

7 | Moto in un campo centrale

§31 Moti centrali e problema dei due corpi

Nel capitolo precedente ci siamo occupati dell'analisi qualitativa di sistemi meccanici conservativi unidimensionali. Una domanda legittima è se tale analisi costituisca soltanto un utile esercizio matematico o se possa avere rilevanza anche per problemi fisicamente più realistici.

Il problema dei due corpi costituisce per l'appunto un problema fisico interessante al quale si applicano i risultati sui sistemi unidimensionali. Che questo sia possibile non è assolutamente ovvio: in linea di principio abbiamo un sistema a 6 gradi di libertà (due punti materiali nello spazio tridimensionale). Vedremo tuttavia che, facendo ipotesi opportune sull'interazione tra i due punti materiali, il problema si riduce a due problemi a 3 gradi di libertà disaccoppiati, i.e. indipendenti, di cui uno è banale e l'altro può essere ulteriormente ridotto e porta a un problema a 2 gradi di libertà, cioè a un sistema di due equazioni differenziali ordinarie in due incognite. Una delle due equazioni dipende da una sola variabile e se ne trova la soluzione utilizzando i risultati dei sistemi unidimensionali; tale soluzione è poi utilizzata per risolvere la seconda equazione. Ciascuna delle due riduzioni dei gradi di libertà del sistema è legata a una legge di conservazione: conservazione della quantità di moto e conservazione del momento angolare. Questo è in realtà un fatto generale (cfr. l'osservazione 31.12 più avanti).

A partire dal presente capitolo, indicheremo in neretto i vettori nello spazio tridimensionale e, introdotta in \mathbb{R}^3 una base ortonormale $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$, scriveremo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ se $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_x + x_2\mathbf{e}_y + x_3\mathbf{e}_z$. Useremo la notazione (cfr. anche l'osservazione 1.25)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3, \quad (31.1a)$$

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad (31.1b)$$

per indicare il prodotto scalare standard e, rispettivamente, il *prodotto vettoriale* di due vettori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$; l'ultima espressione in (31.1b) è solo formale e può essere considerata un'utile regola mnemonica per calcolare il prodotto vettoriale di due vettori.

Il prodotto scalare (31.1a) induce una norma in \mathbb{R}^3 (norma euclidea standard) che indicheremo con $|\cdot|$ e che chiameremo anche *modulo* (come è consuetudine fare in fisica); per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si avrà $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ricordiamo che lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 munito di un prodotto scalare, e quindi di una norma, è uno spazio euclideo (cfr. la definizione 1.32).

Il *secondo principio della dinamica* afferma che la forza \mathbf{F} che agisce su un punto materiale P di massa m è uguale a $m\ddot{\mathbf{x}}$, dove $\ddot{\mathbf{x}}$ è l'accelerazione di P . L'equazione $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$ è nota come *equazione di Newton* (cfr. l'osservazione 17.29).

Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la forza che agisce su un punto materiale P che si muova lungo una traiettoria γ . Si definisce *lavoro* compiuto dalla forza \mathbf{F} lungo la traiettoria γ l'integrale

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t), \quad (31.2)$$

dove $t \in [t_1, t_2] \mapsto \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione della curva γ .

Definizione 31.1 (FORZA CONSERVATIVA) *Una forza $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è conservativa se il lavoro che essa compie lungo una qualsiasi traiettoria chiusa è nullo.*

Lemma 31.2 *Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una forza. Se esiste una funzione $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -[\partial U / \partial \mathbf{x}](\mathbf{x})$, i.e. se \mathbf{F} è il gradiente di una funzione U , allora \mathbf{F} è conservativa.*

Dimostrazione. Si ha

$$L(\gamma) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{dU}{dt}(\mathbf{x}(t)) = -(U(\mathbf{x}(t_2)) - U(\mathbf{x}(t_1))),$$

dove $U(\mathbf{x}(t_2)) = U(\mathbf{x}(t_1))$ se la curva è chiusa. ■

Osservazione 31.3 In realtà vale un risultato molto più forte del lemma 31.2: una forza è conservativa se e solo se si scrive come gradiente di una funzione. Questo segue dal fatto che il lavoro è l'integrale di una forma differenziale e dalla proprietà che una forma differenziale è esatta se e solo se il suo integrale lungo qualsiasi curva chiusa è nullo (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 17). Si noti altresì che il valore di $L(\gamma)$ in (31.2) non cambia se si sceglie una riparametrizzazione della curva γ (cfr. l'osservazione 74.2 del capitolo 17).

Infine introduciamo la nozione di quantità di moto e di momento angolare. Dato un punto materiale P di massa m , se \mathbf{x} indica la posizione di P rispetto a un punto O e $\dot{\mathbf{x}}$ è la velocità di P , si definisce *quantità di moto* di P il vettore $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{x}}$ e *momento angolare* (o *momento della quantità di moto*) del punto P rispetto al punto O il vettore $\mathbf{l} := m\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{x}}$.

Nel caso di più punti materiali P_1, \dots, P_n , quantità di moto, momento angolare e lavoro si definiscono in modo additivo: se $t \mapsto \mathbf{x}^{(i)}$ parametrizza la traiettoria $\gamma^{(i)}$ descritta dal punto P_i sotto l'azione della forza $\mathbf{F}^{(i)}$, la quantità di moto è $\mathbf{p} := \mathbf{p}^{(1)} + \dots + \mathbf{p}^{(n)}$, il momento angolare è $\mathbf{l} := \mathbf{l}^{(1)} + \dots + \mathbf{l}^{(n)}$ e il lavoro è $L(\gamma^{(1)}) + \dots + L(\gamma^{(n)})$, dove $\mathbf{p}^{(i)} = m_i \dot{\mathbf{x}}^{(i)}$, $\mathbf{l}^{(i)} = m_i \mathbf{x}^{(i)} \wedge \dot{\mathbf{x}}^{(i)}$ e $L(\gamma^{(i)})$ rappresenta il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{F}^{(i)}$ lungo la traiettoria $\gamma^{(i)}$ in accordo con la (31.2).

§31.1 Impostazione del problema

Studieremo ora il sistema costituito da due punti materiali P_1 e P_2 , di massa m_1 e m_2 , rispettivamente, nello spazio tridimensionale, che interagiscono attraverso forze che

1. soddisfino il terzo principio della dinamica,
2. dipendano solo dal modulo della differenza dei vettori che individuano i due punti,
3. siano dirette lungo la retta congiungente i due punti.

Lo studio della dinamica di due punti che si muovano sottoposti a forze che verifichino tali condizioni è noto come “problema dei due corpi”.

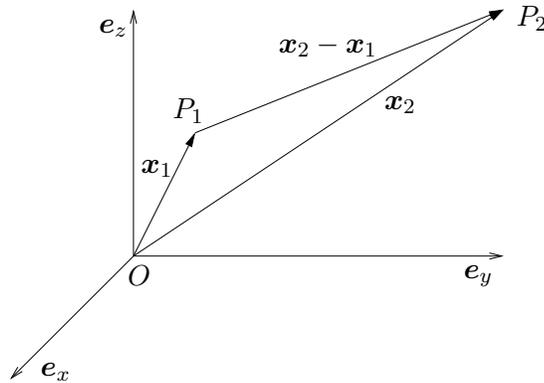


Figura 7.1: Due punti P_1 e P_2 in \mathbb{R}^3 .

Per individuare un punto nello spazio tridimensionale scegliamo un punto O e tre rette che si intersecano in O e tra loro *perpendicolari* (i.e. tali da formare un angolo $\pi/2$ l'una con l'altra); indichiamo con r_1, r_2, r_3 le tre rette. Per ogni retta fissiamo un verso e un'unità di misura. Dato un qualsiasi punto P dello spazio, si considera la retta s_1 che passa per P e interseca perpendicolarmente la retta r_1 : l'intersezione delle due rette costituisce la coordinata x_1 di P . Analogamente si fa con le altre rette determinando così le coordinate x_2 e x_3 di P . Il punto O e le coordinate (x_1, x_2, x_3) permettono di identificare in modo univoco il punto P . Chiamiamo *sistema di riferimento* l'insieme costituito dal punto O e dal sistema di coordinate x_1, x_2, x_3 . Il punto O prende il nome di *origine* e il sistema di riferimento è denotato $Ox_1x_2x_3$. Il sistema di riferimento si può quindi identificare con il sistema di coordinate cartesiane per lo spazio euclideo tridimensionale (cfr. il §1) rispetto alla base $\{e_x, e_y, e_z\}$, dove e_x, e_y, e_z sono tre versori diretti lungo le tre rette r_1, r_2, r_3 . Chiameremo le rette *assi cartesiani* (o *assi coordinati* o semplicemente *assi*): r_1 sarà l'*asse x*, r_2 l'*asse y*, e r_3 l'*asse z*. In altre parole, per fissare un sistema di riferimento, si può assegnare un punto O e una *terna* di versori ortogonali. Diremo che la terna $\{e_x, e_y, e_z\}$ è *levogira* se $e_z = e_x \wedge e_y$ ed è invece *destrogira* se $e_z = e_y \wedge e_x$. È usanza comune (a cui noi ci atterremo) usare terne levogire.

Si noti che, nel sistema di riferimento scelto, due vettori sono ortogonali se e solo se, quando essi siano applicati in uno stesso punto, le rette d'azione corrispondenti (cfr. l'osservazione 17.29) sono perpendicolari tra loro. Quindi vettori ortogonali formano un angolo $\pi/2$ tra loro.

Fissiamo dunque un sistema di riferimento $Ox_1x_2x_3$. Se i punti P_1 e P_2 sono individuati dai vettori \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 in \mathbb{R}^3 , rispettivamente (cfr. la figura 7.1), poiché la forza dipende dalla variabile $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, le equazioni del moto sono della forma

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \\ m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_2(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \end{cases} \quad (31.3)$$

dove \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 sono le forze che agiscono sul punto P_1 e sul punto P_2 , rispettivamente. Il *terzo principio della dinamica* (o *principio di azione e reazione*) afferma che la forza che il punto P_1 esercita sul punto P_2 ha la stessa direzione e verso opposto della forza che il punto P_2 esercita sul punto P_1 . Se le forze soddisfano il terzo principio, si ha allora $\mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = -\mathbf{F}_2(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$. Poiché la forza è diretta lungo la congiungente i due punti, deve risultare anche

$$\mathbf{F}_1(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (31.4)$$

per qualche funzione $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; la quantità F rappresenta l'intensità della forza \mathbf{F}_1 . Possiamo riscrivere le equazioni (31.3) come

$$m_1\ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (31.5a)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad (31.5b)$$

che sono dunque le equazioni del moto dei due punti nel caso di forze che verifichino le condizioni 1÷3 a pag. 335. Nel seguito supporremo sempre che sia F di classe C^1 , tranne eventualmente per $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Vedremo che il moto di un sistema della forma (31.5) può essere ricondotto allo studio di un sistema a un grado di libertà (sistema unidimensionale).

Definizione 31.4 (FORZA CENTRALE) *Sia P un punto materiale in \mathbb{R}^3 e sia \mathbf{F} la forza che agisce sul punto P . Diremo che \mathbf{F} è una forza centrale se dipende solo dalla distanza di P dall'origine ed è diretta lungo la retta che congiunge P all'origine. Il campo vettoriale corrispondente a una forza centrale si chiama campo centrale.*

Lemma 31.5 *Il sistema a 6 gradi di libertà (31.5) si disaccoppia in due problemi a 3 gradi di libertà, che descrivono uno un punto materiale che si muove di moto rettilineo uniforme e l'altro un punto materiale sottoposto a una forza centrale.*

Dimostrazione. Dividendo le due equazioni in (31.5) per m_1 e m_2 , rispettivamente, e sottraendole poi l'una dall'altra, otteniamo

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 - \ddot{\mathbf{x}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|),$$

che è un'equazione chiusa nella variabile $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ (i.e. dipende da \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 solo attraverso la combinazione $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$). Sommando invece le due equazioni in (31.5) otteniamo

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}.$$

Se definiamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \end{cases} \quad (31.6)$$

dove \mathbf{R} prende il nome di *coordinata del centro di massa* e \mathbf{r} di *coordinata relativa*, abbiamo che, nelle nuove variabili, le equazioni del moto diventano

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}, \quad (31.7a)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (31.7b)$$

così che la prima descrive un punto materiale di massa $M = m_1 + m_2$ che si muove di moto rettilineo uniforme (non essendo soggetto a forze), mentre la seconda si può interpretare come equazione del moto di un punto materiale di massa $\mu = m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-1}$ (che prende il nome di *massa ridotta*) sottoposta a una forza centrale. ■

§31.2 Discussione del moto relativo

Nel sistema del centro di massa (che si ottiene fissando $\mathbf{R} = \mathbf{0}$), il moto è descritto dalla coordinata relativa \mathbf{r} . Tale coordinata individua il vettore che va dall'origine alla posizione di un punto nello spazio, i.e. quello che usualmente si chiama *raggio vettore*.

Lemma 31.6 *Una forza centrale è conservativa.*

Dimostrazione. Dimostriamo che esiste una funzione $U(\mathbf{r})$ tale che

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r}).$$

Per il lemma 31.2 questo è sufficiente. Innanzitutto si noti che

$$\frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \frac{r_k}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}} = \frac{r_k}{|\mathbf{r}|}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Se definiamo $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $F(\rho) = -\partial V(\rho)/\partial \rho$ (basta che V sia, a meno del segno, una primitiva della funzione F), otteniamo

$$\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} V(|\mathbf{r}|) = -\frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} V(|\mathbf{r}|) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} V(|\mathbf{r}|),$$

da cui segue l'asserto, con $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$ che dipende solo dal modulo di \mathbf{r} . ■

Definizione 31.7 (ENERGIA POTENZIALE CENTRALE) *Data la forza centrale $F(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, si chiama energia potenziale centrale la funzione $V(|\mathbf{r}|)$ tale che $F(\rho) = -[dV/d\rho](\rho)$.*

Lemma 31.8 (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA) *L'energia totale*

$$E_{\text{TOT}} := \frac{1}{2}m_1|\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$$

del sistema descritto dalla (31.5) è una costante del moto.

Dimostrazione. Possiamo innanzitutto riscrivere, nelle variabili \mathbf{r}, \mathbf{R} ,

$$E_{\text{TOT}} := \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(|\mathbf{r}|),$$

come segue immediatamente dalla (31.6). L'asserto segue immediatamente dal fatto che la forza centrale è conservativa; si ha infatti

$$\frac{dE_{\text{TOT}}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \ddot{\mathbf{R}} + \mu \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \left(\mu \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \left(\mu \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} F(|\mathbf{r}|) \right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0,$$

dove si sono utilizzate le (31.7). ■

Lemma 31.9 (CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE) *Il momento angolare $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ del sistema descritto dalla (31.7b) è una costante del moto. Se $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ il moto ha luogo nel piano ortogonale a \mathbf{L} , se $\mathbf{L} = \mathbf{0}$ il moto avviene lungo una retta.*

Dimostrazione. Consideriamo il sistema descritto dalla (31.7b), che possiamo riscrivere

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{e}_r F(|\mathbf{r}|), \quad (31.8)$$

dove $\mathbf{e}_r := \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ e μ è la massa ridotta definita in (31.7b). La (31.8) descrive un punto materiale di massa μ sottoposto a una forza centrale. Il momento angolare del punto è $\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ (cfr. la definizione di momento angolare a pag. 334). È immediato verificare che il vettore \mathbf{L} è una costante del moto; infatti, per le proprietà del prodotto vettoriale (cfr. l'esercizio 7), si ha

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}} = \mu \dot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{e}_r F(|\mathbf{r}|) = \mathbf{0}. \quad (31.9)$$

Siano $\mathbf{r}(t_0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ i valori delle variabili $\mathbf{r}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t)$ all'istante iniziale $t = t_0$. Sono allora possibili due casi.

- Se risulta

$$\mathbf{r}(t_0) \wedge \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{0}, \quad (31.10)$$

o i due vettori $\mathbf{r}(t_0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ sono paralleli o almeno uno dei due è nullo. Se la (31.10) è soddisfatta, allora esistono due numeri reali a, b e un versore \mathbf{k} tali che

$$\mathbf{r}(t_0) = a\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}(t_0) = b\mathbf{k}. \quad (31.11)$$

Esisterà allora una soluzione della (31.8) della forma $\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{k}$, con $a(t_0) = a$ e $\dot{a}(t_0) = b$, con a o b eventualmente nulli ($a = 0$ è possibile solo se $F(r)$ è regolare in $r = 0$). Per verificarlo, semplicemente si può inserire la (31.11) nella (31.8), tenendo conto che $\mathbf{e}_r = \mathbf{k}$ e $|\mathbf{r}(t)| = |a(t)|$, e vedere che si ottiene

$$\mu \ddot{a}(t) = F(|a(t)|), \quad a(t_0) = a, \quad \dot{a}(t_0) = b,$$

che ammette soluzione unica sotto le ipotesi di regolarità fatte per F ; inoltre, per lo stesso motivo, la soluzione dell'equazione (31.8) è unica e quindi è data da $a(t)\mathbf{k}$. In conclusione, in corrispondenza di dati iniziali che verifichino la (31.10), il moto avviene lungo una retta (il caso di un punto di equilibrio si può considerare un caso particolare).

- Se al contrario si ha

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r}(t_0) \wedge \dot{\mathbf{r}}(t_0) \neq \mathbf{0},$$

per le proprietà del prodotto vettoriale (cfr. l'esercizio 5) i due vettori $\mathbf{r}(t_0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ sono ortogonali a \mathbf{L} . D'altra parte, essendo \mathbf{L} una costante del moto, si ha $\mu \mathbf{r}(t) \wedge \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{L} \forall t \in \mathbb{R}$, così che i due vettori $\mathbf{r}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t)$ devono essere ortogonali a \mathbf{L} in ogni istante $t \in \mathbb{R}$. Il moto quindi avviene nel piano ortogonale al momento angolare \mathbf{L} .

