

8 | Moti relativi

§34 Moto in un sistema mobile di coordinate

Abbiamo visto nei capitoli precedenti che spesso può essere utile cambiare coordinate quando si studiano le traiettorie di un sistema dinamico. Può infatti succedere che in qualche particolare sistema di riferimento le equazioni del moto assumano una forma più semplice e sia quindi più facile trovarne la soluzione. Una volta fatto questo, ovviamente, occorre poi ritornare nel sistema di riferimento di partenza.

Nel presente capitolo ci proponiamo di approfondire ulteriormente il problema del cambiamento di sistema di riferimento. Più precisamente considereremo il caso in cui un sistema di riferimento sia *fisso* e uno *mobile*. Il primo costituisce quello che comunemente prende il nome di *sistema di riferimento di laboratorio*, poiché lo si può immaginare come il sistema di riferimento (fisso) in cui si studia qualche sistema in movimento. Può essere utile lavorare anche in un sistema di riferimento mobile nelle seguenti situazioni:

1. la descrizione del moto appare più semplice nel sistema mobile (e quindi conviene risolvere prima le equazioni del moto in quel sistema di riferimento e poi esprimere il risultato nel sistema fisso),
2. si sa come studiare il moto nel sistema fisso, ma l'osservatore è situato nel sistema mobile e vuole quindi descrivere il moto in quel sistema.

In entrambi i casi occorre quindi fissare la legge che consenta di esprimere le coordinate del sistema di riferimento mobile rispetto a quello fisso.

Un esempio particolarmente significativo della situazione 1 si incontrerà quando studieremo i sistemi rigidi (cfr. i capitoli successivi). In tal caso si sceglierà come sistema di riferimento mobile un sistema di riferimento solidale con il sistema rigido, i.e. tale che in esso il sistema rigido si possa considerare fisso. Riguardo alla situazione 2 si consideri che spesso si effettuano esperimenti in sistemi di riferimento mobili, pertanto, a partire dalle leggi fondamentali della fisica, occorre conoscere esattamente in che modo tali leggi vengano modificate dal fatto di trovarsi in un sistema in movimento. Se si tiene conto che la Terra (e quindi qualsiasi laboratorio

in essa) non costituisce un sistema di riferimento fisso, si può apprezzare subito l'importanza di poter passare da un sistema di riferimento all'altro.

Ricordiamo che $M(n)$ indica l'insieme delle matrici $n \times n$ e $M(n, \mathbb{R})$ lo spazio delle matrici $n \times n$ con elementi reali (cfr. pag. 10). Il sottospazio $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici $A \in M(n, \mathbb{R})$ tali che $\det A \neq 0$ ha struttura di gruppo, come è immediato verificare (cfr. l'esercizio 1), e prende il nome di *gruppo lineare*; $SL(n, \mathbb{R})$ è il sottospazio (sottogruppo) di $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici A che hanno determinante $\det A = 1$, e prende il nome di *gruppo lineare speciale*.

Il gruppo delle *matrici ortogonali*, i.e. delle matrici A tali che $A^T = A^{-1}$ (dove A^T e A^{-1} indicano la trasposta e l'inversa di A , rispettivamente), si indica con $O(n)$ e prende il nome di *gruppo ortogonale*. Se le matrici sono a elementi complessi e A^\dagger indica la matrice aggiunta di A (cfr. pag. 10), la condizione $A^\dagger = A^{-1}$ definisce il gruppo delle *matrici unitarie*, indicato con $U(n)$. Se $A \in O(n)$, si ha $|\det A| = 1$ (cfr. l'esercizio 2). Il *gruppo ortogonale speciale* $SO(n)$ è il sottogruppo di $O(n)$ costituito dalle matrici ortogonali A con $\det A = 1$.

Lemma 34.1 *Il gruppo $O(n)$ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n^2} , di dimensione $n(n-1)/2$.*

Dimostrazione. La relazione matriciale $A^T A = \mathbb{1}$ equivale alle n^2 equazioni

$$\sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} A_{kj} = (A^T)_{i1} A_{1j} + \dots + (A^T)_{in} A_{nj} = \delta_{ij},$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker, che possiamo scrivere come

$$A_{1i} A_{1j} + \dots + A_{ni} A_{nj} = \delta_{ij};$$

si hanno quindi $(n^2 + n)/2$ equazioni indipendenti (n per $i = j$ e $(n^2 - n)/2$ per $i < j$). Quindi la dimensione di $O(n)$ è data da

$$\dim(O(n)) = \dim(\mathbb{R}^{n^2}) - \frac{n^2 + n}{2} = n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

da cui segue l'asserto. ■

Consideriamo in \mathbb{R}^3 due *sistemi di riferimento* κ e K , di cui il primo è *fisso* e il secondo è *mobile*; indicheremo con O e O' le rispettive origini. Se (x, y, z) è il *sistema di coordinate* ottenuto fissando in \mathbb{R}^3 una base $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ scriveremo $\kappa = Oxyz$ (cfr. il §31.1 per le notazioni); analogamente se (ξ, η, ζ) è il sistema di coordinate ottenuto fissando in K una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, scriveremo $K = O'\xi\eta\zeta$. Chiameremo κ *sistema di riferimento assoluto* e K *sistema di riferimento relativo*.

