7 Moto in un campo centrale

§31 Moti centrali e problema dei due corpi

Nel capitolo precedente ci siamo occupati dell'analisi qualitativa di sistemi meccanici conservativi unidimensionali. Una domanda legittima è se tale analisi costituisca soltanto un utile esercizio matematico o se possa avere rilevanza anche per problemi fisicamente più realistici.

Il problema dei due corpi costituisce per l'appunto un problema fisico interessante al quale si applicano i risultati sui sistemi unidimensionali. Che questo sia possibile non è assolutamente ovvio: in linea di principio abbiamo un sistema a 6 gradi di libertà (due punti materiali nello spazio tridimensionale). Vedremo tuttavia che, facendo ipotesi opportune sull'interazione tra i due punti materiali, il problema si riduce a due problemi a 3 gradi di libertà disaccoppiati, i.e. indipendenti, di cui uno è banale e l'altro può essere ulteriormente ridotto e porta a un problema a 2 gradi di libertà, cioè a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie in due incognite. Una delle due equazioni dipende da una sola variabile e se ne trova la soluzione utilizzando i risultati dei sistemi unidimensionali; tale soluzione è poi utilizzata per risolvere la seconda equazione. Ciascuna delle due riduzioni dei gradi di libertà del sistema è legata a una legge di conservazione: conservazione della quantità di moto e conservazione del momento angolare. Questo è in realtà un fatto generale (cfr. l'osservazione 31.12 più avanti).

A partire dal presente capitolo, indicheremo in neretto i vettori nello spazio tridimensionale e, introdotta in $\mathbb{R}^3$ una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$, scriveremo $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ se $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_x + x_2\boldsymbol{e}_y + x_3\boldsymbol{e}_z$. Useremo la notazione (cfr. anche l'osservazione 1.25)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum_{i=1}^{3} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \tag{31.1a}$$

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \tag{31.1b}$$

per indicare il prodotto scalare standard e, rispettivamente, il *prodotto vettoriale* di due vettori $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$; l'ultima espressione in (31.1b) è solo formale e può essere considerata un'utile regola mnemonica per calcolare il prodotto vettoriale di due vettori.

Il prodotto scalare (31.1a) induce una norma in $\mathbb{R}^3$ (norma euclidea standard) che indicheremo con $|\cdot|$ e che chiameremo anche *modulo* (come è consuetudine fare in fisica); per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ si avrà $|\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ricordiamo che lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ munito di un prodotto scalare, e quindi di una norma, è uno spazio euclideo (cfr. la definizione 1.32).

Il *secondo principio della dinamica* afferma che la forza $\boldsymbol{F}$ che agisce su un punto materiale P di massa m è uguale a $m\ddot{\boldsymbol{x}}$, dove $\ddot{\boldsymbol{x}}$ è l'accelerazione di P. L'equazione $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}$ è nota come *equazione di Newton* (cfr. l'osservazione 17.29).

Sia $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la forza che agisce su un punto materiale P che si muova lungo una traiettoria γ. Si definisce *lavoro* compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ lungo la traietttoria γ l'integrale

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t), \tag{31.2}$$

dove $t \in [t_1, t_2] \mapsto \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione della curva γ.

Definizione 31.1 (FORZA CONSERVATIVA) *Una forza $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è* conservativa *se il lavoro che essa compie lungo una qualsiasi traiettoria chiusa è nullo.*

Lemma 31.2 *Sia $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una forza. Se esiste una funzione $U\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -[\partial U/\partial \boldsymbol{x}](\boldsymbol{x})$, i.e. se $\boldsymbol{F}$ è il gradiente di una funzione U, allora $\boldsymbol{F}$ è conservativa.*

Dimostrazione. Si ha

$$L(\gamma) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}(t)) = -\left(U(\boldsymbol{x}(t_2)) - U(\boldsymbol{x}(t_1))\right),$$

dove $U(\boldsymbol{x}(t_2)) = U(\boldsymbol{x}(t_1))$ se la curva è chiusa. ■

Osservazione 31.3 In realtà vale un risultato molto più forte del lemma 31.2: una forza è conservativa se e solo se si scrive come gradiente di una funzione. Questo segue dal fatto che il lavoro è l'integrale di una forma differenziale e dalla proprietà che una forma differenziale è esatta se e solo se il suo integrale lungo qualsiasi curva chiusa è nullo (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 17). Si noti altresì che il valore di $L(\gamma)$ in (31.2) non cambia se si sceglie una riparametrizzzazione della curva γ (cfr. l'osservazione 74.2 del capitolo 17).

Infine introduciamo la nozione di quantità di moto e di momento angolare. Dato un punto materiale P di massa m, se $\boldsymbol{x}$ indica la posizione di P rispetto a un punto O e $\dot{\boldsymbol{x}}$ è la velocità di P, si definisce *quantità di moto* di P il vettore $\boldsymbol{p} := m\dot{\boldsymbol{x}}$ e *momento angolare* (o *momento della quantità di moto*) del punto P rispetto al punto O il vettore $\boldsymbol{l} := m\boldsymbol{x} \wedge \dot{\boldsymbol{x}}$.

Nel caso di più punti materiali $P_1, \ldots, P_n$, quantità di moto, momento angolare e lavoro si definiscono in modo additivo: se $t \mapsto \boldsymbol{x}^{(i)}$ parametrizza la traiettoria $\gamma^{(i)}$ descritta dal punto P_i sotto l'azione della forza $\boldsymbol{F}^{(i)}$, la quantità di moto è $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{p}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{p}^{(n)}$, il momento angolare è $\boldsymbol{l} := \boldsymbol{l}^{(1)} + \ldots + \boldsymbol{l}^{(n)}$ e il lavoro è $L(\gamma^{(1)}) + \ldots + L(\gamma^{(n)})$, dove $\boldsymbol{p}^{(i)} = m_i\dot{\boldsymbol{x}}^{(i)}$, $\boldsymbol{l}^{(i)} = m_i\boldsymbol{x}^{(i)} \wedge \dot{\boldsymbol{x}}^{(i)}$ e $L(\gamma^{(i)})$ rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}^{(i)}$ lungo la traiettoria $\gamma^{(i)}$ in accordo con la (31.2).