Questo completa la dimostrazione del lemma. ■

Lemma 31.10 *Il sistema descritto dalla (31.7b), nel caso in cui si abbia $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$, si disaccoppia in due sistemi unidimensionali, che descrivono uno il moto radiale e l'altro il moto angolare nel piano in cui ha luogo il moto. L'equazione del moto radiale è chiusa – i.e. dipende solo dalla variabile che descrive il moto radiale – e l'equazione del moto angolare può essere risolta per quadratura una volta che sia stata risolta la prima.*

Dimostrazione. Per il lemma 31.9 il sistema *a priori* tridimensionale (31.7b) è un sistema a due gradi di libertà: il moto si svolge in un piano. Scegliendo un sistema di coordinate in cui l'asse z è diretto lungo la direzione del vettore momento angolare, si ha $\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)$. Possiamo allora introdurre coordinate polari $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, ponendo $(r_1, r_2) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, ed esprimere il modulo del momento angolare in tali coordinate. Un semplice calcolo mostra che

$$\mathbf{L} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_1 & r_2 & 0 \\ \mu \dot{r}_1 & \mu \dot{r}_2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & 0 \\ \mu (\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta) & \mu (\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta) & 0 \end{pmatrix},$$

così che si ha $\mathbf{L} = (0, 0, L)$, dove

$$L := \mu\rho^2\dot{\theta}, \quad (31.12)$$

così che

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2}, \quad (31.13)$$

dove L è costante. Una volta che la dipendenza di $\rho(t)$ da t sia nota, la funzione $\theta(t)$ si ottiene per quadratura, i.e. come integrale di una funzione nota:

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^t ds \frac{L}{\mu\rho^2(s)}. \quad (31.14)$$

Il problema si è quindi ridotto allo studio dell'evoluzione della coordinata radiale $\rho(t)$ e, se facciamo vedere che l'equazione che ne regola il moto non dipende da θ , il lemma è dimostrato.

Utilizziamo il fatto che, per il lemma 31.8. l'energia è anch'essa una quantità conservata per il sistema (31.5). Poiché $\dot{\mathbf{R}}$ è costante (cfr. la (31.7a)) e $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\rho} \cos \theta - \rho\dot{\theta} \sin \theta, \dot{\rho} \sin \theta + \rho\dot{\theta} \cos \theta, 0)$, abbiamo che

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 + V(|\mathbf{r}|) = \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) + V(\rho) = \text{costante}, \quad (31.15)$$

dove $E := E_{\text{TOT}} - M|\dot{\mathbf{R}}|^2/2$. Introducendo la (31.13) nella (31.15) otteniamo

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho), \quad (31.16)$$

dove

$$V_{\text{eff}}(\rho) := V(\rho) + \frac{L^2}{2\mu\rho^2} \quad (31.17)$$

prende il nome di *energia potenziale efficace*. Derivando rispetto al tempo la (31.16) e dividendo per $\dot{\rho}$, otteniamo l'*equazione radiale*

$$\mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho}(\rho), \quad (31.18)$$

che si può interpretare come l'equazione di un punto materiale di massa μ che si muove sulla semiretta \mathbb{R}_+ con energia potenziale $V_{\text{eff}}(\rho)$, data dalla somma dell'energia potenziale originaria $V(\rho)$ più l'energia potenziale $L^2(2\mu\rho^2)^{-1}$. La forza corrispondente a quest'ultima prende il nome di *forza centrifuga*. ■

Osservazione 31.11 In coordinate polari una base (ortonormale) nel piano è costituita dal *versore radiale* e dal *versore tangenziale*, definiti, rispettivamente, come

$$\begin{cases} e_\rho = (\cos \theta, \sin \theta), \\ e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta). \end{cases} \quad (31.19)$$

Introduciamo, in \mathbb{R}^3 , i vettori $\mathbf{r} := (x, y, 0)$, $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$ e $\mathbf{a} := \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, 0)$, per indicare rispettivamente la posizione, velocità e l'accelerazione di un punto materiale che si muova sul piano. Si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta, \\ \ddot{x} = \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta}^2 \cos \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta, \\ \ddot{y} = \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta - \rho\ddot{\theta}^2 \sin \theta + \rho\ddot{\theta} \cos \theta. \end{cases}$$

Se poniamo $\mathbf{e}_\rho := (\cos \theta, -\sin \theta, 0)$ ed $\mathbf{e}_\theta := (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, possiamo esprimere i due vettori \mathbf{v} e \mathbf{a} come

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta.$$

Notiamo anche che si ha

$$\mathbf{L} = \mu \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \mu \rho \mathbf{e}_\rho \wedge (\dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = \mu \rho \mathbf{e}_\rho \wedge \rho \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \mu \rho^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_\rho \wedge \mathbf{e}_\theta = \mu \rho^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z,$$

dove \mathbf{e}_z è il versore (ortogonale al piano in cui si svolge il moto) tale che $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ forma una base ortonormale in \mathbb{R}^3 . Se indichiamo con a_ρ e a_θ le componenti radiale e tangenziale, rispettivamente, del vettore accelerazione e con F_ρ e F_θ le componenti radiale e tangenziale, rispettivamente, della forza, l'equazione del moto (31.8) diventa

$$\begin{cases} \mu a_\rho = \mu(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = F_\rho = -\frac{dV}{d\rho}, \\ \mu a_\theta = \mu(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) = F_\theta = 0, \end{cases} \quad (31.20)$$

poiché la forza è diretta lungo la direzione radiale. In particolare la seconda equazione in (31.20), moltiplicata per ρ , diventa

$$0 = 2\mu\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \mu\rho^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} (\mu\rho^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt},$$

così che ritroviamo la conservazione del momento angolare (cfr. le (31.9) e (31.12)).

Osservazione 31.12 A partire dal sistema (31.5), il fatto che i due punti materiali interagiscano attraverso forze che soddisfino le condizioni 1÷3 a pag. 335 consente di passare da un sistema a 6 gradi di libertà a due sistemi disaccoppiati a 3 gradi di libertà ciascuno, uno dei quali è caratterizzato da un moto banale, mentre l'altro richiede ancora un po' di discussione: tale è il contenuto del lemma 31.10. Questa fatto è legato alla conservazione della quantità di moto totale del sistema $\mathbf{p} := \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2$, espressa dalla prima equazione di (31.7). Inoltre, la conservazione della direzione del momento angolare implica che il moto si svolge su un piano (lemma 31.9) e la conservazione del modulo del momento angolare permette di studiare separatamente il moto radiale e il moto angolare: il primo si risolve utilizzando la

conservazione dell'energia, mentre il secondo si ottiene successivamente per quadratura (lemma 31.10). Si vede quindi che la riduzione dei gradi di libertà (da 3 a 2, da 2 a 1) è legata all'esistenza di quantità conservate. Questo è un risultato generale, noto come teorema di Noether (cfr. il capitolo 13).

Osservazione 31.13 La forza centrifuga

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = F_{\text{cf}} \mathbf{e}_r, \quad F_{\text{cf}} = -\frac{d}{d\rho} \left(\frac{L^2}{2\mu\rho^2} \right) = \frac{L^2}{\mu\rho^3}, \quad (31.21)$$

dovuta al termine aggiuntivo $L^2(2\mu\rho^2)^{-1}$ che appare nell'energia potenziale efficace (31.17), è di fatto una forza apparente (cfr. il §35 per maggiori dettagli). Infatti il vettore $\mathbf{r}(t)$ individua il punto di posizione $\mathbf{x}_1(t)$ nel sistema di riferimento in cui il punto di posizione $\mathbf{x}_2(t)$ è fermo. Tale sistema di riferimento non è inerziale, con conseguente comparsa di forze apparenti.

Lemma 31.14 *In corrispondenza della soluzione $\rho(t) = \rho_0$ dell'equazione radiale (31.18), con ρ_0 punto stazionario di V_{eff} , si ha un moto periodico per il sistema descritto dall'equazione (31.8), con periodo*

$$T_0 = 2\pi \frac{\mu\rho_0^2}{L}, \quad (31.22)$$

che corrisponde a un moto circolare uniforme.

Dimostrazione. Se ρ_0 è un punto stazionario di $V_{\text{eff}}(\rho)$ allora $(\rho_0, 0)$ è un punto di equilibrio per il sistema (31.18) e quindi, fissato il dato iniziale $(\rho(0), \dot{\rho}(0)) = (\rho_0, 0)$, si ha $\rho(t) = \rho_0$ per ogni t . Ne segue che l'equazione (31.13) può essere immediatamente integrata e dà

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega_0 t, \quad \omega_0 := L/\mu\rho_0^2, \quad (31.23)$$

da cui segue l'asserto. ■

Lemma 31.15 *Se*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^2 V(\rho) = 0, \quad (31.24)$$

allora esiste un valore $\rho_{\min} > 0$ tale che $\rho(t) \geq \rho_{\min} \forall t$.

Dimostrazione. Poiché $V_{\text{eff}}(\rho)$ è data dalla (31.17), se vale la (31.24), risulta

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty,$$

e quindi, fissato $E_0 > \inf_{\rho \in \mathbb{R}_+} V_{\text{eff}}(\rho)$, se ρ_{\min} indica la più piccola radice dell'equazione $E_0 - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$, si deve avere $\rho \geq \rho_{\min}$. ■

Osservazione 31.16 La condizione (31.24) è soddisfatta per ogni funzione $V(\rho)$ che sia regolare in $\rho = 0$. Un altro caso importante in cui tale condizione è soddisfatta è il caso dell'energia potenziale gravitazionale che sarà studiato in dettaglio nel §32.2.

Lemma 31.17 *Condizione necessaria e sufficiente perché l'orbita di un moto centrale sia chiusa è che si verifichi uno dei due casi seguenti:*

1. la variabile radiale è costante;
2. la variabile radiale ha moto periodico e, se T_0 è il periodo di tale moto, l'incremento $\Delta\theta$ della variabile angolare nell'intervallo di tempo $[0, T_0]$ è un multiplo razionale di 2π (i.e. $\Delta\theta$ e 2π sono commensurabili).

Nel caso 2, la variabile θ varia di una quantità $\Delta\theta$ in ogni intervallo di tempo di ampiezza T_0 e il periodo del moto complessivo (i.e. della variabile relativa \mathbf{r}) è dato da NT_0 , dove N è l'intero minimo tale che $N\Delta\theta = 2\pi M$, con M intero.

Dimostrazione. Il caso in cui $\rho(t)$ sia costante è stato discusso nel lemma 31.14. Se il moto della variabile radiale $\rho(t)$ è periodico, allora essa varia tra un valore minimo ρ_1 e un valore massimo ρ_2 . Se $\rho(t_0) = \rho_2$ allora si ha $\rho(t_0 + T_0) = \rho_2$, dove T_0 indica il periodo della funzione $t \mapsto \rho(t)$. Durante il tempo T_0 la variabile angolare $\theta(t)$ subisce un incremento

$$\Delta\theta := \theta(t_0 + T_0) - \theta(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T_0} ds \dot{\theta}(s) = \int_{t_0}^{t_0+T_0} ds \frac{L}{\mu\rho^2(s)}.$$

Tale incremento sarà positivo se $L > 0$ e negativo se $L < 0$. Il caso $L = 0$ va escluso perché corrisponde a un moto rettilineo uniforme, in accordo con il lemma 31.9 (cfr. la figura 7.2).

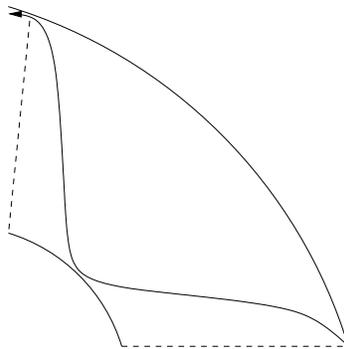


Figura 7.2: Incremento della variabile angolare in un periodo del moto radiale. Il moto avviene all'interno della corona circolare di raggi ρ_1 e ρ_2 , se ρ_1 e ρ_2 sono i valori tra i quali oscilla $\rho(t)$.

Nel tempo NT_0 , con $N \in \mathbb{N}$, la variazione di $\theta(t)$ è data da

$$\theta(NT_0) - \theta(0) = N\Delta\theta.$$

Se $\Delta\theta = 2\pi M/N$ con $M, N \in \mathbb{N}$, risulta allora

$$\theta(NT_0) = \theta(0) + N\Delta\theta = \theta(0) + 2\pi M$$

e quindi $\theta(NT_0) = \theta(0)$ se si tiene conto che $\theta(t)$ è definita mod 2π ; inoltre $\dot{\theta}(NT_0) = \dot{\theta}(0)$, che segue sempre dalla (31.14). Ne segue che il moto di $\mathbf{r}(t)$ è periodico, di periodo NT_0 (cfr. la figura 7.3). ■

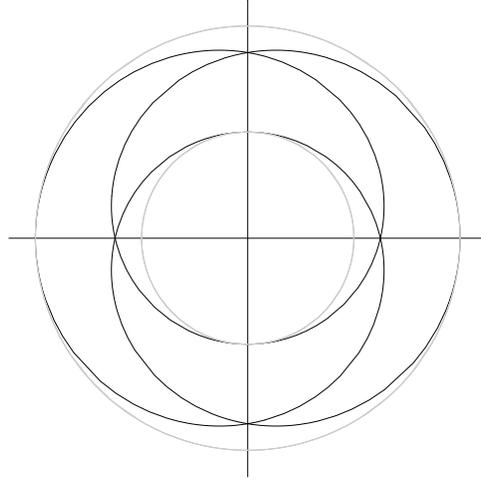


Figura 7.3: Discussione del lemma 31.17: $\Delta\Theta/2\pi$ razionale (nel caso rappresentato $M = 3$ e $N = 2$).

Osservazione 31.18 La quantità $\Delta\theta$ dipende solo dalla traiettoria, non dal punto iniziale scelto. In altre parole, $\theta(t_0 + T_0) - \theta(t_0)$ è indipendente da t_0 . Questo segue dal fatto che $\rho(t)$ è periodica di periodo T_0 . Infatti, se scriviamo $g(t) := L(\mu\rho^2(t))^{-1}$ per semplicità, si ha

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} ds g(s) &= \int_0^{T_0} ds g(s) + \int_{T_0}^{t_0+T_0} ds g(s) - \int_0^{t_0} ds g(s) \\ &= \int_0^{T_0} ds g(s) + \int_{T_0}^{t_0+T_0} ds g(s - T_0) - \int_0^{t_0} ds g(s) \\ &= \int_0^{T_0} ds g(s) + \int_0^{t_0} ds g(s) - \int_0^{t_0} ds g(s) = \int_0^{T_0} ds g(s), \end{aligned}$$

dove si è usata la periodicità della funzione $g(t)$, così che abbiamo, indipendentemente da t_0 ,

$$\Delta\theta = \theta(t_0 + T_0) - \theta(t_0) = \int_0^{T_0} ds \frac{L}{\mu\rho^2(s)}.$$

Lemma 31.19 *In un campo centrale, se il moto della variabile radiale è periodico e il suo incremento $\Delta\theta$ in un periodo è tale che $\Delta\theta/2\pi$ è irrazionale, allora l'orbita non si chiude mai. Il moto corrispondente si dice quasiperiodico.*

Dimostrazione. Con le notazioni usate nella dimostrazione del lemma 31.17, se risulta $\Delta\theta = 2\pi\alpha$, con α irrazionale, allora non esiste nessun intero N tale che $\theta(NT_0) - \theta(0)$ sia un multiplo di 2π . Dunque il moto di $\theta(t)$ non può essere periodico con periodo multiplo di T_0 e il moto complessivo di $\mathbf{r}(t)$ non è periodico (cfr. la figura 7.4). ■

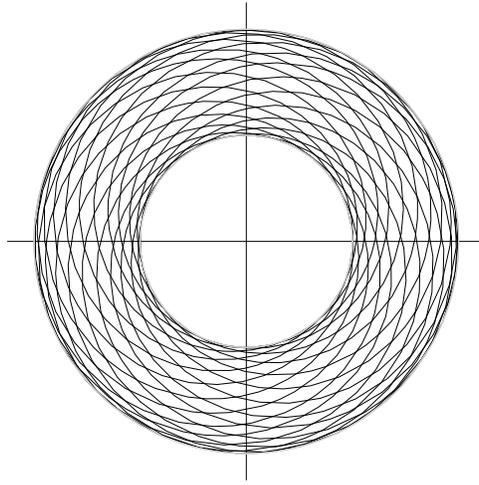


Figura 7.4: Discussione del lemma 31.19: $\Delta\theta/2\pi$ irrazionale. La traiettoria riempie densamente la corona circolare $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$: in figura solo un tratto limitato della traiettoria è graficato.

Lemma 31.20 *Se $L \neq 0$, l'orbita su cui si svolge il moto in un campo centrale è data dall'equazione*

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}, \quad (31.25)$$

che prende il nome di prima forma dell'equazione delle orbite. Posto $u = 1/\rho$, la (31.25) si può riscrivere come

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu}{L^2} \frac{d}{du} \left[V \left(\frac{1}{u} \right) \right], \quad (31.26)$$

che prende il nome di seconda forma dell'equazione delle orbite.