Data un'applicazione $D: K \rightarrow \kappa$, diremo che D *conserva la metrica* se $|D\mathbf{x}| = |\mathbf{x}| \forall \mathbf{x}$ (dove $|\cdot|$ denota la norma euclidea) e che *conserva l'orientazione* se le terne $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ hanno la stessa orientazione, i.e. se, indicando con P la matrice di cambiamento di base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \mapsto \{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ (cfr. la (1.17)), si ha $\det P > 0$.

Definizione 34.2 (MOTO RIGIDO) Chiameremo moto rigido (o semplicemente moto) di K rispetto a κ un'applicazione che dipende in modo regolare da $t \in \mathbb{R}$,

$$D_t: K \rightarrow \kappa, \quad (34.1)$$

e che conserva la metrica e l'orientazione. A t fissato D_t costituisce una trasformazione rigida.

Un esempio di moto rigido è rappresentato nella figura 8.1. Il moto si chiama *rotazione* se l'origine delle coordinate di K coincide con l'origine delle coordinate di κ ; si chiama *traslazione* se le coordinate di tutti i punti di K differiscono per uno stesso vettore $\mathbf{r}(t)$ rispetto a quelle dei punti di κ .

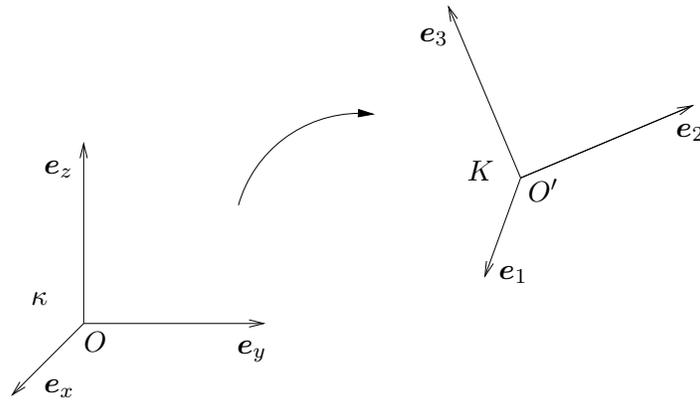


Figura 8.1: Esempio di trasformazione rigida D_t che fa passare dal sistema κ al sistema K .

Nel seguito indicheremo con $\mathbf{q}(t)$ il raggio vettore di un punto rispetto al sistema di riferimento κ e con $\mathbf{Q}(t)$ il raggio vettore dello stesso punto rispetto al sistema di riferimento K , i.e. $\mathbf{q}(t) = D_t \mathbf{Q}(t)$. A volte scriveremo semplicemente $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}$, senza indicarne esplicitamente la dipendenza dal tempo, quando questa risulti ovvia dal contesto. Analogamente a volte scriveremo semplicemente $D_t = D$, sottointendendo la dipendenza dal tempo. Infine indicheremo con \mathbf{O} e \mathbf{O}' i vettori che individuano le origini del sistema fisso e del sistema mobile, rispettivamente. Una trasformazione D è quindi una traslazione se esiste un vettore \mathbf{r} tale che $D\mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{r} \forall \mathbf{q}$ ed è una rotazione se $D\mathbf{O} = \mathbf{O}$. Si noti che, se $D\mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{r}$, allora $D^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$, come è immediato verificare richiedendo che si abbia $D^{-1}D = \mathbf{1}$.

Osservazione 34.3 Ogni trasformazione rigida D_t si esprime in modo univoco come composizione di una rotazione $B_t: K \rightarrow \kappa$ con una traslazione $C_t: \kappa \rightarrow \kappa$, i.e. $D_t = C_t \circ B_t$. Infatti, se poniamo $\mathbf{r}(t) := D_t \mathbf{O}$, dove \mathbf{O} è l'origine di K , e definiamo la traslazione $C_t \mathbf{q} := \mathbf{q} + \mathbf{r}(t)$, allora $B_t = C_t^{-1} \circ D_t$ è una rotazione, poiché $B_t \mathbf{O} = \mathbf{O}$ (cfr. la figura 8.2).

