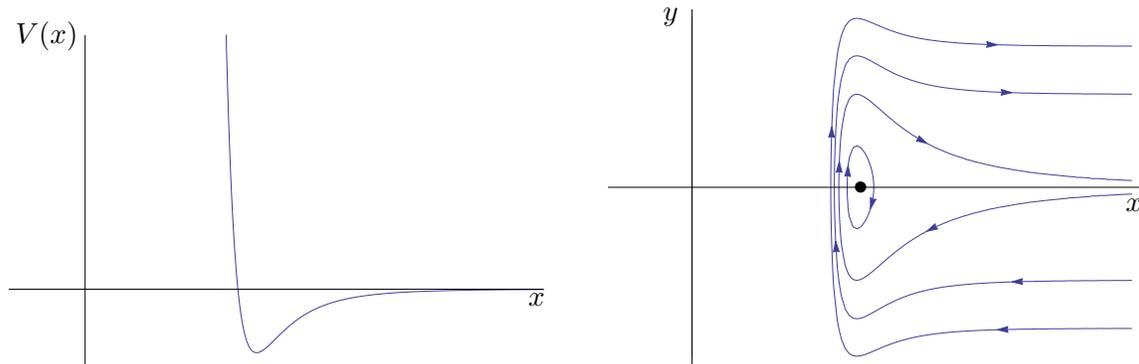


Figura 6.34: Grafico dell'energia potenziale e piano delle fasi del sistema dell'esercizio 38.

**Esercizio 39** Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \alpha(1 - \cos x) - \beta\sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos x}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

dove  $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$ . Al variare di  $\alpha$  e  $\beta$  in  $\mathbb{R}_+$  si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si studi la funzione  $V(x)$ .
- (2) Si studino qualitativamente le curve di livello dell'energia del corrispondente sistema dinamico.

**Esercizio 40** Si consideri il sistema meccanico unidimensionale dell'esercizio 39 e si studi il caso in cui  $\alpha$  e  $\beta$  possono anche essere negativi.