Dimostrazione. Se $L \neq 0$, per la (31.13) il segno di $|\dot{\theta}(t)|$ è strettamente positivo, quindi θ è monotono in t tra 0 e 2π (crescente se $L > 0$ e decrescente se $L < 0$). La funzione $\theta = \theta(t)$ è

allora invertibile in $t = t(\theta)$. Possiamo perciò parametrizzare la traiettoria in funzione dell'angolo θ anziché del tempo t , scrivendo, con abuso di notazione, $\rho(t) = \rho(t(\theta)) = \rho(\theta)$. Poiché dalle (31.13) e (31.16) risulta

$$\frac{d\rho}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu\rho^2},$$

possiamo scrivere

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\theta},$$

da cui segue la (31.25).

Sempre assumendo $L \neq 0$, poniamo ora $u = 1/\rho$ e ricordiamo che $\dot{\theta} = L(\mu\rho^2)^{-1} = Lu^2/\mu$ (cfr. la (31.13)). Poiché le funzioni $\theta = \theta(t)$ e $u = u(\rho)$ sono invertibili, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta} \left[u^2 \left(\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right] = -\frac{d}{d\theta} \left[u^2 \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right) \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[\dot{\theta} \frac{d\rho}{d\theta} \right] \\ &= -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{d\theta} \right] = -\frac{\mu}{L} \frac{d}{d\theta} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mu}{L} \frac{dt}{d\theta} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu}{L\dot{\theta}} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{\mu^2}{L^2u^2} \ddot{\rho}. \end{aligned}$$

Allora, utilizzando l'identità

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \frac{dV_{\text{eff}}}{du} \frac{du}{d\rho} = -u^2 \frac{dV_{\text{eff}}}{du},$$

possiamo scrivere l'equazione radiale (31.18) nella forma

$$-\frac{L^2u^2}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2} = \mu\ddot{\rho} = -\frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = u^2 \frac{dV_{\text{eff}}}{du},$$

che implica la (31.26). ■

§32 Campo centrale armonico e campo centrale gravitazionale

Nel presente paragrafo studieremo in dettaglio il *campo centrale armonico* e il *campo centrale gravitazionale* (ovvero il *campo centrale coulombiano* attrattivo), che corrispondono a un'energia potenziale centrale della forma

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2, \quad V(\rho) = -\frac{k}{\rho},$$

rispettivamente, per qualche costante positiva k . Vedremo nel paragrafo successivo che essi sono gli unici campi centrali in cui tutte le orbite limitate siano chiuse.

Al di là di tale (notevole) proprietà, il campo centrale armonico e il campo centrale gravitazionale rivestono un ruolo particolarmente importante in fisica e meritano uno studio particolare. Per una discussione più approfondita della rilevanza di tali campi centrali rimandiamo ai testi elencati nella nota bibliografica.

§32.1 Campo centrale armonico

Lemma 32.1 *Sia $V(\rho) = k\rho^2/2$, con $k > 0$ costante. Se $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ tutte le orbite sono chiuse e limitate e hanno la forma di un'ellisse.*

Dimostrazione. L'energia potenziale efficace è data da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}, \quad (32.1)$$

che ha un unico minimo in

$$\rho_0 := \left(\frac{L^2}{k\mu}\right)^{1/4}, \quad (32.2)$$

in corrispondenza del quale si ha

$$V_{\text{eff}}(\rho_0) = E_0 := \sqrt{\frac{kL^2}{\mu}}. \quad (32.3)$$

Inoltre $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$ e $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$: quindi per ogni valore dell'energia $E > E_0$, l'equazione $E - V_{\text{eff}}(\rho)$ ha due radici ρ_1 e ρ_2 , date da

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{E}{k}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{E}{k}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}}, \quad (32.4)$$

dove E_0 è definito in (32.3) (cfr. la figura 7.5).

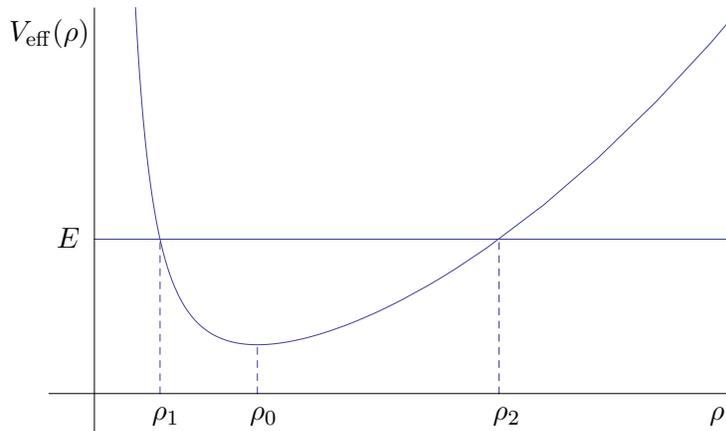


Figura 7.5: Grafico dell'energia potenziale efficace (32.1).

Il piano delle fasi corrispondente è rappresentato nella figura 7.6.

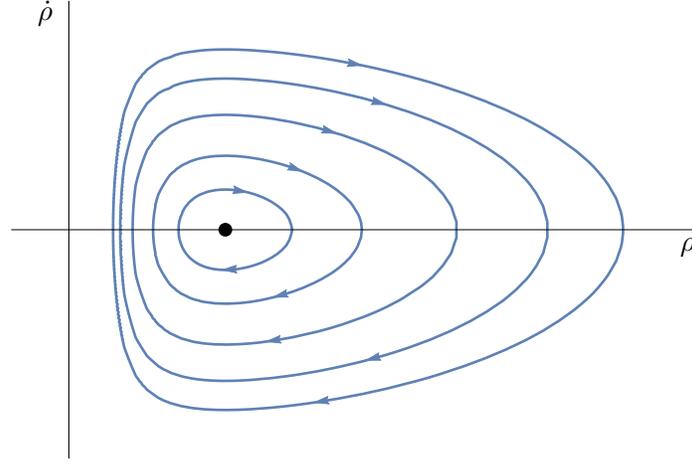


Figura 7.6: Piano delle fasi per il sistema con energia potenziale efficace (32.1).

Dalle (31.25) e (32.1) otteniamo

$$\theta - \bar{\theta} = \int_{\bar{\rho}}^{\rho(\theta)} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{(2\mu E/L^2) - \rho^{-2} - \rho^2 \rho_0^{-4}}}, \quad (32.5)$$

se $(\bar{\theta}, \bar{\rho})$ è il dato iniziale, scelto in modo tale che valga il segno + in (31.25), e θ è tale che $\rho(\theta')$ si mantiene minore di ρ_2 per ogni $\bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$. Attraverso la sostituzione $\rho = 1/\sqrt{w}$, riscriviamo la (32.5) come

$$\theta - \bar{\theta} = - \int_{\bar{w}}^{w(\theta)} dw \frac{1}{2\sqrt{(2\mu E w/L^2) - \rho_0^{-4} - w^2}} = \frac{1}{2} \int_{w(\theta)}^{\bar{w}} dw \frac{1}{\sqrt{(w - w_1)(w_2 - w)}}, \quad (32.6)$$

dove

$$\bar{w} = \frac{1}{\bar{\rho}^2}, \quad w(\theta) = \frac{1}{\rho^2(\theta)}, \quad w_1 = \frac{1}{\rho_2^2}, \quad w_2 = \frac{1}{\rho_1^2},$$

con $w_1 \leq \bar{w} \leq w_2$ e $\bar{w} = w(0)$. Se scegliamo l'asse polare (i.e. la retta a partire dal quale è calcolato l'angolo θ) in modo che sia $\rho(\theta) = \rho_1$ per $\theta = \bar{\theta} = 0$ e quindi $\bar{w} = w(0) = w_2$, la (32.6) dà

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{w(\theta)}^{w_2} \frac{dw}{\sqrt{(w - w_1)(w_2 - w)}}. \quad (32.7)$$

Operando i cambiamenti di variabili $z = w - w_1$ e, poi, $x = (w_2 - w_1)^{-1}z$, la (32.7) diventa

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{w(\theta) - w_1}^{w_2 - w_1} \frac{dz}{\sqrt{z(w_2 - w_1 - z)}} = \frac{1}{2} \int_{x(\theta)}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad (32.8)$$

dove $x(\theta) = (w(\theta) - w_1)/(w_2 - w_1)$. La sostituzione $x = \sin^2 \alpha$ in (32.8) dà

$$\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha(\theta)}^{\pi/2} d\alpha \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)}} = \int_{\alpha(\theta)}^{\pi/2} d\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha(\theta),$$

dove

$$\alpha(\theta) = \arcsin \sqrt{x(\theta)} = \arcsin \sqrt{\frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1}} \implies \frac{\pi}{2} - \theta = \arcsin \sqrt{\frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1}},$$

da cui si ottiene

$$\cos^2 \theta = \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{w(\theta) - w_1}{w_2 - w_1} = \left(\frac{1}{\rho_1^2(\theta)} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right)^{-1},$$

i.e., tenendo conto che $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$,

$$\frac{1}{\rho^2(\theta)} = \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) (1 + \cos 2\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \cos 2\theta. \quad (32.9)$$

Si verifica facilmente a partire dalle (32.4) che

$$\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) = \frac{2kE}{E_0^2}, \quad \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) = \frac{2kE}{E_0^2} \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2},$$

così che la (32.9) dà

$$\frac{1}{\rho^2(\theta)} = \frac{kE}{E_0^2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2} \cos 2\theta \right) = \frac{\mu E}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2} \cos 2\theta \right), \quad (32.10)$$

dove si è usata la definizione di E_0 in (32.3). Se definiamo

$$A^2 := \frac{E_0^2}{kE} = \frac{L^2}{\mu E}, \quad e := \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2}, \quad (32.11)$$

riscriviamo la (32.10) nella forma

$$\rho(\theta) = \frac{A}{\sqrt{1 + e \cos 2\theta}}. \quad (32.12)$$

La (32.12), ottenuta sotto la condizione che fosse $\rho(\theta') \leq \rho_2$ per ogni $0 = \bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$, vale in realtà per ogni valore di θ , come si può espressamente verificare. La (32.12) è l'equazione di un'ellisse con semiassi di lunghezza ρ_1 e ρ_2 (cfr. la figura 7.7).

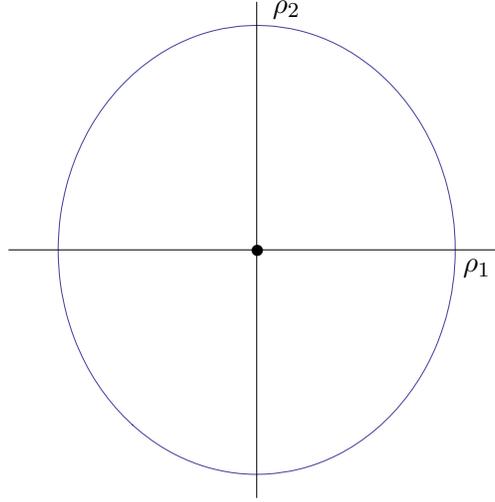


Figura 7.7: Campo centrale armonico: orbita ellittica (con le notazioni del lemma 31.17, $\Delta\theta/2\pi = 1/2$).

Infatti in coordinate cartesiane, tenendo conto che

$$\rho^2 = r_1^2 + r_2^2, \quad \rho^2 \cos 2\theta = \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r_1^2 - r_2^2,$$

con $\rho = \rho(\theta)$, si ha dalla (32.12)

$$A^2 = \rho^2 (1 + e \cos 2\theta) = (r_1^2 + r_2^2) + e (r_1^2 - r_2^2),$$

da cui si ricava

$$\frac{r_1^2}{A^2} (1 + e) + \frac{r_2^2}{A^2} (1 - e) = 1. \quad (32.13)$$

Poiché $e < 1$, la (32.13) è a vista l'equazione di un'ellisse con centro nell'origine e semiassi di lunghezza $a = A/\sqrt{1-e}$ e $b = A/\sqrt{1+e}$. Un semplice conto dimostra che le lunghezze a e b dei semiassi sono

$$a = \sqrt{\frac{L^2}{\mu E} \frac{1}{\sqrt{1-e}}} = \sqrt{\frac{L^2}{\mu E} \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e^2}}} = \sqrt{\frac{E}{k}} \sqrt{1+e} = \rho_2,$$

$$b = \sqrt{\frac{L^2}{\mu E} \frac{1}{\sqrt{1+e}}} = \sqrt{\frac{L^2}{\mu E} \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1-e^2}}} = \sqrt{\frac{E}{k}} \sqrt{1-e} = \rho_1,$$

dove si sono usate le (32.4), mentre l'eccentricità ε è data da

$$\varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{2e}{1+e}}.$$

Il lemma è dimostrato. ■

Osservazione 32.2 Se avessimo utilizzato fin dal principio coordinate cartesiane per il moto nel piano ortogonale al momento angolare \mathbf{L} (che stiamo supponendo diverso da zero) la discussione sarebbe stata più semplice. Infatti in coordinate cartesiane (nel piano su cui si svolge il moto) il sistema ha energia

$$E = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + \frac{1}{2}k (r_1^2 + r_2^2) \quad (32.14)$$

e le equazioni del moto sono disaccoppiate:

$$\begin{cases} \mu \ddot{r}_1 = -kr_1, \\ \mu \ddot{r}_2 = -kr_2. \end{cases} \quad (32.15)$$

Scegliamo i dati iniziali nella forma (cfr. l'esercizio 6 per vedere che questo è possibile)

$$r_1(0) = \rho_1, \quad r_2(0) = 0, \quad \dot{r}_1(0) = 0, \quad \dot{r}_2(0) = v_0, \quad (32.16)$$

dove v_0 è tale che

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}k\rho_1^2 = E,$$

se E è l'energia (32.14). La soluzione delle (32.15), tenuto conto dei dati iniziali (32.16), è

$$r_1(t) = \rho_1 \cos \omega t, \quad r_2(t) = (v_0/\omega) \sin \omega t, \quad (32.17)$$

dove $\omega := \sqrt{k/\mu}$. Si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{\omega} &= \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{1}{2}k\rho_1^2 \right) \frac{\mu}{k}} = \sqrt{\frac{2E}{k} - \rho_1^2} \\ &= \sqrt{\frac{2E}{k} - \frac{E}{k} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2} \right)} = \sqrt{\frac{E}{k} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2} \right)} = \rho_2, \end{aligned}$$

dove si sono utilizzate le definizioni (32.4) di ρ_1 e ρ_2 . Possiamo allora riscrivere le (32.17) come

$$r_1(t) = \rho_1 \cos \omega t, \quad r_2(t) = \rho_2 \sin \omega t \quad \implies \quad \frac{r_1^2}{\rho_1^2} + \frac{r_2^2}{\rho_2^2} = 1, \quad (32.18)$$

che è appunto l'equazione di un'ellisse con semiassi di lunghezza ρ_1 e ρ_2 . Notiamo che la scelta dei dati iniziali è consistente con la scelta dell'asse polare fatta prima della (32.7). Le stesse conclusioni ottenute lavorando in coordinate polari si possono quindi trovare – molto più rapidamente – lavorando direttamente in coordinate cartesiane. Questo dimostra che le coordinate cartesiane sono coordinate “più naturali” nel caso del campo centrale armonico. Se da una parte la discussione è più semplice lavorando in coordinate cartesiane, dall'altra lavorare in coordinate polari può essere considerato un utile esercizio in cui si vede come la teoria sviluppata nel §31 sia applicata in un caso che si sa risolvere esplicitamente.

Corollario 32.3 *In un campo centrale armonico tutte le orbite sono ellissi con centro l'origine.*

Dimostrazione. Segue dal lemma 32.1, in particolare dalla (32.13)coulombia che esprime l'orbita come equazione di un'ellisse con centro l'origine. ■

§32.2 Campo centrale gravitazionale

Lemma 32.4 *Sia $V(\rho) = -k/\rho$, con $k > 0$ costante. Se $\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$ allora tutte le orbite limitate sono chiuse e hanno la forma di un'ellisse.*

Dimostrazione. L'energia potenziale efficace corrispondente è data da

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\frac{k}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}. \quad (32.19)$$

Poiché vale la (31.24), il lemma 31.15 implica $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$ (cfr. anche l'osservazione 31.16). Inoltre $V_{\text{eff}}(\rho)$ ha un unico minimo in

$$\rho_0 := \frac{L^2}{\mu k}, \quad (32.20)$$

in corrispondenza del quale si ha

$$V_{\text{eff}}(\rho_0) = E_0 := -\frac{\mu k^2}{2L^2}. \quad (32.21)$$

Infine, $V_{\text{eff}}(\rho)$ ha un unico zero, in $\rho = \rho_0/2$, e si ha $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^-$ (cfr. la figura 7.8).

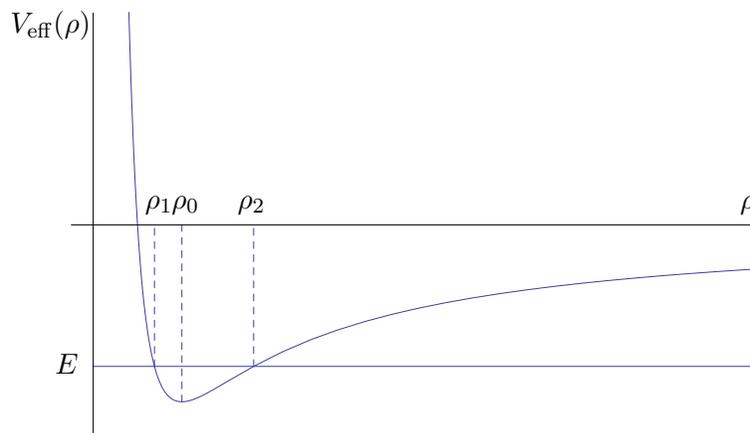


Figura 7.8: Grafico dell'energia potenziale efficace (32.19).