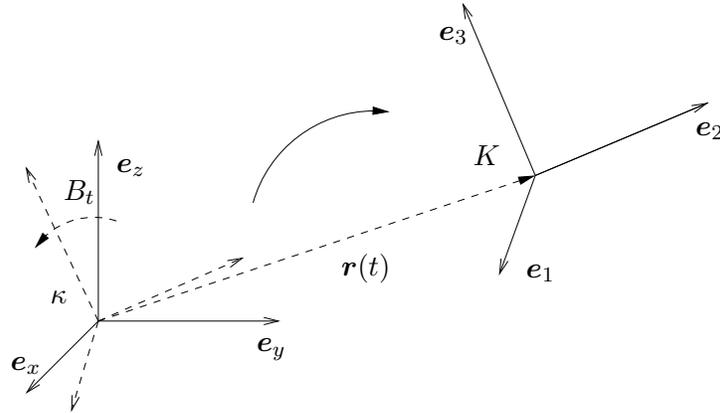


Figura 8.2: La trasformazione della figura 8.1 come composizione di una rotazione con una traslazione.

Osservazione 34.4 Se $D_t = C_t$ (ovvero $B_t = \mathbf{1}$), diremo che il moto è *puramente traslatorio* (cfr. la figura 8.3). Se $C_t = \mathbf{1}$, diremo che il moto è *puramente rotatorio* (cfr. la figura 8.4).

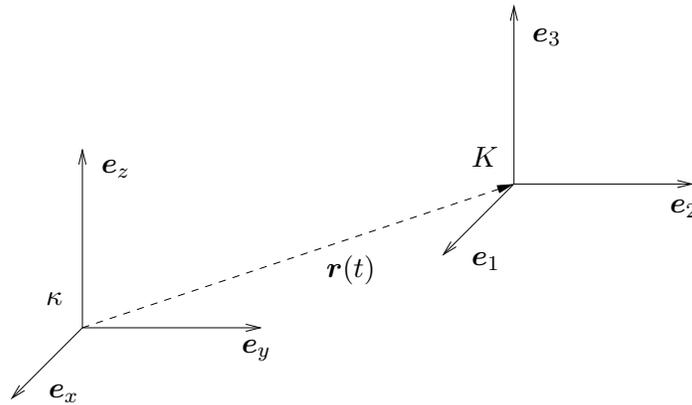


Figura 8.3: Esempio di moto puramente traslatorio.

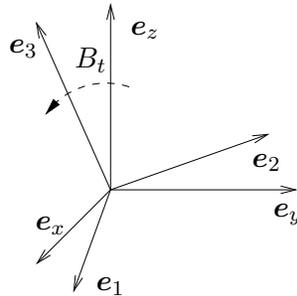


Figura 8.4: Esempio di moto puramente rotatorio.

Indichiamo con $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2$ e con $\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2$, rispettivamente, il prodotto scalare e il prodotto vettoriale di due vettori $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbb{R}^3$ (cfr. pag.333). Fissata una base ortonormale $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ (e quindi un sistema di coordinate) si ha $\mathbf{q}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, così che

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1 = |\mathbf{q}_1|^2, \quad (34.2a)$$

$$\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 = (y_1z_2 - z_1y_2, z_1x_2 - x_1z_2, x_1y_2 - y_1x_2). \quad (34.2b)$$

Ricordiamo che, formalmente, il prodotto vettoriale dei due vettori si può scrivere nella forma di determinante (cfr. la (31.1b)). Il prodotto vettoriale $\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2$ di due vettori \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 tra loro non paralleli è un vettore ortogonale al piano individuato da essi e diretto in modo tale da vedere \mathbf{q}_1 sovrapporsi a \mathbf{q}_2 ruotando in senso antiorario (cfr. la figura 8.5 e l'esercizio 5). Inoltre si ha $|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2| = |\mathbf{q}_1||\mathbf{q}_2| \sin \alpha$, se $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo compreso tra i due vettori (cfr. l'esercizio 5).

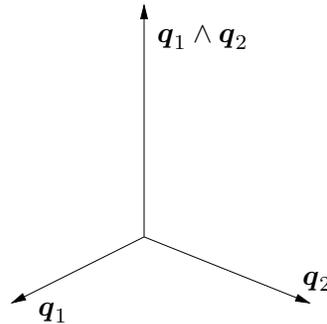


Figura 8.5: Prodotto vettoriale di due vettori.

Lemma 34.5 *La rotazione B_t è un operatore lineare ortogonale, i.e., fissata una qualsiasi base ortonormale in \mathbb{R}^3 , essa è rappresentata da una matrice ortogonale.*

Dimostrazione. Poiché B_t conserva le distanze e lascia fissa l'origine trasforma i triangoli in triangoli, i quali, dovendo rimanere le lunghezze dei lati inalterate, conservano anche gli angoli. Poiché ogni combinazione lineare di vettori si può interpretare geometricamente in termini di triangoli (a partire dalla proprietà che la somma di due vettori è data dal segmento orientato che costituisce il terzo lato di un triangolo di cui i vettori dati costituiscono gli altri due lati), segue allora che B_t non altera i coefficienti della trasformazione lineare e quindi è lineare.