Indichiamo con E l'energia totale del moto radiale, i.e.

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 - \frac{k}{\rho} + \frac{L^2}{2\mu\rho^2}. \quad (32.22)$$

Se $E = E_0$ si ha un moto circolare uniforme (cfr. il lemma 31.14). Se $0 > E > E_0$ le orbite descritte da $\rho(t)$ sono chiuse e le corrispondenti traiettorie sono periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$: $\rho(t)$ oscilla tra un valore minimo ρ_1 e un valore massimo ρ_2 , dove

$$\rho_1 = \frac{L^2}{\mu k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right)^{-1} = \rho_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}} \right)^{-1}, \quad (32.23a)$$

$$\rho_2 = \frac{L^2}{\mu k} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right)^{-1} = \rho_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}} \right)^{-1} \quad (32.23b)$$

sono le radici dell'equazione $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Se $E = 0$ si ha $\rho(t) \geq \rho_0/2$ e si ha un'orbita aperta tale che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \rho(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{\rho}(t) = 0^\pm.$$

Se $E > 0$ si ha $\rho(t) \geq \rho_1$, dove ρ_1 è ancora dato dalla (32.23a), e si ha sempre un'orbita aperta tale che

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \rho(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \dot{\rho}(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{\mu}}.$$

Il piano delle fasi corrispondente è rappresentato nella figura 7.9.

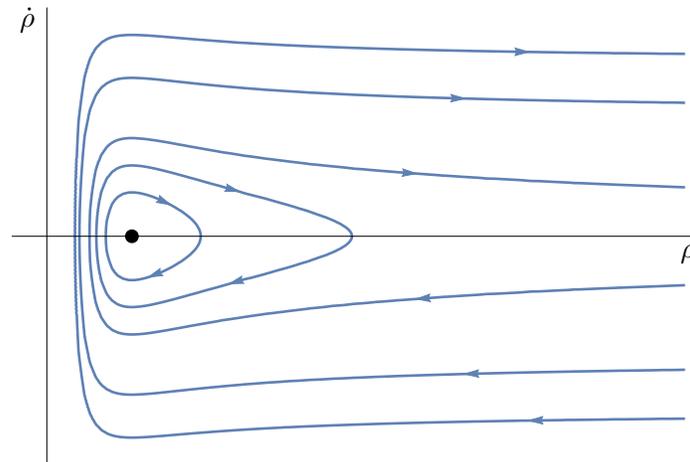


Figura 7.9: Piano delle fasi per il sistema con energia potenziale efficace (32.19).

Per determinare la forma delle orbite possiamo procedere come segue. Dalla (31.25) si ha

$$\theta - \bar{\theta} = \int_{\bar{\rho}}^{\rho(\theta)} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{1}{\rho^2} + 2\frac{1}{\rho_0 \rho}}},$$

se $(\bar{\theta}, \bar{\rho})$ è il dato iniziale, scelto in modo tale che valga il segno + in (31.25), e θ è tale che $\rho(\theta')$ si mantiene minore di ρ_2 per ogni $\bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$. Scegliamo l'asse polare in modo che sia $\rho(\theta) = \rho_1$ per $\theta = \bar{\theta} = 0$. Notiamo che ρ_1 è definito per ogni valore di $E \geq E_0$ ed è sempre dato dalla (32.23a), tenendo conto che essa si riduce a $\rho_1 = \rho_0/2$ per $E = 0$. Operando la sostituzione

$$\rho = \frac{1}{w},$$

si ha, utilizzando la scelta del dato iniziale sopra indicata,

$$\theta = \theta - \bar{\theta} = - \int_{w_2}^{w(\theta)} dw \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - w^2 + 2\frac{w}{\rho_0}}} = \int_{w(\theta)}^{w_2} dw \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - w^2 + 2\frac{w}{\rho_0}}}, \quad (32.24)$$

dove $w_1 = 1/\rho_2$ e $w_2 = 1/\rho_1$. Ponendo

$$A := \frac{2\mu E}{L^2}, \quad B := \frac{1}{\rho_0} = \frac{\mu k}{L^2},$$

e scrivendo

$$\begin{aligned} \frac{2\mu E}{L^2} - w^2 + 2\frac{w}{\rho_0} &= A + 2Bw - w^2 = A - (w - B)^2 + B^2 \\ &= (A + B^2) - (w - B)^2 = (A + B^2) \left[1 - \left(\frac{w - B}{\sqrt{A + B^2}} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

si vede che, attraverso la sostituzione

$$z = \frac{w - B}{\sqrt{A + B^2}} = \frac{(w/B) - 1}{\sqrt{1 + A/B^2}} = \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2} \right)^{-1/2} \left(\frac{L^2}{\mu k} w - 1 \right),$$

la (32.24) diventa

$$\theta = \int_{z(\theta)}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (32.25)$$

dove

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{L^2}{\mu k} w_2 - 1\right) = \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{L^2}{\mu k \rho_1} - 1\right) \\ &= \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}\right)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

La (32.25) si integra immediatamente. Ponendo $z = \cos \alpha$, così che $\alpha(\theta) = \arccos z(\theta)$ e

$$\theta = \int_{z(\theta)}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = - \int_{\alpha(\theta)}^{\alpha_2} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}} = \int_{\alpha_2}^{\alpha(\theta)} d\alpha.$$

Tenendo conto che

$$\alpha_2 = \arccos z_2 = \arccos 1 = 0,$$

si ottiene

$$\theta = \alpha(\theta) - \alpha_2 = \arccos z(\theta) = \arccos \left[\left(1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{L^2}{\mu k \rho(\theta)} - 1\right) \right]. \quad (32.26)$$

Se definiamo

$$p := \frac{L^2}{\mu k} = \rho_0, \quad e := \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{E_0}}, \quad (32.27)$$

possiamo scrivere la (32.26) nella forma

$$\theta = \arccos \left[\frac{1}{e} \left(\frac{p}{\rho(\theta)} - 1 \right) \right],$$

ed esplicitare $\rho = \rho(\theta)$ in termini di θ come

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta). \quad (32.28)$$

La (32.28), ottenuta sotto la condizione che fosse $\rho(\theta') \leq \rho_2$ per ogni $0 = \bar{\theta} \leq \theta' \leq \theta$, vale per ogni valore di θ , come è facile verificare (cfr. l'analoga discussione riguardo alla (32.12)).

Se scriviamo la (32.28) come

$$\rho = p - e\rho \cos \theta = p - er_1,$$

otteniamo

$$\rho^2 = r_1^2 + r_2^2 = p^2 + e^2 r_1^2 - 2per_1$$

e quindi

$$(1 - e^2) r_1^2 + r_2^2 + 2per_1 - p^2 = 0. \quad (32.29)$$

La (32.29) è l'equazione di una *conica* (cfr. l'esercizio 7) con eccentricità e e un fuoco nell'origine (cfr. i corollari 32.7 e 32.8 più avanti). La conica è un'ellisse se $e \in [0, 1)$, una parabola se $e = 1$ e un'iperbole se $e \in (1, \infty)$. L'orbita è limitata solo se $e < 1$ e in tale caso è chiusa essendo un'ellisse. ■

Osservazione 32.5 Per determinare la forma delle orbite si può anche procedere nel modo seguente. Se poniamo $u = 1/\rho$, la seconda forma dell'equazione delle orbite (31.26) diventa

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{k\mu}{L^2},$$

la cui soluzione è data dalla somma dell'integrale dell'equazione omogenea associata $u = A \cos(\theta - \theta_0)$ più una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $u = 1/p$, dove $p = L^2/k\mu = \rho_0$. La soluzione $u = 1/p$ corrisponde all'unica orbita circolare di raggio $\rho_0 = p$ (unica perché è unico il punto di minimo dell'energia potenziale efficace). Scrivendo la costante A come $A = e/p = e/\rho_0$, abbiamo allora

$$\frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1}{p} (1 + e \cos(\theta - \theta_0)),$$

che è l'equazione (32.28) se si sceglie $\theta = 0$.

Osservazione 32.6 La forza di energia potenziale $V(\rho) = -k/\rho$ è attrattiva se $k > 0$ e repulsiva se $k < 0$. Il caso attrattivo descrive un campo centrale *gravitazionale* (attrazione tra due corpi massivi) o *coulombiano attrattivo* (interazione tra due cariche elettriche di segno opposto), mentre il caso repulsivo descrive solo un campo centrale *coulombiano repulsivo* (interazione tra due cariche elettriche aventi lo stesso segno). Se $k = Gm_1m_2$, dove $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ è la *costante di gravitazione universale* e m_1, m_2 sono le masse dei due corpi, chiamiamo V *energia potenziale gravitazionale* e la forza corrispondente *forza gravitazionale*. Se $k = \kappa_e q_1 q_2$, dove $\kappa_e = 8.99 \times 10^9 \text{ kg m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ C}^{-2}$ è la *costante di Coulomb* e q_1, q_2 sono le cariche elettriche dei due corpi, chiamiamo V *energia potenziale coulombiana* e la forza corrispondente *forza coulombiana*.

Corollario 32.7 *Nel caso di un campo centrale gravitazionale tutte le orbite chiuse sono ellissi con uno dei fuochi nell'origine.*

Dimostrazione. Segue dal lemma 32.4, in particolare dalla (32.29), che l'orbita è un'ellisse. Tenendo conto che non compaiono termini misti, i.e. che dipendano simultaneamente da r_1 e r_2 , Possiamo portare facilmente l'equazione (32.29) in *forma canonica* a meno di una traslazione, i.e. nella forma

$$\frac{(r_1 - r_{01})^2}{a^2} + \frac{(r_2 - r_{02})^2}{b^2} = 1, \quad (32.30)$$

scrivendo la (32.29) come

$$\frac{(1-e^2)^2}{p^2} \left(r_1 + \frac{pe}{1-e^2} \right)^2 + \frac{1-e^2}{p^2} r_2^2 = 1. \quad (32.31)$$

Dal confronto con la (32.30) si vede (cfr. l'esercizio 9 per le definizioni) che si tratta di un'ellisse con centro in

$$C = \left(-\frac{ep}{1-e^2}, 0 \right),$$

semiassi di lunghezza

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{pa} = a\sqrt{1-e^2} \quad (32.32)$$

ed eccentricità

$$\varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e.$$

La distanza tra il centro C e i due fuochi F_1 e F_2 è data da

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea = \frac{ep}{1-e^2},$$

così che le coordinate dei fuochi sono

$$F_1 = (0, 0), \quad F_2 = \left(-\frac{2ep}{1-e^2}, 0 \right).$$

In particolare uno dei due fuochi coincide con l'origine (cfr. la figura 7.10). ■

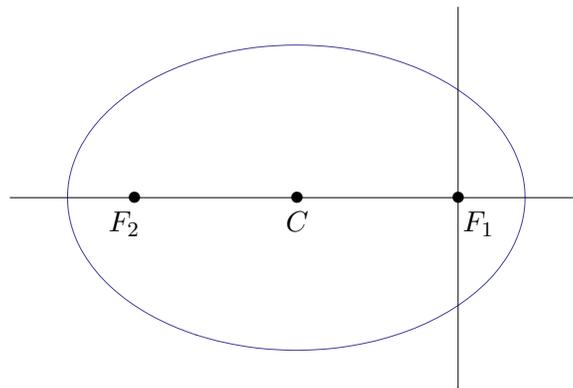


Figura 7.10: Campo centrale gravitazionale: orbita ellittica (con le notazioni del lemma 31.17, $\Delta\theta/2\pi = 1$).

Corollario 32.8 *Nel caso di un campo centrale gravitazionale le orbite aperte sono parabole o iperboli con un fuoco nell'origine.*

Dimostrazione. Si hanno orbite aperte se $E \geq 0$ (cfr. la discussione nella dimostrazione del lemma 32.4). L'equazione che determina le orbite è sempre la (32.29).

Se $E = 0$ si ha $e = 1$ (per la (32.27)), così che la (32.29) diventa

$$r_2^2 + 2pr_1 - p^2 = 0. \quad (32.33)$$

che è l'equazione di una parabola (cfr. la figura 7.11 e l'esercizio 10 per le definizioni) con fuoco nell'origine e vertice in

$$V = \left(\frac{p}{2}, 0\right). \quad (32.34)$$

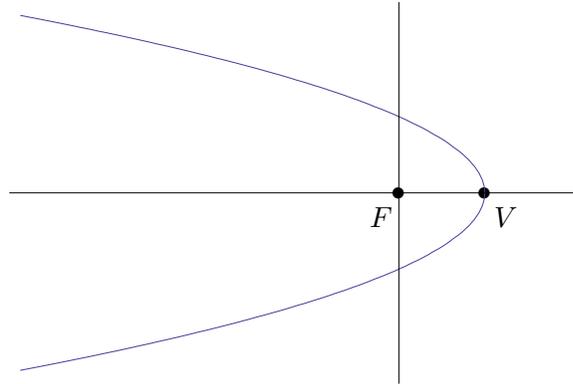


Figura 7.11: Orbita parabolica nel caso del campo centrale gravitazionale.

Se $E > 0$ si ha $e > 1$ (per la (32.27)) e, portando la (32.29) nella forma (32.31) (i.e. in forma canonica a meno di una traslazione), che si può riscrivere come

$$\frac{(e^2 - 1)^2}{p^2} \left(r_1 - \frac{pe}{e^2 - 1}\right)^2 - \frac{e^2 - 1}{p^2} r_2^2 = 1, \quad (32.35)$$

si vede (cfr. l'esercizio 12 per le definizioni) che è l'equazione di un'iperbole con centro in

$$C = \left(\frac{ep}{e^2 - 1}, 0\right),$$

semiassi di lunghezza

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = a\sqrt{e^2 - 1},$$

e fuochi in

$$F_1 = (0, 0), \quad F_2 = \left(\frac{2ep}{e^2 - 1}, 0 \right).$$

Si noti in particolare che di nuovo uno dei due fuochi è nell'origine (cfr. la figura 7.12). ■

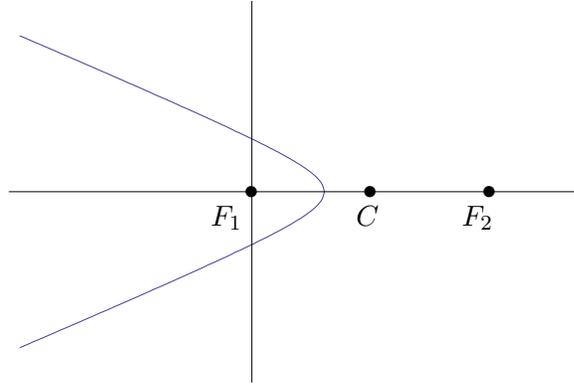


Figura 7.12: Orbita iperbolica nel caso del campo centrale gravitazionale.

In fisica, un corpo si può descrivere come un punto materiale se le sue dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze che percorre. Per esempio, si possono trattare come punti materiali i pianeti del sistema solare, quando se ne voglia studiare il moto di rivoluzione intorno al Sole.

Teorema 32.9 (LEGGI DI KEPLERO) *Consideriamo i moti dei pianeti del sistema solare supponendo che l'unica forza che agisce su ciascun pianeta sia la sola forza gravitazionale del Sole. Valgono allora le seguenti leggi.*

1. *Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*
2. *Se definiamo la velocità areolare V_A come l'area del settore dell'ellisse delimitata dal raggio vettore $\mathbf{r}(t)$ nell'unità di tempo, allora V_A è costante.*
3. *Il quadrato del periodo del moto è proporzionale al cubo della lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita.*

Dimostrazione. L'energia potenziale gravitazionale è della forma

$$V(\rho) = -\frac{Gm_1m_2}{\rho},$$

dove m_1 e m_2 sono le masse dei due corpi interagenti (m_1 è la massa del Sole e m_2 è la massa del pianeta) e G è la *costante di gravitazione universale* (cfr. l'osservazione 32.6).

La legge 1 è conseguenza del corollario 32.7. Infatti tale corollario implica che il vettore \mathbf{r} descrive nel piano (r_1, r_2) un'ellisse con uno dei fuochi nell'origine. Se \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 denotano i vettori che individuano il Sole e il pianeta, rispettivamente, possiamo allora esprimere tali vettori in termini della coordinate del centro di massa \mathbf{R} e della coordinata relativa \mathbf{r} : abbiamo $\mathbf{x}_1 = \mathbf{R} + (m_2/M)\mathbf{r}$ e $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} - (m_1/M)\mathbf{r}$, dove $M = m_1 + m_2$. Nel sistema del centro di massa ($\mathbf{R} = \mathbf{0}$), i vettori \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 sono entrambi proporzionali a \mathbf{r} . In tale sistema di riferimento, sia il Sole sia il pianeta descrivono delle ellissi, che hanno entrambe uno dei fuochi coincidenti con il centro di massa. Anche il rispetto al Sole il pianeta descrive un'ellisse, dal momento che \mathbf{r} rappresenta proprio la coordinata del pianeta rispetto al Sole.

Se indichiamo con $A(t)$ l'area del settore dell'ellisse delimitata dal raggio vettore $\mathbf{r}(t)$ dal tempo iniziale t_0 al tempo t , la *velocità areolare* è definita come

$$V_A(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}.$$

Poiché (cfr. l'esercizio 13)

$$A(t+h) - A(t) = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t)h + O(h^2), \quad (32.36)$$

la velocità areolare è data da

$$V_A(t) = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t) = \frac{L}{2\mu}$$

ed è costante poiché L è costante (cfr. il lemma 31.9). Quindi anche la legge 2 è dimostrata.

Infine il periodo T del moto, poiché $V_A(t) = V_A$ è costante, si può scrivere come

$$T = \frac{\text{area dell'ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi ab}{V_A} = \frac{2\mu\pi ab}{L},$$

dove a e b sono le lunghezze dei semiassi dell'ellisse (cfr. l'esercizio 14). Se ricordiamo la relazione (32.32) che lega a a b e la definizione (32.27) di p , otteniamo

$$T = \frac{2\mu\pi ab}{L} = \frac{2\mu\pi a^{3/2}\sqrt{p}}{L} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}a^{3/2},$$

da cui segue la legge 3. ■

Osservazione 32.10 La massa del Sole m_1 è molto più grande della massa dei pianeti (infatti si ha $m_1 = 1.99 \times 10^{33}$ g, mentre $m_2 = 1.90 \times 10^{30}$ g per Giove, $m_2 = 5.98 \times 10^{27}$ g per la Terra, ecc.). Se si approssima $m_2 \gg m_1$, la massa ridotta è essenzialmente data dalla massa del pianeta, i.e. $\mu = m_1$, e si può assumere che il Sole occupi il centro della forza, i.e. uno dei due fuochi dell'ellisse. Il moto del pianeta intorno al Sole prende il nome di *moto di rivoluzione*. Il pianeta, mentre ruota intorno al Sole, compie anche un *moto di rotazione* intorno al proprio

asse (se si descrive il pianeta come un punto materiale, il moto di rotazione viene ignorato). Si chiama *piano equatoriale* il piano ortogonale all'asse di rotazione passante per il centro di massa della Terra ed *equatore* l'intersezione di tale piano con la superficie della Terra.

Osservazione 32.11 Sulla superficie della Terra la forza gravitazionale che agisce su un punto materiale P di massa m è diretta verso il centro della Terra e ha intensità GmM/ρ^2 , dove G è la costante di gravitazione universale e M e ρ sono, rispettivamente, la massa e il raggio della Terra (cfr. l'esercizio 16). Si ha $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg; il raggio dipende dalla latitudine (la *latitudine* di un punto sulla superficie terrestre è l'angolo tra il piano equatoriale e la retta passante per quel punto) e varia da 6353 a 6384 km; usualmente si approssima ρ con il *raggio medio*, pari a 6371 km. In un sistema di riferimento in cui il punto P occupi l'origine e l'asse z sia diretto lungo la retta che congiunge P al centro della Terra e sia rivolto verso l'esterno, la forza che agisce sul punto P è $\mathbf{F} := -m\mathbf{g}$, dove $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ e $g \approx 9.8 \text{ m s}^{-2}$ prende il nome di *accelerazione di gravità* (cfr. l'esercizio 16). La forza \mathbf{F} , a volte chiamata *forza di gravità*, approssima dunque la forza gravitazionale vicino la superficie della Terra. Si veda comunque anche l'esempio 35.8.

Osservazione 32.12 Se $\Delta\theta$ indica l'incremento della variabile θ in un periodo del moto della variabile ρ (usando le notazioni del lemma 31.17), il corollario 32.3 implica $\Delta\theta = \pi/2$ per il campo centrale armonico, mentre il corollario 32.7 implica $\Delta\theta = \pi$ per il campo centrale gravitazionale (cfr. le figure 7.7 e 7.10).

L'orbita ellittica descritta da un pianeta intorno al Sole prende il nome di *orbita kepleriana*. Il punto dell'orbita più vicino al fuoco F_1 che corrisponde al centro della forza (cfr. la figura 7.10) si chiama *pericentro* (o *perielio*), mentre il punto più lontano si chiama *apocentro* (o *afelio*); ρ_1 e ρ_2 rappresentano la distanza del pericentro e dell'apocentro, rispettivamente, da F_1 .

§33 Teorema di Bertrand

In un campo centrale è eccezionale che le orbite limitate siano sempre chiuse indipendentemente da come siano stati fissati i dati iniziali. Nel §32 abbiamo verificato esplicitamente che il campo centrale armonico e il campo centrale gravitazionale soddisfano tali proprietà. Faremo vedere nel presente paragrafo che essi sono anche gli unici campi centrali a soddisfarla: questo è il contenuto del teorema di Bertrand (teorema 33.11), che dimostreremo attraverso una serie di lemmi intermedi.

Il teorema 33.11 è un risultato notevole. Dimostrare che per il campo centrale armonico e per il campo centrale gravitazionale tutte le orbite limitate sono chiuse non ha richiesto che un conto esplicito per energie potenziali assegnate. Questo potrà essere laborioso quanto si vuole, ma, concettualmente, non presenta alcuna difficoltà. Al contrario l'affermazione che non

esistono altri campi centrali per i quali tale proprietà siano verificate non può essere dimostrata in modo diretto, lavorando con funzioni date, ed è molto più sorprendente.

Consideriamo il sistema unidimensionale descritto dall'equazione (31.18). Se $\rho(t)$ varia periodicamente in funzione del tempo in un intervallo $[\rho_1, \rho_2]$, indichiamo con T il tempo che impiega $\rho(t)$ per passare dal valore ρ_1 al valore ρ_2 (e viceversa) e con Θ la variazione di θ nell'intervallo di tempo $[0, T]$. Quindi T è il semiperiodo di $\rho(t)$. Per analogia al caso delle orbite kepleriane, diremo che Θ è l'*angolo tra il pericentro e l'apocentro* (più precisamente è la variazione dell'angolo θ mentre ρ si muove dal suo valore minimo al suo valore massimo). Con le notazioni del lemma 31.17, si ha $T_0 = 2T$ e $\Delta\theta = 2\Theta$.

Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , indichiamo con $f'(x_0)$ la derivata prima di f in $x = x_0$, e con $f''(x_0)$ la derivata seconda di f in $x = x_0$ (cfr. pag. 286).

Lemma 33.1 *Tranne che per valori eccezionali di L , ogni punto di minimo relativo ρ_0 dell'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$ è isolato e l'orbita circolare corrispondente è stabile.*

Dimostrazione. Poiché ρ_0 è un punto di minimo relativo per $V_{\text{eff}}(\rho)$, si ha

$$V'_{\text{eff}}(\rho_0) = V'(\rho_0) - \frac{L^2}{\mu\rho_0^3} = 0. \quad (33.1)$$

Un punto di minimo ρ_0 è *non isolato* se per ogni $r > 0$ l'intorno $B_r(\rho_0)$ contiene punti ρ tali che $V_{\text{eff}}(\rho) = V_{\text{eff}}(\rho_0)$ (cfr. l'esercizio 32 del capitolo 4). Se per un dato valore L_0 di L esistono punti di minimo non isolati, allora i punti di minimo saranno isolati per ogni valore di L tale che $L^2 \neq L_0^2$. Escludendo i valori $\pm L_0$ per L , $(\rho_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il moto di $(\rho(t), \dot{\rho}(t))$, per il teorema di Lagrange-Dirichlet (teorema 19.22). Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, comunque sia scelto un dato iniziale $(\rho(0), \dot{\rho}(0))$ che verifichi $|\rho(0) - \rho_0| < \delta$ e $|\dot{\rho}(0)| < \delta$, risulta $|\rho(t) - \rho_0| < \varepsilon$ e $|\dot{\rho}(t)| < \varepsilon$. Questo implica, in particolare, che l'orbita circolare $\rho = \rho_0$ è stabile (secondo la definizione data nell'osservazione 28.8). ■

Osservazione 33.2 Ogni dato iniziale per il moto planare descritto dalla (31.7b) può essere individuato dando i valori $(\bar{\rho}, \bar{\theta}, \omega, u) := (\theta(0), \rho(0), \dot{\theta}(0), \dot{\rho}(0))$. D'altra parte la conservazione del momento angolare (cfr. la (31.13)) permette di fissare la velocità angolare iniziale ω attraverso L . Dato $\bar{\rho}$, se fissiamo il valore di energia E in (31.16), il valore della velocità radiale iniziale u risulta determinato (a meno del segno). Supponiamo anche di fissare un sistema di riferimento in cui $\bar{\theta} = 0$: poiché l'energia potenziale $V(\rho)$ non dipende da θ il valore $\bar{\theta}$ sarà assolutamente irrilevante. In conclusione possiamo individuare il dato iniziale del sistema dando i valori $(L, E, \bar{\rho})$ e fissando il segno della velocità iniziale. Notiamo in particolare che, cambiando L , cambia l'energia potenziale efficace (31.17), quindi cambia la posizione di un eventuale punto di minimo relativo $\rho_0 = \rho_0(L)$. Notiamo anche che i valori $(L, E, \bar{\rho})$ non possono essere scelti in modo del tutto indipendente: per esempio fissato L si deve avere $E \geq \min V_{\text{eff}}(\rho) = V_{\text{eff}}(\rho_0(L))$ e, fissati L ed E , si deve avere $\bar{\rho}$ tale che $V_{\text{eff}}(\bar{\rho}) \leq E$.

Lemma 33.3 Sia ρ_0 un punto di minimo relativo per l'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$. Fissato $\varepsilon \geq 0$, consideriamo l'orbita tale che $E(\varepsilon) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \varepsilon^2$ sia l'energia corrispondente al moto della variabile radiale. L'angolo $\Theta = \Theta_\varepsilon$ tra il pericentro e l'apocentro dell'orbita tende al valore

$$\Theta_0 = \frac{\pi L}{\rho_0^2 \sqrt{\mu V_{\text{eff}}''(\rho_0)}} = \pi \sqrt{\frac{V'(\rho_0)}{\rho_0 V''(\rho_0) + 3V'(\rho_0)}} \quad (33.2)$$

per ε che tende a 0.

Dimostrazione. Per ε sufficientemente piccolo l'orbita considerata è chiusa e la traiettoria corrispondente è periodica (cfr. la discussione dei moti unidimensionali). L'angolo Θ_ε è dato dalla variazione della variabile θ in un semiperiodo del moto della variabile $\rho(t)$, i.e. nel tempo necessario perché la variabile $\rho(t)$ passi dal valore minimo ρ_1 al valore massimo ρ_2 (o viceversa). Per la (31.25) si ha

$$\Theta_\varepsilon = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \frac{L}{\mu \rho^2} \frac{1}{\sqrt{2\mu^{-1} [E(\varepsilon) - V_{\text{eff}}(\rho)]}}, \quad (33.3)$$

dove $E(\varepsilon) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \varepsilon^2$ è il valore dell'energia che corrisponde all'orbita considerata.

Se introduciamo la variabile $x := L/\rho\sqrt{\mu}$ e poniamo

$$W(x) := V_{\text{eff}}\left(\frac{L}{x\sqrt{\mu}}\right) = V\left(\frac{L}{x\sqrt{\mu}}\right) + \frac{x^2}{2}, \quad (33.4)$$

la (33.3) si può riscrivere come

$$\Theta_\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{\sqrt{2[E(\varepsilon) - W(x)]}}, \quad (33.5)$$

dove $x_1 := L/\rho_2\sqrt{\mu}$ e $x_2 := L/\rho_1\sqrt{\mu}$ dipendono da ε e sono tali che $W(x_1) = W(x_2) = E(\varepsilon)$. Poniamo anche $x_0 := L/\rho_0\sqrt{\mu}$. Tenendo conto che $[dW/dx](x_0) = 0$, poiché $V_{\text{eff}}'(\rho_0) = 0$, possiamo espandere (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 3)

$$W(x) = W(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2W}{dx^2}(x_0) (x - x_0)^2 + R(x; x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x; x_0)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Si ha

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d\rho}{dx} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} \right] = \frac{d^2\rho}{dx^2} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} + \frac{d\rho}{dx} \frac{d}{dx} \frac{dV_{\text{eff}}}{d\rho} = \frac{d^2\rho}{dx^2} V_{\text{eff}}' + \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 V_{\text{eff}}'',$$

così che

$$k := \frac{d^2W}{dx^2}(x_0) = V_{\text{eff}}''(\rho_0) \left(\frac{d\rho}{dx} \Big|_{x=x_0} \right)^2 = V_{\text{eff}}''(\rho_0) \left(-\frac{L}{x_0^2 \sqrt{\mu}} \right)^2 = \frac{\mu \rho_0^4 V_{\text{eff}}''(\rho_0)}{L^2},$$

dove si è tenuto conto di nuovo che $V'_{\text{eff}}(\rho_0) = 0$. In (33.5) scriviamo $\Theta_\varepsilon = \Theta_{\varepsilon,1} + \Theta_{\varepsilon,2}$, dove

$$\Theta_{\varepsilon,1} = \int_{x_1}^{x_0} dx \frac{1}{\sqrt{2[E(\varepsilon) - W(x)]}}, \quad \Theta_{\varepsilon,2} = \int_{x_0}^{x_2} dx \frac{1}{\sqrt{2[E(\varepsilon) - W(x)]}},$$

e studiamo separatamente i due integrali $\Theta_{\varepsilon,1}$ e $\Theta_{\varepsilon,2}$.

Studiamo esplicitamente il secondo integrale. Operiamo il cambiamento di coordinate

$$y = y(x) := \sqrt{\frac{k}{2}} \left(\frac{x - x_0}{\varepsilon} \right) \sqrt{1 + \frac{2R(x; x_0)}{k(x - x_0)^2}}.$$

In termini della nuova coordinata, si ha $y(x_0) = 0$ e l'equazione $E(\varepsilon) - W(x) = 0$ diventa $y^2 = 1$, così che $y_1 := y(x_1) = -1$ e $y_2 := y(x_2) = 1$. Inoltre esiste una funzione positiva $K(\varepsilon)$ tale che (cfr. l'esercizio 22)

$$\frac{k}{2} (1 - K(\varepsilon)) \leq \varepsilon \left| \frac{dy}{dx} \right| \leq \frac{k}{2} (1 + K(\varepsilon)), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K(\varepsilon) = 0. \quad (33.6)$$

L'integrale $\Theta_{\varepsilon,2}$ si riscrive

$$\Theta_{\varepsilon,2} = \int_0^1 dy \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2(1 - y^2)}} \left| \frac{dx}{dy} \right|,$$

così che, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_{\varepsilon,2} = \int_0^1 dy \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2(1 - y^2)}} \left| \frac{dx}{dy} \right| = \sqrt{\frac{1}{k}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{k}}.$$

L'integrale $\Theta_{\varepsilon,1}$ si studia in modo simile. In conclusione, si trova

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_{\varepsilon,1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_{\varepsilon,2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{1}{k}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_\varepsilon = \pi \sqrt{\frac{1}{k}} = \pi \sqrt{\frac{L^2}{\mu \rho_0^4 V''_{\text{eff}}(\rho_0)}},$$

che dà la prima uguaglianza in (33.2).

Dalla definizione (31.17) di $V_{\text{eff}}(\rho)$ segue che

$$V''_{\text{eff}}(\rho_0) = V''(\rho_0) + \frac{3L^2}{\mu \rho_0^4}.$$

Tenendo conto della (33.1), si ottiene

$$\frac{\mu \rho_0^4 V''_{\text{eff}}(\rho_0)}{L^2} = \frac{\mu \rho_0^4}{L^2} \left(V''(\rho_0) + \frac{3L^2}{\mu \rho_0^4} \right) = \frac{\rho_0}{V'(\rho_0)} \left(V''(\rho_0) + \frac{3V'(\rho_0)}{\rho_0} \right) = \frac{\rho_0 V''(\rho_0) + 3V'(\rho_0)}{V'(\rho_0)},$$

che implica la seconda uguaglianza in (33.2). ■

Osservazione 33.4 Il vantaggio della seconda espressione in (33.2), rispetto alla prima, è che la dipendenza dai dati iniziali è espressa attraverso la sola variabile ρ_0 .

Lemma 33.5 *Condizione necessaria perché in un campo centrale la quantità Θ_0 definita in (33.2) abbia lo stesso valore per tutte le orbite circolari corrispondenti ai punti di minimo relativo ρ_0 dell'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$ che si ottengono al variare dei dati iniziali, e quindi di L , è che l'energia potenziale $V(\rho)$, a meno di un'irrelevante costante additiva, abbia una delle due seguenti forme:*

$$V(\rho) = a\rho^\alpha, \quad \alpha > -2, \quad \alpha \neq 0, \quad (33.7a)$$

$$V(\rho) = b \log \rho, \quad (33.7b)$$

dove a, b sono costanti. L'angolo Θ_0 è allora dato da

$$\Theta_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha + 2}}, \quad (33.8)$$

dove $\alpha = 0$ corrisponde al potenziale logaritmico in (33.7b).

Dimostrazione. Se $V(\rho)$ è data dalla (33.7), la (33.8) segue immediatamente dalla (33.2). È quindi sufficiente dimostrare che, perché Θ_0 assuma lo stesso valore indipendentemente dai dati iniziali, l'energia potenziale $V(\rho)$ deve essere della forma (33.7).