Fissato un sistema di coordinate, si può quindi rappresentare B_t tramite una matrice. Poiché B_t conserva le distanze deve risultare

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} = B_t \mathbf{Q} \cdot B_t \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot B_t^T B_t \mathbf{Q}, \quad (34.3)$$

e quindi la matrice rappresentativa di B_t è una matrice ortogonale (che continueremo a indicare con lo stesso simbolo dell'operatore). ■

Osservazione 34.6 Poiché la traslazione è una trasformazione lineare, il lemma 34.5, insieme con l'osservazione 34.3, implica che una trasformazione rigida D è una trasformazione lineare, i.e. è sempre della forma $D: \mathbf{q} \rightarrow A\mathbf{q} + \mathbf{r}$. Poiché D conserva la metrica, si ha $|\det A| = 1$; poiché conserva l'orientazione si ha $\det A > 0$ (cfr. l'esercizio 6), che implica $\det A = 1$. Quindi la matrice di rotazione è un elemento del gruppo ortogonale speciale $SO(3)$.

Con le notazioni dell'osservazione 34.4, scriveremo $\mathbf{q}(t) = D_t\mathbf{Q}(t) = B_t\mathbf{Q}(t) + \mathbf{r}(t)$, se D_t è il moto (34.1), o, semplicemente (cfr. l'osservazione 34.3),

$$\mathbf{q} = D\mathbf{Q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r}. \quad (34.4)$$

Derivando la (34.4), troviamo

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + B\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}. \quad (34.5)$$

Per semplificare la trattazione considereremo preliminarmente moti puramente traslatori (lemma 34.7), quindi moti puramente rotatori (a partire dal lemma 34.8). Infine combineremo i risultati relativi ai due casi per arrivare al risultato generale che stabilisce la relazione che lega la velocità di un punto in un sistema fisso a quella in un sistema mobile (teorema 34.24).

Lemma 34.7 *Se il sistema K si muove di moto puramente traslatorio rispetto al sistema κ , la velocità di un punto mobile rispetto al sistema fisso κ (velocità assoluta) è $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}$, con*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0,$$

dove $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{Q}}$ è la velocità di un punto mobile rispetto al sistema mobile K (velocità relativa) e $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ è la velocità del sistema K rispetto a κ (velocità traslatoria di trascinamento).

Dimostrazione. Se il moto è puramente traslatorio ($B = \mathbf{1}$) la (34.5) diventa $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{r}}$, da cui segue l'asserto. ■

Lemma 34.8 $\dot{B}B^{-1}$ è un operatore lineare antisimmetrico, i.e., fissata una qualsiasi base ortonormale in \mathbb{R}^3 , la matrice A che lo rappresenta è antisimmetrica, i.e. $A^T = -A$.

Dimostrazione. La linearità segue dal fatto che B è lineare (cfr. il lemma 34.5). Inoltre l'operatore B è ortogonale, quindi $B^{-1} = B^T$, se B^T indica l'operatore trasposto di B . Derivando rispetto al tempo l'identità $BB^T = \mathbf{1}$, otteniamo $\dot{B}B^T + B\dot{B}^T = 0$, quindi

$$\dot{B}B^{-1} + (\dot{B}B^{-1})^T = \dot{B}B^T + (\dot{B}B^T)^T = \dot{B}B^T + (B^T)^T\dot{B}^T = \dot{B}B^T + B\dot{B}^T = 0,$$

da cui segue che $A := \dot{B}B^{-1}$ è antisimmetrico. ■

Fissato un sistema di coordinate cartesiane, un operatore A antisimmetrico in \mathbb{R}^3 è rappresentato da una matrice antisimmetrica 3×3 (che continueremo a indicare con lo stesso simbolo dell'operatore)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (34.6)$$

Lemma 34.9 *Ogni operatore antisimmetrico A nello spazio euclideo tridimensionale orientato è un operatore di prodotto vettoriale, i.e. si ha*

$$A\mathbf{q} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{q}, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, \quad (34.7)$$

dove \mathbf{a} è un vettore fissato dipendente unicamente da A .