Poiché siamo interessati in risultati che valgono per ogni dato iniziale, e quindi per ogni valore di L , possiamo assumere che ρ_0 sia un punto di minimo isolato (cfr. il lemma 33.1). L'angolo Θ_0 dipende con continuità da ρ_0 e quindi da L ; perché Θ_0 sia costante in L occorre perciò che la seconda espressione in (33.2) di Θ_0 non dipenda da ρ_0 (poiché la dipendenza da L in tale espressione è attraverso ρ_0). In altre parole deve esistere una costante $C \geq 0$ tale che

$$\frac{V'(\rho)}{\rho V''(\rho) + 3V'(\rho)} = C \quad (33.9)$$

per ogni valore di ρ . La (33.9) è un'equazione differenziale, che, ponendo $U = V'$, si riscrive

$$U'(\rho) = \frac{1 - 3C}{C\rho} U(\rho)$$

e si può risolvere per separazione di variabili. Si ottiene, per qualche costante A ,

$$U(\rho) = A\rho^\gamma, \quad \gamma := \frac{1 - 3C}{C}, \quad (33.10)$$

dove $\gamma > -3$ (poiché $(1 - 3C)/C > -3$ per $C \geq 0$). Per $\gamma \neq -1$, integrando la (33.10) si ottiene la (33.7a) con $\alpha = \gamma + 1$, mentre, per $\gamma = -1$ (ovvero $C = 1/2$), si ha $U(\rho) = A/\rho$, che corrisponde al caso logaritmico (33.7b). ■

Corollario 33.6 *Condizione necessaria perché l'angolo Θ tra apocentro e pericentro sia commensurabile con 2π per ogni dato iniziale è che l'energia potenziale $V(\rho)$ sia di una delle due forme (33.7).*

Dimostrazione. Poiché Θ dipende con continuità dai dati iniziali, se non è costante in L , al variare di L non è commensurabile con 2π infinite volte (saremo più precisi nella proposizione 33.12). Quindi occorre che Θ non vari al variare dei dati iniziali. In particolare non deve variare per dati iniziali vicino all'orbita con $\rho(t) = \rho_0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Scegliamo dati iniziali tali che si abbia $\bar{\rho} = \rho_0 + O(\varepsilon)$ e l'energia sia $E = E(\varepsilon) = V_{\text{eff}}(\rho_0) + \varepsilon^2$. Indichiamo con Θ_ε il corrispondente incremento di θ in un semiperiodo del moto radiale $\rho(t)$ e definiamo Θ_0 come nel lemma 33.3. Se $V(\rho)$ non ha una delle due forme in (33.7), allora Θ_0 non può essere costante in L , per il lemma 33.5. Ne segue che, per continuità, per ε sufficientemente piccolo, Θ_ε non può essere costante in L . ■

Lemma 33.7 *Sia $V(\rho)$ in (33.7) tale che $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V(\rho) = +\infty$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^2 V(\rho) = 0$. Allora*

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \Theta = \frac{\pi}{2},$$

indipendentemente dalla funzione $V(\rho)$.

Dimostrazione. Siano ρ_1 e ρ_2 le radici dell'equazione $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Per le ipotesi fatte sul potenziale, $\rho_1 \rightarrow 0$ e $\rho_2 \rightarrow +\infty$ per $E \rightarrow +\infty$. Il cambiamento di variabili $y = \rho_1/\rho$ porta a

$$\Theta = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \frac{1}{\rho^2 \sqrt{\frac{2\mu}{L^2} (E - V_{\text{eff}}(\rho))}} = \int_{y_1}^1 dy \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{\mu \rho_1^2}{L^2} E - W(y) \right)}} = \int_{y_1}^1 dy \frac{1}{\sqrt{2 [W(1) - W(y)]}},$$

dove $y_1 = \rho_1/\rho_2$ e

$$W(y) = \frac{\mu \rho_1^2}{L^2} V_{\text{eff}}(\rho_1/y) = \frac{y^2}{2} + \frac{\mu \rho_1^2}{L^2} V(\rho_1/y),$$

così che $W(1) = \mu \rho_1^2 L^{-2} E$ (poiché $V_{\text{eff}}(\rho_1) = E$). Inoltre, sempre sotto le ipotesi fatte per la funzione $V(\rho)$ (in particolare per l'andamento assunto per $\rho \rightarrow 0^+$), si ha $\lim_{E \rightarrow +\infty} y_1 = 0$ e $\lim_{E \rightarrow +\infty} W(y) = y^2/2$ (quindi $\lim_{E \rightarrow +\infty} W(1) = 1/2$). Si ha pertanto (cfr. l'esercizio 23)

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \Theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad (33.11)$$

da cui segue il risultato. ■

Lemma 33.8 Sia $V(\rho) = -k\rho^{-\beta}$, dove k e β sono due costanti tali che $k > 0$ e $0 < \beta < 2$. Si ha allora

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta = \frac{\pi}{2 - \beta}.$$

Dimostrazione. L'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$, se $V(\rho) = -k\rho^{-\beta}$, ha un unico minimo in

$$\rho_0 = \left(\frac{L^2}{\beta k \mu} \right)^{1/(2-\beta)}$$

e tende a 0 per $\rho \rightarrow +\infty$. Per $E \rightarrow 0^-$, si ha $\rho_1 \rightarrow [L^2(2\mu k)^{-1}]^{1/(2-\beta)}$ e $\rho_2 \rightarrow +\infty$. Si ha, per $E = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{2\mu}{L^2} (E - V_{\text{eff}}(\rho)) &= -\frac{2\mu}{L^2} V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{2\mu k}{L^2} \frac{1}{\rho^\beta} - \frac{1}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho_1^2} \left[\frac{2\mu k \rho_1^{2-\beta}}{L^2} \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\beta - \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_1^2} \left[\left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^\beta - \left(\frac{\rho_1}{\rho} \right)^2 \right] = \frac{y^\beta - y^2}{\rho_1^2}, \end{aligned}$$

così che, operando il cambiamento di variabili $y = \rho_1/\rho$, si ottiene (cfr. l'esercizio 24)

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta = \lim_{E \rightarrow 0^-} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{2\mu L^{-2} (E - V_{\text{eff}})}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^\beta - y^2}}. \quad (33.12)$$

Sostituendo $z = y^{1-\beta/2}$ si ha

$$\lim_{E \rightarrow 0^-} \Theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^\beta - y^2}} = \frac{2}{2 - \beta} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{\pi}{2 - \beta},$$

da cui segue l'asserto. ■

Lemma 33.9 Se $V(\rho) = k\rho^2/2$, con $k > 0$ costante, tutte le orbite sono chiuse e limitate.

Dimostrazione. Per $\neq 0$, segue dal lemma 32.1 che tutte le orbite sono ellissi. Se $L = 0$, ragionando come nella dimostrazione del lemma 31.9 si trova che le traiettorie hanno la forma $t \mapsto a(t)\boldsymbol{\kappa}$, dove $\boldsymbol{\kappa}$ è un versore individuato dai dati iniziali e $a(t)$ risolve l'equazione $\ddot{a} = -ka$: il moto consiste in un'oscillazione intorno all'origine di ampiezza costante. ■

Lemma 33.10 Se $V(\rho) = -k/\rho$, con $k > 0$ costante, tutte le orbite limitate sono chiuse.

Dimostrazione. Se $L = 0$ i moti sono illimitati. Se $L \neq 0$, il risultato segue dal lemma 32.4. ■

Teorema 33.11 (TEOREMA DI BERTRAND) *In un campo centrale tutte le orbite limitate sono chiuse se e solo se l'energia potenziale assume una delle due seguenti forme:*

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 \quad (\text{energia potenziale armonica}), \quad (33.13a)$$

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho} \quad (\text{energia potenziale gravitazionale}), \quad (33.13b)$$

con $k > 0$ costante.

Dimostrazione. Perché il moto $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ sia periodico occorre che sia periodico il moto della variabile radiale $\rho(t)$ e che l'incremento Θ in un semiperiodo del moto di $\rho(t)$ sia commensurabile con 2π , i.e. $\Theta/2\pi \in \mathbb{Q}$ (cfr. il lemma 31.17). D'altra parte, perché $\Theta/2\pi$ sia razionale occorre che $V(\rho)$ abbia una delle due forme in (33.7). Corrispondentemente, Θ_0 è dato dalla (33.8). Si ha quanto segue:

- se $\alpha > 0$ in (33.7) allora $\lim_{\rho \rightarrow \infty} V(\rho) = +\infty$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^2 V(\rho) = 0$, quindi per il lemma 33.7 deve risultare $\Theta_0 = \pi/2$, che è compatibile con la (33.8) purché sia $\alpha = 2$;
- se $\alpha < 0$, allora, per il lemma 33.8, con $\beta = -\alpha$, deve risultare $\Theta_0 = \pi/(2 + \alpha)$ che è compatibile con la (33.8) purché sia $\alpha = -1$;
- se $\alpha = 0$, i.e. se $V(\rho) = b \log \rho$, si ha $\Theta_0 = \pi/\sqrt{2}$, che è incommensurabile con 2π .

Per $V(\rho)$ della forma (33.7), con $a < 0$ se $\alpha > 0$ e $a > 0$ se $\alpha < 0$, le orbite sono tutte illimitate. In tali casi risulta infatti $V'_{\text{eff}}(\rho) < 0$, quindi le funzioni $V_{\text{eff}}(\rho)$ sono decrescenti.

In conclusione può dunque accadere che le orbite limitate siano tutte chiuse solamente per le energie potenziali $V(\rho) = a\rho^2/2$, con $a > 0$, e $V(\rho) = a/\rho$, con $a < 0$, i.e. per le energie potenziali (33.13). Questo di fatto accade, come segue dal lemma 33.9 e dal lemma 33.10. ■

Se A è un insieme misurabile e $B \subset A$ è un sottoinsieme anch'esso misurabile, si chiama *misura di Lebesgue relativa* di B rispetto ad A il rapporto tra la misura di Lebesgue di B e la misura di Lebesgue di A (confronta la nota bibliografica per la teoria della misura di Lebesgue). In particolare diremo che B ha *misura piena* se la sua misura di Lebesgue relativa è 1 e che ha *misura nulla* se la sua misura di Lebesgue relativa è 0. Per esempio, dato un qualsiasi intervallo $J \subset \mathbb{R}$, i numeri razionali contenuti in J hanno misura nulla (pur essendo densi) e i numeri irrazionali contenuti in J hanno misura piena.

Proposizione 33.12 *Ad eccezione dei casi (33.13), in un sistema che si muova in un campo centrale, i dati iniziali che danno luogo a orbite chiuse hanno misura di Lebesgue nulla.*

Dimostrazione. Sia Σ l'insieme dei dati iniziali che danno origine a moti periodici della variabile radiale; indichiamo con $z = (\rho_0, \dot{\rho}_0)$ gli elementi di Σ . Per ogni $z \in \Sigma$ sia $T_0(z)$ il corrispondente periodo, così che $\rho(t + T_0(z)) = \rho(t)$. Nell'intervallo $[0, T_0(z)]$ la variabile angolare avrà subito

un incremento $\Delta\theta(z)$, che è commensurabile con 2π se e solo se il moto complessivo è periodico. La quantità $\Delta\theta(z)$ è una funzione continua di z , per il teorema di dipendenza continua dai dati iniziali (teorema 12.3). Se la funzione $\Delta\theta(z)$ non assume valore identicamente costante in alcun insieme aperto limitato $A \subset \Sigma$, (i.e. se la derivata di $\Delta\theta(z)$ rispetto a z non è identicamente nulla in alcun aperto limitato $A \subset \Sigma$) il rapporto $\Delta\theta(z)/2\pi$ assumerà allora valori irrazionali in un sottoinsieme di A che ha misura di Lebesgue piena (i.e. in un sottoinsieme il cui complementare in A ha misura di Lebesgue nulla).

Il valore della funzione $\Delta\theta(z)$ dipende dall'energia potenziale $V(\rho)$. Per completare la dimostrazione del lemma occorre ancora verificare che gli unici campi centrali per i quali la quantità $\Delta\theta(z)$ non varia al variare dei dati iniziali z a cui corrispondono orbite limitate e, inoltre, il rapporto $\Delta\theta(z)/2\pi$ è razionale, sono il campo centrale armonico e il campo centrale gravitazionale. Ma questo è esattamente quanto afferma il teorema 33.11. ■

Osservazione 33.13 In vista della proprietà richiesta sulla quantità $\Delta\theta(z)$ nella dimostrazione della proposizione 33.12, appare del tutto eccezionale che possano esistere ampi centrali per i quali tutte le orbite limitate siano chiuse. Tuttavia campi centrali di questo tipo esistono: quello gravitazionale e quello armonico. Essi sono anche gli unici a soddisfare tale proprietà.

Osservazione 33.14 Sia B un sottoinsieme di \mathbb{R} ; un insieme $A \subset B$ si dice *denso* in B se tutti i punti di B o appartengono ad A o sono punti di accumulazione di A . Dato un sistema dinamico, una proprietà si dice *generica* se vale su un *insieme di seconda categoria*, i.e. su un insieme che sia intersezione numerabile di insiemi aperti densi (cfr. la nota bibliografica per un approfondimento). Invece di caratterizzare i dati iniziali che danno luogo a orbite chiuse dicendo che essi hanno misura (di Lebesgue) nulla nell'insieme dei dati iniziali, possiamo anche dire che essi sono non generici. Infatti, nell'insieme dei valori I assunti dal rapporto $\Delta\theta(z)/2\pi$ i valori irrazionali sono generici, come mostra il seguente argomento. Sia J un intervallo qualsiasi contenuto in I . Possiamo scrivere i numeri razionali in J come p/q , con $p \in P(q) = \{p : p_1(q) \leq p \leq p_2(q)\}$, dove $p_1(q)$ e $p_2(q)$ sono tali che $p/q \in J$. Sia $B_q = \{p/q : p \in P(q)\}$. Definiamo $A_q = J \setminus B_q$: per costruzione A_q è aperto e denso. D'altra parte l'insieme dei numeri irrazionali in J si può scrivere come $\bigcap_{q=1}^{\infty} A_q$, ed è quindi intersezione numerabile di insiemi aperti densi. In conclusione la proprietà che al variare di $z \in \Sigma$ il rapporto $\Delta\theta(z)/2\pi$ sia razionale (purché $\Delta\theta(z)$ non sia costante in z) è non generica: i dati iniziali che danno luogo a orbite chiuse sono non generici. Intuitivamente una proprietà generica è una proprietà che “tipicamente” è soddisfatta: prendendo un numero a caso in un qualsiasi intervallo J “ci si aspetta” che tale numero sia irrazionale. La genericità si può considerare un equivalente topologico della proprietà di avere misura piena, che è invece una nozione metrica.

Nota bibliografica Per gli argomenti trattati nel presente capitolo abbiamo seguito soprattutto [Arnold-1, Cap. II], e [Dell'Antonio, Cap. I e II]. Per alcuni aspetti abbiamo tenuto presente anche [Gallavotti, Cap. 4] e [Fasano & Marmi, Cap.5].

Per una discussione delle proprietà delle coniche utilizzate si può vedere per esempio [Martinelli, Cap. 6]. Per la teoria della misura e di Lebesgue (e dell'integrazione secondo Lebesgue) si veda [Giusti-2, Cap. 5]. Per un'introduzione alla meccanica si può consultare qualsiasi testo di Fisica; per un punto di vista più matematico si possono consultare anche [Levi-Civita & Amaldi-1], [Dell'Antonio] e [Gallavotti]. Per una discussione più approfondita della rilevanza dei campi centrali in problemi di interesse fisico si veda ancora [Gallavotti] o [Goldstein]. Per una discussione di cosa si intende per proprietà generica nello studio di sistemi dinamici si veda per esempio [Katok & Hasselblatt, Cap. 7].

Per il teorema di Noether, a cui si è fatto cenno nell'osservazione 31.12, rimandiamo al capitolo 13. Gli esercizi 19÷21 seguono [Goldstein, Cap. 3].

Esercizi

Esercizio 1 Data una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in A$ e una *direzione* (i.e. un vettore unitario) $v \in \mathbb{R}^n$, si chiama *derivata direzionale* di f nel punto x_0 e nella direzione v il limite (se esiste)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon v) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Si dimostri che se f è differenziabile allora il limite sopra esiste e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0),$$

dove $v = (v_1, \dots, v_n)$ nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\partial f / \partial x_i$ indica la derivata parziale di f rispetto a x_i , i.e. la derivata direzionale nella direzione e_i (cfr. pag. 113).

Esercizio 2 Si dimostri che, in *coordinate polari* ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$), l'operatore gradiente è dato da

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

dove $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. [Suggerimento. Si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

La base $\{e_\rho, e_\theta\}$ è data da $e_\rho = (\cos \theta, \sin \theta)$, $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$. Si usa quindi l'esercizio 1.]

Esercizio 3 Si dimostri che, in *coordinate sferiche* ($x = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \varphi$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi]$), l'operatore gradiente è dato dalla

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. [Suggerimento. Si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

In coordinate sferiche la base $\{e_\rho, e_\theta, e_\varphi\}$ è data da $e_\rho = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$, $e_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $e_\varphi = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi)$. Si usa quindi l'esercizio 1.]

Esercizio 4 Si dimostri che, in coordinate cilindriche ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$), l'operatore gradiente è dato da

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. [Suggerimento. Si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z,$$

con ρ e θ definite me nel caso delle coordinate polari. In coordinate cilindriche la base $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ è data da $\mathbf{e}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$. Si usa quindi l'esercizio 1.]

Esercizio 5 Dati due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, sia $\mathbf{u} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ il loro prodotto vettoriale. Si dimostri che

1. \mathbf{u} è ortogonale a entrambi i vettori \mathbf{x} e \mathbf{y} ;
2. $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ se e solo se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono paralleli.