Dimostrazione. Gli operatori lineari antisimmetrici in \mathbb{R}^3 formano uno spazio lineare L_{as} , di dimensione $\dim(L_{\text{as}}) = 3$ (cfr. l'esercizio 7). L'operatore di prodotto vettoriale per un vettore fissato \mathbf{a} è lineare e antisimmetrico e l'insieme di tutti gli operatori di prodotto vettoriale forma un sottospazio dello spazio lineare di tutti gli operatori antisimmetrici. Poiché la dimensione del sottospazio è uguale a 3 (in un sistema di coordinate, tante sono le coordinate del vettore \mathbf{a} che determina univocamente l'operatore di prodotto vettoriale), il sottospazio degli operatori di prodotto vettoriale deve coincidere con lo spazio degli operatori antisimmetrici. ■

Osservazione 34.10 Se l'operatore antisimmetrico A è rappresentato dalla matrice (34.6), il vettore \mathbf{a} in (34.9) avrà componenti

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (-A_{23}, A_{13}, -A_{12}). \quad (34.8)$$

Infatti (34.8) è un autovettore di A con autovalore 0 e, dato un qualsiasi vettore $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ (le componenti sono nel sistema di coordinate scelto), si ha $A\mathbf{q} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{q}$, come è immediato verificare. A volte, dato l'operatore A , per evidenziare che, fissato un sistema di riferimento, c'è corrispondenza biunivoca tra la matrice (34.6) e il vettore (34.8), scriveremo $A = A_{\mathbf{a}}$.

Lemma 34.11 *Il prodotto vettoriale conserva la metrica e l'orientazione, i.e.*

$$B\mathbf{X} \wedge B\mathbf{Y} = B(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) \quad (34.9)$$

per ogni coppia di vettori \mathbf{X}, \mathbf{Y} .

Dimostrazione. Poiché il prodotto scalare conserva la metrica (cfr. la (34.3)) e il prodotto vettoriale di due vettori \mathbf{X} e \mathbf{Y} è ortogonale sia a \mathbf{X} sia a \mathbf{Y} , deve essere

$$B\mathbf{X} \cdot B(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad B\mathbf{Y} \cdot B(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \mathbf{0},$$

così che $B(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y})$ è ortogonale al piano individuato dai due vettori $B\mathbf{X}$ e $B\mathbf{Y}$ ed è quindi parallelo a $B\mathbf{X} \wedge B\mathbf{Y}$ (cfr. la figura 8.6).

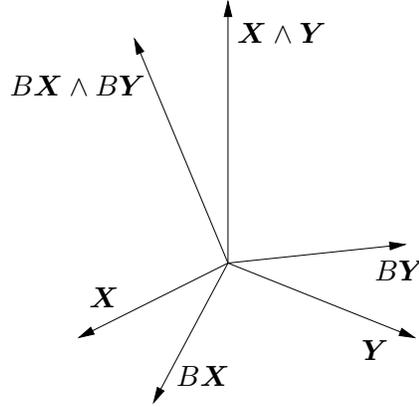


Figura 8.6: Discussione del lemma 34.11.

Inoltre risulta, sempre per la (34.3),

$$|B\mathbf{X} \wedge B\mathbf{Y}|^2 = |B\mathbf{X}|^2|B\mathbf{Y}|^2 - (B\mathbf{X} \cdot B\mathbf{Y})^2 = |\mathbf{X}|^2|\mathbf{Y}|^2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})^2 = |\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}|^2,$$

così che i due vettori $B\mathbf{X} \wedge B\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ hanno lo stesso modulo, quindi anche $B\mathbf{X} \wedge B\mathbf{Y}$ e $B(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y})$ hanno lo stesso modulo. Abbiamo dunque ottenuto

$$B\mathbf{X} \wedge B\mathbf{Y} = \pm B(\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}). \quad (34.10)$$

Per risolvere l'ambiguità di segno, introduciamo un operatore $B(\alpha)$ che dipenda con continuità dal parametro $\alpha \in [0, 1]$, tale che $B(0) = \mathbb{1}$ e $B(1) = B$. Per ogni $\alpha \in [0, 1]$ possiamo ripetere il ragionamento precedente e concludere che deve valere la stessa relazione (34.10) con $B = B(\alpha)$. Poiché per $\alpha = 0$ vale il segno $+$ e la (34.10), con $B(\alpha)$ in luogo di B , è continua in α , concludiamo allora che vale il segno $+$ per ogni α , in particolare per $\alpha = 1$, ottenendo così la (34.9). ■

Corollario 34.12 *Dato un operatore ortogonale B e dato un operatore antisimmetrico A , se \mathbf{a} è il vettore che è associato ad A attraverso la corrispondenza (34.7), i.e. $A = A_{\mathbf{a}}$, si ha*

$$B^{-1}A_{\mathbf{a}}B = A_{B^{-1}\mathbf{a}},$$

i.e. l'operatore $B^{-1}A_{\mathbf{a}}B$ è un operatore antisimmetrico che si può scrivere come operatore di prodotto vettoriale nella forma (34.7), purché si sostituisca $\mathbf{A} = B^{-1}\mathbf{a}$ ad \mathbf{a} .

Dimostrazione. Poiché B è ortogonale e $A_{\mathbf{a}}$ è antisimmetrico si ha

$$B^{-1}A_{\mathbf{a}}B + (B^{-1}A_{\mathbf{a}}B)^T = B^{-1}(A_{\mathbf{a}} + A_{\mathbf{a}}^T)B = 0,$$

i.e. $B^{-1}A_aB$ è antisimmetrico. Quindi, per il lemma 34.9, esiste un vettore \mathbf{b} tale che si abbia

$$B^{-1}A_aB\mathbf{x} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (34.11)$$

Dobbiamo quindi dimostrare che $\mathbf{b} = B^{-1}\mathbf{a}$.

Per il lemma 34.11 e per il lemma 34.9, si ha

$$B^{-1}A_aB\mathbf{Q} = B^{-1}A_a\mathbf{q} = B^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{q}) = B^{-1}\mathbf{a} \wedge B^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{A} \wedge \mathbf{Q} \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3, \quad (34.12)$$

avendo posto $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$ e $\mathbf{a} = B\mathbf{A}$. Dal confronto tra le (34.11) e (34.12), data l'arbitrarietà di \mathbf{x} e di \mathbf{Q} , segue l'identità $\mathbf{b} = \mathbf{A} = B^{-1}\mathbf{a}$. ■

Definizione 34.13 (ROTAZIONE DI TRASCINAMENTO) *Se il moto di K rispetto a κ è puramente rotatorio ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$) e il punto \mathbf{Q} è in quiete nel sistema K ($\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$), diremo che il moto è una rotazione di trascinamento.*

Osservazione 34.14 Una rotazione si dice *uniforme* se avviene intorno a una retta fissa in modo che l'angolo intorno a tale retta varia con velocità costante. In tal caso il vettore $\boldsymbol{\omega}$, che ha la direzione della retta fissa e modulo uguale al modulo della velocità con cui varia l'angolo, prende il nome di *velocità angolare* (cfr. la figura 8.7).

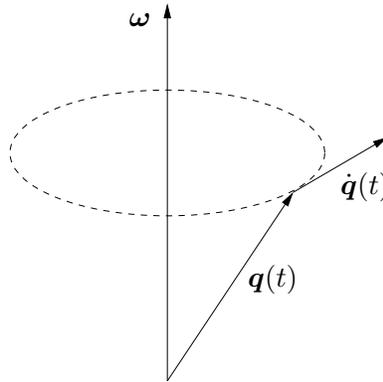


Figura 8.7: Esempio di rotazione uniforme. Il vettore $\dot{\mathbf{q}}(t)$ è in ogni istante t ortogonale al piano individuato dal vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ e da $\mathbf{q}(t)$.

Nel caso di una rotazione uniforme, tenuto quindi conto delle direzioni del raggio vettore del punto mobile $\mathbf{q}(t)$ e della sua velocità, possiamo scrivere

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}(t).$$

In generale il vettore velocità varia nel tempo in direzione e modulo (cioè variano nel tempo sia la direzione della retta intorno alla quale ha luogo la rotazione che la velocità della rotazione stessa). Si ha infatti il seguente risultato.

Teorema 34.15 *In ogni istante $t \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}(t) \in \kappa$ tale che la velocità della rotazione di trascinamento si può esprimere mediante la formula*

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{q}(t), \quad \forall \mathbf{q}(t) \in \kappa. \quad (34.13)$$

Dimostrazione. Se $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, si ha, dalla (34.5), $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q}$ e quindi, ricordando che $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$,

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}B^{-1}\mathbf{q} = A\mathbf{q}.$$

L'operatore lineare $A: \kappa \rightarrow \kappa$ è antisimmetrico (cfr. il lemma 34.8) e la sua azione sui vettori $\mathbf{q} \in \kappa$ si può esprimere come prodotto vettoriale (cfr. il lemma 34.9). Quindi $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}B^{-1}\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}$, dove $\boldsymbol{\omega}$ e $A = \dot{B}B^{-1}$ sono legati dalle relazioni

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seguendo l'osservazione 34.10, possiamo scrivere $A = A_{\boldsymbol{\omega}}$. ■

Definizione 34.16 (VELOCITÀ ANGOLARE) *L'operatore $A = \dot{B}B^{-1}$ prende il nome di operatore velocità angolare. Poiché $B \in \text{SO}(3)$, si ha $\dot{B} = AB \in T_B\text{SO}(3)$, i.e. AB appartiene allo spazio tangente in B a $\text{SO}(3)$. Il vettore $\boldsymbol{\omega}$ tale che $A\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q}$, per ogni $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$, prende il nome di vettore velocità angolare (o velocità angolare tout court).*