[Soluzione. Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, si ha

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

per la (31.1b). Poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) x_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) x_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) x_3 = 0, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) y_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) y_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) y_3 = 0, \end{aligned}$$

il vettore \mathbf{u} è ortogonale sia a \mathbf{x} che a \mathbf{y} . Questo dimostra la proprietà 1. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si ha $x_2 y_3 = x_3 y_2$, $x_3 y_1 = x_1 y_3$ e $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Se $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, con $\lambda = 0$; se $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ distinguiamo i seguenti casi. Se tutte le componenti di \mathbf{y} sono diverse da zero si ha $x_1/y_1 = x_2/y_2 = x_3/y_3$, quindi $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$ per qualche λ . Se solo una componente di \mathbf{y} è nulla, a meno di riordinare le componenti possiamo supporre che sia $y_3 = 0$: allora si ha $x_3 y_2 = 0$, $x_3 y_1 = 0$ e $x_1/y_1 = x_2/y_2$, quindi $x_3 = 0$ e $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ per qualche λ . Se \mathbf{y} ha solo una componente non nulla, di nuovo, a meno di riordinare le componenti possiamo supporre che sia $y_3 \neq 0$: allora si ha $x_2 y_3 = 0$ e $x_1 y_3 = 0$, quindi $x_1 = x_2 = 0$ e di nuovo $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ per qualche λ . Questo dimostra la proprietà 2.]

Esercizio 6 Si dimostri che si possono fissare le condizioni iniziali del sistema (32.15) come in (32.16).

[Soluzione. Fissiamo $r_1(0) = \rho_1$ e $r_2(0) = 0$. Poiché $r_1(0) = \rho_1$, deve risultare $\dot{\rho}(0) = 0$; infatti $\dot{\rho}(t) = 0$ se $E - V_{\text{eff}}(\rho(t)) = 0$ e ρ_1 è una radice dell'equazione $E - V_{\text{eff}}(\rho) = 0$. Ne segue che la velocità iniziale deve avere direzione tangenziale, i.e. essere ortogonale al vettore \mathbf{e}_ρ all'istante $t = 0$. D'altra parte a $t = 0$ il vettore \mathbf{e}_ρ è parallelo a $\mathbf{r}(0)$, quindi è diretto lungo l'asse r_1 , così che la velocità iniziale deve essere diretta lungo l'asse r_2 .]

Esercizio 7 Si dimostri che la (32.29) è l'equazione di una conica e che la conica è un'ellisse se $e \in [0, 1)$, una parabola se $e = 1$ e un'iperbole se $e \in (1, +\infty)$. [Soluzione. Un'equazione della forma

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

è l'equazione di una conica (cfr. anche l'esercizio 6 del capitolo 9). Se definiamo il discriminante $\Delta := B^2 - AC$, la conica è un'ellisse se $\Delta < 0$, un'iperbole se $\Delta > 0$ e una parabola se $\Delta = 0$. La (32.29) è l'equazione di una conica con discriminante $\Delta = 4(e^2 - 1)$. Se $e \in [0, 1)$ la conica è un'ellisse, se $e = 1$ è una parabola e se $e \in (1, \infty)$ è un'iperbole.

Esercizio 8 Sia $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ l'equazione di una conica (cfr. l'esercizio 7). Si dimostri che, esclusi i casi in cui l'equazione non abbia soluzioni reali (per esempio $x^2 + y^2 + 1 = 0$) o la conica sia *degenere*, i.e. rappresenti un punto, una retta o due rette (per esempio $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 - y^2 = 0$, $y^2 = 0$), è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate in cui l'equazione si scriva in *forma canonica*

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3) \quad x = py^2,$$

con $a, b, p > 0$, nel caso in cui la conica sia un'ellisse (1), un'iperbole (2) e una parabola (3). [*Suggerimento.* Se $z = (x, y)$, si può riscrivere l'equazione nella forma $\langle z, Mz \rangle + \langle N, z \rangle + P = 0$, dove $M \in M(2, \mathbb{R})$ è simmetrica e tale che $\det M = -\Delta$, $N \in \mathbb{R}^2$ e $P \in \mathbb{R}$. In particolare esiste una matrice ortogonale U tale che $D := U^T M U$ è diagonale e ha autovalori reali (cfr. gli esercizi 40 e 42 del capitolo 1). La matrice U corrisponde a una rotazione e gli autovettori di M costituiscono una base ortogonale (cfr. l'esercizio 41 del capitolo 1). Se definiamo $z = U w$, l'equazione diventa $\langle w, D w \rangle + \langle Q, w \rangle + P = 0$, dove $Q = U^T N$. Se $\Delta \neq 0$, una traslazione $w = u + c$, per $c \in \mathbb{R}^2$ opportuno, porta l'equazione nella forma $\langle u, D u \rangle = R$, dove $R \in \mathbb{R}$. Se $\Delta < 0$, gli autovalori di M hanno lo stesso segno: se $R = 0$ la conica descrive l'origine; se R ha segno opposto rispetto agli autovalori di M l'equazione non ammette soluzioni; se ha lo stesso segno degli autovalori, dividendo per R si ottiene la (1). Se $\Delta > 0$, gli autovalori di M hanno segno opposto: se $R = 0$ l'equazione descrive due rette passanti per l'origine; se $R \neq 0$, dividendo per R (ed eventualmente effettuando una rotazione di $\pi/2$) si ottiene la (2). Se $\Delta = 0$, un autovalore di M è nullo: effettuando eventualmente una rotazione di $\pi/2$ l'equazione diventa $ay^2 + bx + cy + d = 0$, con $a \neq 0$, così che, effettuando una traslazione (ed eventualmente un'ulteriore rotazione di π) e dividendo per a si ottiene la (3).]

Esercizio 9 Si consideri l'equazione di un'ellisse scritta in forma canonica (cfr. l'esercizio 8). Si supponga $a \geq b$ (questo è sempre possibile, effettuando eventualmente una rotazione di $\pi/2$); a e b sono le lunghezze dei *semiassi* dell'ellisse. Chiamiamo *vertici* i punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$, *centro* il punto $(0, 0)$ e *fuochi* i punti $(\pm f, 0)$, con $f := \sqrt{a^2 - b^2}$. Si definisce *eccentricità* la quantità $\varepsilon := f/a \in [0, 1)$. Si dimostri che si può definire l'ellisse come il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi è costante e che i due punti sono i fuochi. [*Soluzione.* Sia (x, y) un punto del piano. Si impone

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} + \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2c,$$

dove c è una costante. Scrivendo

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2c - \sqrt{(x+f)^2 + y^2},$$

elevando al quadrato e semplificando, si trova

$$c^2 + xf = c\sqrt{(x+f)^2 + y^2},$$

così che elevando nuovamente al quadrato, si ottiene

$$c^4 + 2c^2xf + x^2f^2 = c^2(x^2 + 2xf + c^2) + c^2y^2 \implies (c^2 - f^2)x^2 + c^2y^2 = c^2(c^2 - f^2).$$

Dividendo per $c^2(c^2 - f^2)$ si trova infine

$$(x^2/c^2) + (y^2/(c^2 - f^2)) = 1,$$

che è l'equazione canonica dell'ellisse con $a = c$ e $b = \sqrt{c^2 - f^2}$.]

Esercizio 10 Si consideri l'equazione di un'iperbole scritta in forma canonica (cfr. l'esercizio 8). Si supponga $a \geq b$ (questo è sempre possibile, effettuando eventualmente una rotazione di $\pi/2$). Chiamiamo *vertici* i punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$, *centro* il punto $(0, 0)$, *fuochi* i punti $(\pm f, 0)$, con $f := \sqrt{a^2 + b^2}$, e *asintoti* le rette $y = \pm bx/a$. L'iperbole è costituita da due componenti connesse (una nel semipiano $x > 0$ e una nel semipiano $x < 0$), che prendono il nome di *rami*. Si definisce *eccentricità* la quantità $\varepsilon := f/a \in (1, +\infty)$. Si dimostri che si può definire l'iperbole come il luogo dei punti tali che la differenza delle loro distanze da due punti fissi è costante e che i due punti sono i fuochi. [Suggerimento. Sia (x, y) un punto del piano. Si impone

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2c,$$

dove c è una costante. Si procede quindi come per l'esercizio 9.]

Esercizio 11 Si consideri l'equazione di una parabola scritta in forma canonica (cfr. l'esercizio 8). Chiamiamo *vertice* il punto $(0, 0)$, *fuoco* il punto $(0, f)$, con $f := 1/4p$, e *direttrice* la retta $y = -1/4p$. L'*eccentricità* è per definizione $\varepsilon := 1$. Si dimostri che si può definire la parabola come il luogo dei punti equidistanti da una retta e da un punto fisso, e che la retta e il punto sono, rispettivamente, la direttrice e il fuoco. [Suggerimento. Si impone che la distanza di un punto (x, y) del piano dal punto $(0, f)$ sia uguale alla sua distanza dalla retta $y = c$, con c costante:

$$\sqrt{x^2 + (y-f)^2} = (y-c).$$

Se $p := -1/4c$ l'equazione descrive la parabola $y = px^2$.]

Esercizio 12 Si dimostri che si può definire una conica come il luogo dei punti P tali che, se $d(P, F)$ e $d(P, r)$ indicano le distanze di P da un punto fisso F e da una retta r , rispettivamente, si ha $d(P, F) = \varepsilon d(P, r)$, per qualche costante $\varepsilon > 0$; F , r ed ε sono *fuoco*, *direttrice* ed *eccentricità* della conica. [Suggerimento. Il caso $\varepsilon = 1$ è discusso nell'esercizio 11 e corrisponde alla parabola. Se $\varepsilon \neq 1$, si sceglie un sistema di coordinate in cui $F = (f, 0)$ e r abbia equazione $x = c$. Imponendo

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} = \varepsilon|x-c|,$$

se $\varepsilon \in (0, 1)$ e $c = f/\varepsilon^2$ troviamo un'ellisse con $a^2 = f^2/\varepsilon^2$ e $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$, mentre se $\varepsilon > 1$ e $c = f/\varepsilon^2$ troviamo un'iperbole con $a^2 = f^2/\varepsilon^2$ e $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$; l'equazione della direttrice, nel caso di ellisse e iperbole, è dunque $x = a/\varepsilon$.]

Esercizio 13 Si dimostri la (32.36). [Soluzione. Per h sufficientemente piccolo possiamo sempre assumere che la funzione $\rho(t)$ sia monotona in $[t, t+h]$. Supponiamo $\rho(t+h) > \rho(t)$; in caso contrario si invertono i ruoli delle due quantità nella discussione che segue. L'area $A(t+h) - A(t)$ del settore dell'ellisse è compresa tra le aree dei due settori circolari di apertura $\theta(t+h) - \theta(t)$ e raggi, rispettivamente, $\rho(t+h)$ e $\rho(t)$. Quindi

$$\frac{1}{2}\rho^2(t)(\theta(t+h) - \theta(t)) \leq A(t+h) - A(t) \leq \frac{1}{2}\rho^2(t+h)(\theta(t+h) - \theta(t)),$$

dove $\theta(t+h) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)h + O(h^2)$ e $\rho(t+h) = \rho(t) + O(h)$. Si ottiene allora

$$\frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t)h + O(h^2) \leq A(t+h) - A(t) \leq \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t)h + O(h^2),$$

così che, passando al limite $h \rightarrow 0$, si trova la (32.36).]

Esercizio 14 Si dimostri che l'area dell'ellisse di semiassi di lunghezza a e b è data da πab .

Esercizio 15 Sia P un punto sulla superficie della sfera tridimensionale di raggio R . Si dimostri che

$$\frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} \frac{d\mathbf{x}}{d(\mathbf{x}, P)} = \frac{1}{R}, \quad |S_R| = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

dove $S_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq R\}$ e $d(\mathbf{x}, P)$ è la distanza tra il punto di coordinate \mathbf{x} e il punto P . [Soluzione. Usando coordinate sferiche si ha $\mathbf{x} = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi)$, così che, scegliendo un sistema di coordinate in cui sia $P = (0, 0, R)$, risulta $d(\mathbf{x}, P) = \sqrt{\rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \varphi}$. Si ha

$$\int_{S_R} \frac{d\mathbf{x}}{d(\mathbf{x}, P)} = \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \frac{d\varphi \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \varphi}} = \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho t}},$$

dove

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho t}} = -\frac{1}{\rho R} \left(\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho} - \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho} \right) = -\frac{1}{\rho R} (R + \rho - R - \rho) = \frac{2}{R},$$

da cui segue immediatamente il risultato.]

Esercizio 16 Si dimostri che l'energia potenziale gravitazionale di un punto P di massa m situato sulla superficie di una sfera tridimensionale omogenea di raggio R e di massa M è data da $-GMm/R$. Si dimostri più in generale il *teorema di Gauss* o *teorema del guscio sferico*: un guscio sferico omogeneo, di massa M e di raggi $0 \leq r < R$, esercita su un corpo esterno una forza gravitazionale pari a quella di un punto materiale di massa M posto nel suo centro e su un punto interno una forza gravitazionale nulla. Se ne deduca che l'energia potenziale di un punto materiale di massa m , che si trovi a un'altezza h rispetto alla superficie della Terra, è data, a meno di una costante additiva irrilevante e di correzioni di secondo ordine in h , da mgh , dove g è l'accelerazione di gravità definita nell'osservazione 32.11, e che la forza corrispondente punta verso il centro della Terra e ha intensità mg (forza di gravità). [Soluzione. Consideriamo esplicitamente il caso di una sfera omogenea ($r = 0$). Si può immaginare la sfera costituita da elementi infinitesimi di volume $d\mathbf{x} = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$ e di massa $\lambda d\mathbf{x}$, dove $\lambda = M/|S_R|$ (con le notazioni dell'esercizio 15) è la densità di massa. L'energia potenziale gravitazionale del punto P dovuto all'elemento infinitesimo è $-Gm\lambda d\mathbf{x}/d(\mathbf{x}, P)$, quindi l'energia gravitazionale totale di P è

$$-Gm \frac{M}{|S_R|} \int_{S_R} \frac{d\mathbf{x}}{d(\mathbf{x}, P)} = -\frac{GmM}{R},$$

dove si è utilizzato l'esercizio 15 per calcolare l'integrale. Il caso generale $r \in (0, R)$ si discute in modo simile. Se P è un punto materiale che si trova a distanza $R + h$ dal centro della Terra, dove R è il raggio della Terra e $h \ll R$, si ha $d(\mathbf{x}, P) = \sqrt{\rho^2 + (R + h)^2 - 2(R + h)\rho \cos \varphi}$ e, ragionando come nell'esercizio 15, si trova

$$\int_{S_R} \frac{d\mathbf{x}}{d(\mathbf{x}, P)} = \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{(R + h)^2 + \rho^2 - 2(R + h)\rho t}} = \int_0^R d\rho \rho^2 \int_0^{2\pi} d\theta \frac{2}{R + h},$$

così che l'energia potenziale gravitazionale del punto P è

$$-\frac{GMm}{\rho + h} = -\frac{GmM}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{h}{\rho}} = -\frac{GMm}{\rho} \left(1 - \frac{h}{\rho} + O\left(\left(\frac{h}{\rho}\right)^2\right) \right) \approx -\frac{GMm}{\rho} + \frac{GMm}{\rho^2} h,$$

dove M è la massa della Terra. Tenendo conto che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva, si può approssimare l'energia potenziale con $U(h) := mgh$, dove $g = GM/\rho^2$. Introducendo i valori di G , M e ρ , si trova $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Poiché la forza \mathbf{F} è, a meno del segno, il gradiente dell'energia potenziale, essa ha direzione radiale, è rivolta verso il centro della Terra e ha intensità mg . Se si fissa un sistema di riferimento che abbia l'origine in P e asse \mathbf{e}_z diretto lungo il raggio della Terra e rivolto verso l'esterno, si ottiene $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$.]

Esercizio 17 Dati tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, il vettore $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z})$ prende il nome di *prodotto triplo vettoriale*. Si dimostri l'identità

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{z},$$

valida per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. (Si noti che $\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) \neq (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge \mathbf{z}$.)

Esercizio 18 Dati tre vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, lo scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$ prende il nome di *prodotto misto* o *prodotto triplo scalare*. Si dimostri l'identità (nota come *identità del prodotto misto*)

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$$

valida per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 19 Si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione (31.8) si ha

$$\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} = -F(\rho) (\dot{\rho} \mathbf{r} - \rho \dot{\mathbf{r}}).$$

[*Suggerimento*. Si usi l'esercizio 17 e il fatto che $2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = (d/dt)\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$.]

Esercizio 20 Si dimostri che per il campo centrale gravitazionale il *vettore di Laplace-Runge-Lenz* (o *vettore di Runge-Lenz*), definito come

$$\mathbf{A} := \mu \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

è una costante del moto. [*Suggerimento*. Si usi la conservazione del momento angolare, l'esercizio 19 e il fatto che, per il campo centrale gravitazionale, si ha $F(\rho) = -k/\rho^2$.]

Esercizio 21 Si utilizzi il risultato dell'esercizio 20 per dimostrare che le orbite, nel caso del campo centrale gravitazionale, hanno la forma (32.28). [*Suggerimento*. Si ha $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$, quindi \mathbf{A} è un vettore costante nel piano in cui si svolge il moto. Prendendo l'asse x diretto lungo il vettore \mathbf{A} e ponendo $A = |\mathbf{A}|$, si trova $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = A\rho \cos \theta = L^2 - \mu k\rho$, dove si è usata due volte di seguito l'identità $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \wedge \mathbf{x}$ (cfr. l'esercizio 18) e la definizione di momento angolare.]

Esercizio 22 Si dimostri la (33.6). [*Suggerimento*. Si veda la dimostrazione del teorema 29.6.]

Esercizio 23 Si dimostri la (33.11). [*Suggerimento*. Si veda la (30.7) del capitolo 6.]

Esercizio 24 Si dimostri la (33.12). [*Suggerimento*. Si ragiona come per dimostrare la (29.15).]

Esercizio 25 Un punto materiale di massa $m = 1$ soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 + \frac{\alpha}{\rho^2}, \quad k > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1) Si scriva l'equazione del moto.

(2) Si determinino le orbite esprimendo la variabile radiale in termini della variabile angolare.