Lemma 34.17 *Siano κ e K due sistemi di riferimento, fisso il primo e mobile il secondo, e sia $B: K \rightarrow \kappa$ la rotazione che porta i vettori $\mathbf{Q} \in K$ nei vettori $\mathbf{q} \in \kappa$, $B\mathbf{Q} = \mathbf{q}$. Se $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3\}$ e $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$ sono due terne levogire (che inducono due sistemi di coordinate cartesiane), rispettivamente, in κ e K , e S è la matrice definita da*

$$\boldsymbol{\eta}_i = \sum_{j=1}^3 S_{ij} \boldsymbol{\xi}_j, \quad (34.14)$$

risulta allora

$$S = B^T = B^{-1}. \quad (34.15)$$

i.e. la matrice S è l'inversa (ovvero la trasposta) della matrice B .

Dimostrazione. Siano (Q_1, Q_2, Q_3) le coordinate di un punto P nella terna $\{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$ e (q_1, q_2, q_3) le coordinate dello stesso punto nella terna $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3\}$; quindi

$$\sum_{j=1}^3 Q_j \boldsymbol{\eta}_j = \sum_{j=1}^3 q_j \boldsymbol{\xi}_j.$$

Poiché $B\mathbf{Q} = \mathbf{q}$, si ha, tenendo conto anche della (34.14),

$$\sum_{p=1}^3 S_{ip} B_{pj} = \delta_{ij}, \quad (34.16)$$

dove δ_{ij} è la delta di Kronecker. La (34.16) è equivalente alla (34.15). ■

Osservazione 34.18 Nello studio dei sistemi lineari abbiamo visto che se P è l'operatore lineare che fa passare da una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ a una base $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, i.e. $\mathbf{f}_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} \mathbf{e}_j$, e se l'operatore lineare Q è definito dalla relazione $y = Qx$, dove x e y sono le coordinate nelle basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, rispettivamente, allora si ha $P = (Q^T)^{-1}$. Nel nostro caso, dove $n = 3$, si ha $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\} = \{\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3\}$ e quindi la (34.14) implica $P = S$. D'altra parte $y = \mathbf{Q}$ e $x = \mathbf{q}$, quindi se B è definita in modo che sia $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$, si deve avere $Q = B^{-1}$. Ne segue che $P^{-1} = Q^T$ corrisponde a $S^{-1} = (B^{-1})^T = B$, che è appunto la (34.15).

Teorema 34.19 *A ogni rotazione, che non sia l'identità, nello spazio euclideo tridimensionale orientato corrispondono in modo univoco un versore $\boldsymbol{\xi}$ e un angolo θ , tali che la rotazione consiste in una rotazione di un angolo θ intorno alla retta individuata da $\boldsymbol{\xi}$ (asse di rotazione).*

Dimostrazione. Basta dimostrare che, se B è la matrice associata alla rotazione, allora essa ammette 1 come autovalore semplice.

Notiamo innanzitutto che se λ è un autovalore di B e $\boldsymbol{\xi}$ è l'autovettore associato a λ , si ha $|B\boldsymbol{\xi}| = |\lambda\boldsymbol{\xi}| = |\boldsymbol{\xi}|$, poiché la matrice B è ortogonale, quindi $|\lambda| = 1$. Poiché B è reale, i suoi autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 sono o reali o complessi coniugati. Si deve avere $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det B = 1$, poiché $B \in \text{SO}(3)$. Se un autovalore, per esempio λ_1 , non è reale, si deve avere $\bar{\lambda}_2 = \lambda_1$ (o $\bar{\lambda}_3 = \lambda_1$) e quindi $1 = |\lambda_1|^2 \lambda_3$, i.e. $\lambda_3 = 1$ (o $1 = |\lambda_1|^2 \lambda_2$, i.e. $\lambda_2 = 1$).

Se tutti gli autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 di B sono reali, B deve essere diagonalizzabile. Infatti, se una matrice $B \in M(3, \mathbb{R})$ con autovalori ± 1 ha forma canonica di Jordan con almeno un elemento tra B_{21} e B_{32} uguale a 1 (cfr. il §5), allora esiste $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ tale che, per ogni $C > 0$, $|B^N \boldsymbol{\xi}| > C|\boldsymbol{\xi}|$ per N sufficientemente grande (cfr. l'esercizio 8), così che B non può essere ortogonale. D'altra parte, se $B \neq \mathbf{1}$ è diagonalizzabile, non si può avere $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Quindi almeno due dei tre autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 devono essere uguali a -1 . ■

Osservazione 34.20 La dimostrazione del teorema 34.19 mostra che gli autovalori della matrice $B \neq \mathbf{1}$ sono $e^{i\theta}, e^{-i\theta}, 1$, con $0 < \theta \leq \pi$. Questo vuol dire che, se B è la matrice che rappresenta la rotazione di un angolo θ intorno all'asse $\boldsymbol{\xi}$, si può trovare una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, tale che \mathbf{e}_3 è parallelo a $\boldsymbol{\xi}$ e B ammette rappresentazione

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (34.17)$$

in quella base (cfr. anche l'esercizio 9). Nella stessa base risulta anche

$$A = \dot{B}B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ovvero $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta})$.