(3) Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto del sistema complessivo è periodico.

[*Suggerimento.* Per il punto (2) si può ragionare come nel caso dell'energia potenziale armonica nel §32.1, notando che il termine addizionale dovuto alla forza centrifuga in (31.17) è proporzionale a $1/\rho^2$. Quello che cambia rispetto al caso armonico è che ora non tutte le orbite saranno chiuse.]

Esercizio 26 Un punto materiale di massa m è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{k}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2}, \quad k, \alpha > 0.$$

(1) Si scrivano le equazioni del moto.

(2) Si determinino le orbite esprimendo la variabile radiale in termini della variabile angolare.

(3) Si dimostri che le orbite limitate sono ellissi in un sistema di riferimento che ruoti intorno al centro della forza, e si calcoli la velocità angolare con cui deve ruotare il sistema perché questo accada.

[*Suggerimento.* Si può ragionare come nel caso dell'energia potenziale gravitazionale nel §32.2. Si arriva a un'espressione che differisce dalla (32.24) in quanto L^2 è sostituito da $L^2 - 2\mu\alpha$ e di fronte all'integrale compare un fattore $R := L/\sqrt{L^2 - 2\mu\alpha}$. Nel sistema fisso, la variazione della variabile angolare θ in un periodo del moto radiale è data da $2\pi R$ (anziché di 2π come nel caso gravitazionale). In luogo della (32.26), che possiamo scrivere nella forma $\theta = F_L(\rho)$, definendo opportunamente la funzione F_L , si ottiene $\theta = R F_{L/R}(\rho)$. L'equazione $\theta(t) = F_{L/R}(\rho(t))$ definisce un'ellisse per valori di energia negativi (a cui corrispondono moti limitati). Se operiamo la rotazione $(\rho, \theta) \mapsto (\rho', \theta') = (\rho, \theta - \alpha(t))$, con $\alpha(t) := (R - 1)F_{L/R}(\rho(t))$, nel sistema rotante risulta $\theta'(t) = F_{L/R}(\rho'(t))$ e quindi il moto avviene lungo un'ellisse. La velocità angolare media con cui ruota il sistema è $\Omega := R - 1$; per α piccolo possiamo approssimare $\Omega = m\alpha/L^2 + O(\alpha^2)$.]

Esercizio 27 Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{1}{2\rho^4} + \frac{1}{6\rho^6} + \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.

(1) Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.

(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

(3) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.

(4) Si analizzino qualitativamente le orbite e si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.

(5) Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

[*Suggerimento.* Sia $\beta := \alpha + L^2$, dove L è il modulo del momento angolare. L'energia potenziale efficace non ha punti stazionari se $\beta > 1$, ha un flesso orizzontale in 1 se $\beta = 1$, ha un minimo in $\rho_2 := ((1 - \sqrt{1 - \beta})/\beta)^{1/2}$ e un massimo in $\rho_1 := ((1 + \sqrt{1 - \beta})/\beta)^{1/2}$ se $\beta \in (0, 1)$, ha un minimo in $1/\sqrt{2}$ se $\beta = 0$ e ha un minimo in $(1 - \sqrt{1 - \beta})/\beta)^{1/2}$ se $\beta < 0$. I grafici dell'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$ e le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ sono rappresentati nelle figure 7.13÷7.16.]

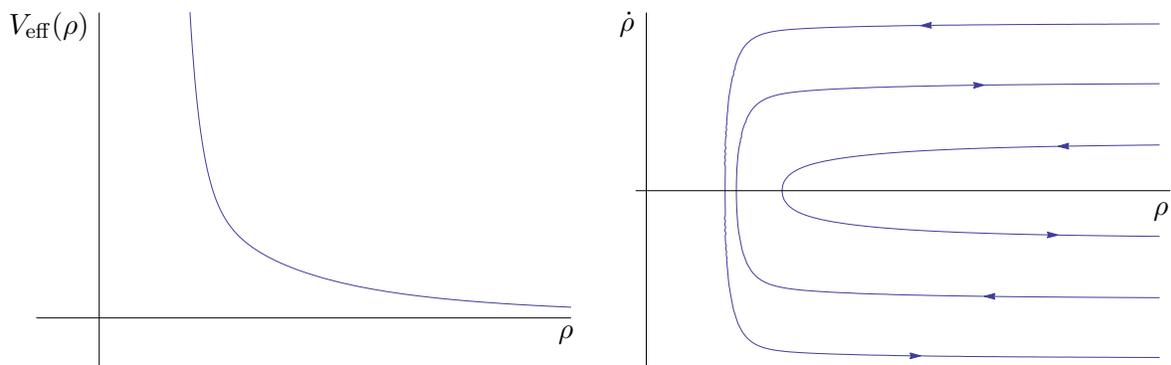


Figura 7.13: Grafico dell'energia potenziale efficace e piano delle fasi per l'esercizio 27 per $\beta > 1$.

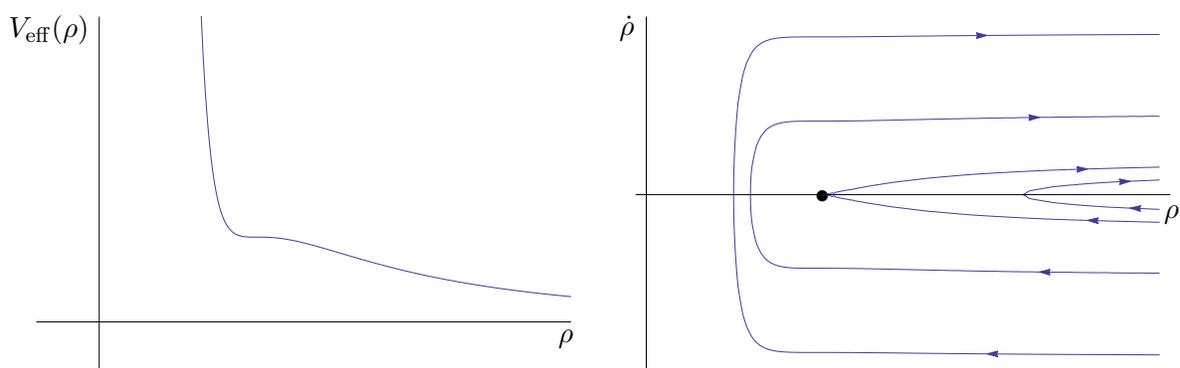


Figura 7.14: Grafico dell'energia potenziale efficace e piano delle fasi per l'esercizio 27 per $\beta = 1$.

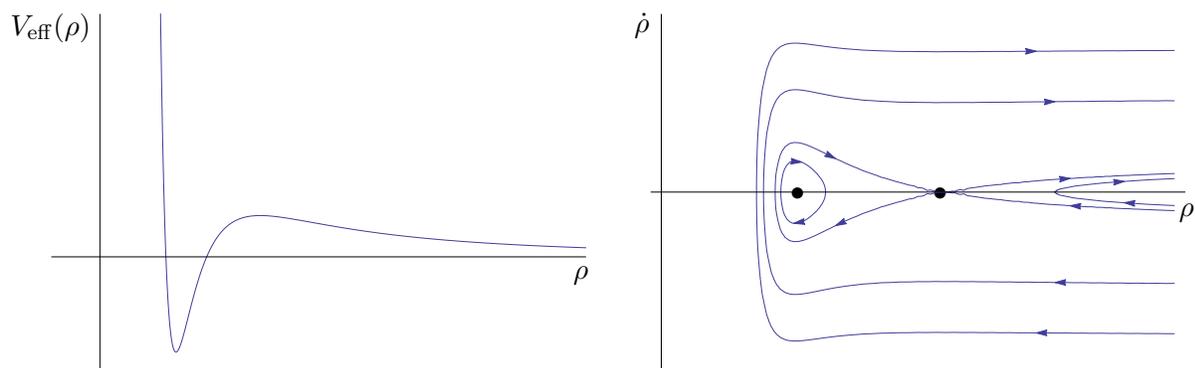


Figura 7.15: Grafico dell'energia potenziale efficace e piano delle fasi per l'esercizio 27 per $\beta \in (0, 1)$.

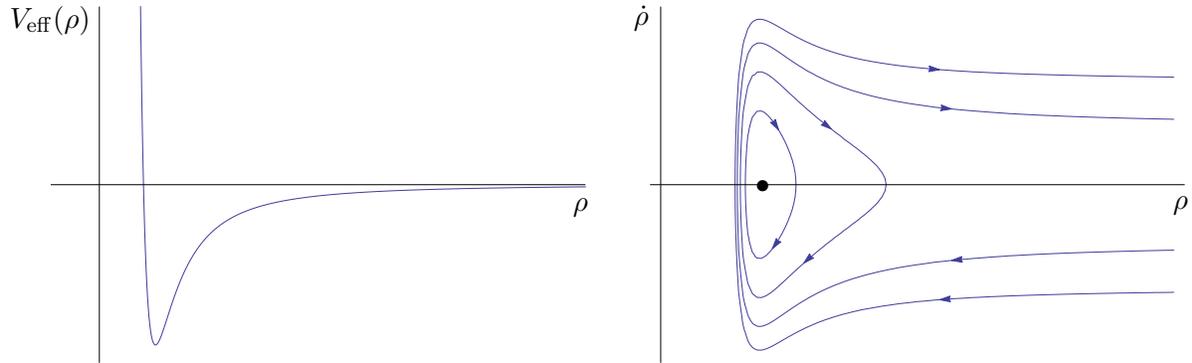


Figura 7.16: Grafico dell'energia potenziale efficace e piano delle fasi per l'esercizio 27 per $\beta \leq 0$.

Esercizio 28 Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} - \frac{\gamma}{\rho^3}, \quad \alpha, \gamma > 0.$$

Si discuta il moto del sistema rispondendo alle domande seguenti al variare dei parametri α, γ, L , se L è il modulo del momento angolare del sistema.

- (1) Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
- (4) Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (5) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (6) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
- (7) Si discuta un caso in cui i parametri e i dati iniziali siano fissati in modo da avere un moto di caduta verso il centro e si studi se il tempo di caduta è finito o infinito.

Esercizio 29 Un punto materiale di massa $m = 1$ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si risponda alle domande seguenti al variare del parametro α e del modulo L del momento angolare.

- (1) Si scriva l'equazione del moto e il sistema dinamico associato.
- (2) Si determini i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
- (4) Si analizzino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (5) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (6) Si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

[Suggerimento. Sia $\beta := L^2 - \alpha/2$, dove L è il modulo del momento angolare. L'energia potenziale efficace $V_{\text{eff}}(\rho)$ non ha punti stazionari se $\beta \leq 0$, mentre ha un minimo in $\sqrt{\beta}$ se $\beta > 0$. Il grafico di $V_{\text{eff}}(\rho)$ e le orbite nel piano delle fasi $(\rho, \dot{\rho})$ sono rappresentati nelle figure 7.17÷7.19 a seconda del valore di β . Se $L \neq 0$ il moto avviene in un piano e $V_{\text{eff}}(\rho)$ è l'energia potenziale efficace della variabile radiale ρ . Se $L = 0$ il moto avviene lungo una retta: si tratta in tal caso di un moto unidimensionale con energia potenziale $V_{\text{eff}}(x)$, $x > 0$.]

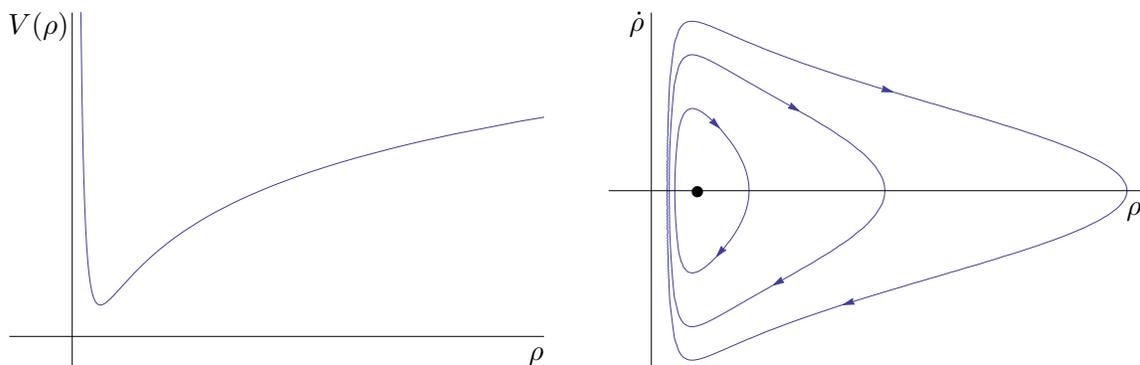


Figura 7.17: Grafico dell'energia potenziale efficace piano delle fasi per l'esercizio 29 per $\beta > 0$.

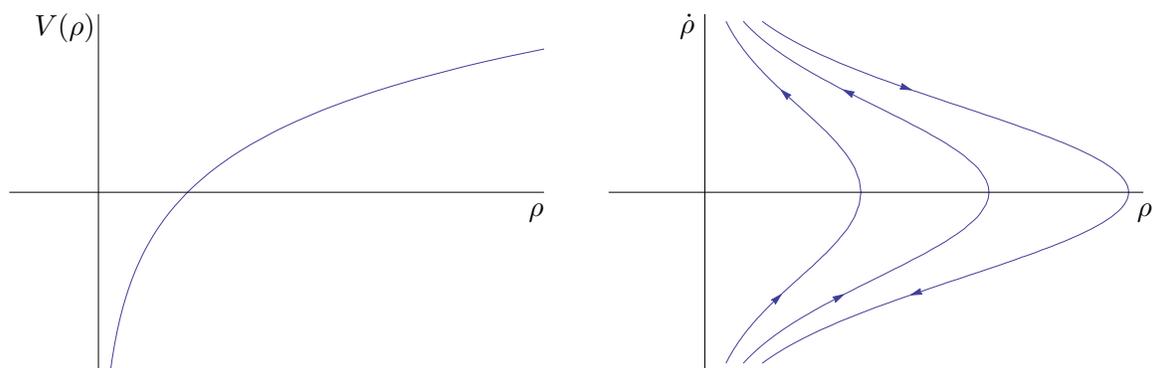


Figura 7.18: Grafico dell'energia potenziale efficace piano delle fasi per l'esercizio 29 per $\beta = 0$.

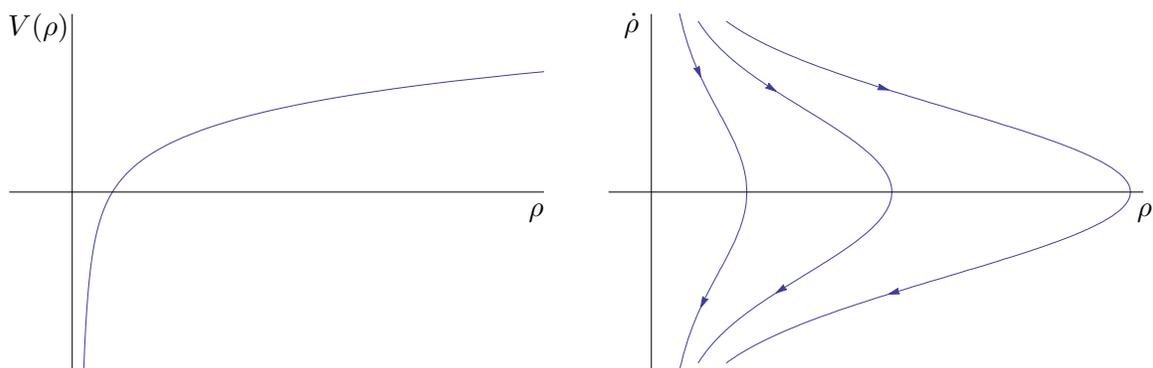


Figura 7.19: Grafico dell'energia potenziale efficace e piano delle fasi per l'esercizio 29 per $\beta < 0$.

Esercizio 30 Si considerino due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 2$ che interagiscono attraverso forze che soddisfino le condizioni 1÷3 a pag. 335. In particolare, se \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 sono le coordinate dei punti P_1 e P_2 , rispettivamente, le forze che agiscono su P_1 e P_2 sono, rispettivamente,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|), \quad \mathbf{F}_2 = -\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} F(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|),$$

dove

$$F(\rho) = -\frac{dV}{d\rho}(\rho), \quad V(\rho) = \rho - \frac{1}{4}\rho^4.$$

- (1) Si descriva il moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi a un sistema che si muove in un campo centrale, e si mostri che il sistema che quest'ultimo è un sistema due gradi di libertà, descrivibile attraverso le variabili polari (ρ, θ) .
- (2) Si studi il moto della variabile $\rho(t)$ al variare del momento angolare; in particolare, si determinino i punti di equilibrio, se ne discuta la stabilità e si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (3) Si scriva la legge di variazione di $\theta(t)$ in funzione di $\rho(t)$.
- (4) Sempre nel sistema del centro di massa, si individui un moto periodico, se ne trovi il periodo e si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

Esercizio 31 Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log(1 + \rho^2) - \log \rho.$$

Al variare del modulo del momento angolare L , con $L > 0$, si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
- (4) Si analizzino qualitativamente le orbite e si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (5) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
- (6) Si discuta come cambia lo scenario per $L = 0$.

Esercizio 32 Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = 2 \log \rho - \frac{1}{2} \log(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4).$$

Si assuma che il momento angolare L del sistema sia diverso da zero. Al variare del modulo L di L si risponda alle seguenti domande.

- (1) Si scriva l'equazione del moto per la variabile ρ e il sistema dinamico associato.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
- (4) Si analizzino qualitativamente le orbite e si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (5) Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
- (6) Si discuta come cambia lo scenario per $L = 0$.