Teorema 34.21 *Sia B_t una rotazione. Per ogni istante t_0 , definiamo le “rotazioni relative”*

$$B_\delta(t_0) := B_{t_0+\delta}B_{t_0}^{-1} \quad (34.18)$$

e indichiamo con $\boldsymbol{\xi}_\delta$ e θ_δ i corrispondenti assi e angoli di rotazione, con $|\boldsymbol{\xi}_\delta| = 1$. Allora esistono i limiti

$$\alpha(t_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1}\theta_\delta, \quad \boldsymbol{\xi}(t_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\xi}_\delta, \quad (34.19)$$

e, se $\alpha(t_0) \neq 0$, il vettore $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \alpha(t_0) \boldsymbol{\xi}(t_0)$ rappresenta la velocità angolare all'istante t_0 nel sistema di riferimento κ .

Dimostrazione. Poiché la sfera unitaria è compatta, da ogni successione di versori $\boldsymbol{\xi}_{\delta_n}$ si può trovare una sottosuccessione convergente; sia $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t_0)$ il suo limite. Si ha

$$B_\delta(t_0) = \mathbf{1} + A\delta + O(\delta^2), \quad (34.20)$$

dove $A = \dot{B}_{t_0}B_{t_0}^{-1}$ (che è la derivata di $B_\delta(t_0)$ rispetto a δ calcolata in $\delta = 0$) è una matrice antisimmetrica, essendo $B_\delta(t_0)$ ortogonale (cfr. il lemma 34.8). Per definizione di $\boldsymbol{\xi}_\delta$, si ha $B_\delta(t_0) \boldsymbol{\xi}_\delta = \boldsymbol{\xi}_\delta$. Quindi, applicando la (34.20) al versore $\boldsymbol{\xi}_\delta$, dividendo l'equazione risultante per δ e passando al limite $\delta \rightarrow 0$ (eventualmente per sottosuccessioni), si trova che $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$.

Se $A \neq 0$ (nel caso $A = 0$ le affermazioni del teorema sono banalmente vere), $\boldsymbol{\xi}$ è dunque un autovettore di A con autovalore $\lambda = 0$. A meno dell'orientazione, $\boldsymbol{\xi}$ non dipende dalla sottosuccessione scelta; l'ambiguità dell'orientazione è risolta notando che $\boldsymbol{\xi}_\delta$ è continua e quindi, per δ vicino a 0, può assumere valori solo in un intorno di uno dei due punti antipodali della sfera.

In conclusione ogni sottosuccessione convergente di $\boldsymbol{\xi}_{\delta_n}$ converge allo stesso limite $\boldsymbol{\xi}$, quindi esiste il limite $\lim_{\delta \rightarrow 0} \boldsymbol{\xi}_\delta = \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t_0)$ (cfr. il lemma 19.3 e il teorema 19.4). Per qualsiasi vettore \mathbf{q} , si ha $A\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega}(t_0) \wedge \mathbf{q}$, per un opportuno vettore $\boldsymbol{\omega}(t_0)$, e, poiché $0 = A\boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\omega}(t_0) \wedge \boldsymbol{\xi}(t_0)$, segue che il vettore $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ così definito è parallelo a $\boldsymbol{\xi}(t_0)$.

Resta da verificare, per concludere la dimostrazione del teorema, che $|\boldsymbol{\omega}(t_0)| = \alpha(t_0)$, con $\alpha(t_0)$ dato dalla prima delle (34.19). Sia φ_δ l'angolo tra $\boldsymbol{\xi}_\delta$ e $\boldsymbol{\xi}(t_0)$. Si ha

$$B_\delta(t_0) = \tilde{B}_\delta \tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta) \tilde{B}_\delta^T, \quad (34.21)$$

dove $\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta)$ è la rotazione di θ_δ intorno all'asse $\boldsymbol{\xi}(t_0)$ e \tilde{B}_δ è la rotazione di φ_δ che sovrappone $\boldsymbol{\xi}(t_0)$ a $\boldsymbol{\xi}_\delta$ (e ricordando che $B_\delta(t_0)$ è la rotazione di un angolo θ_δ intorno all'asse $\boldsymbol{\xi}_\delta$, in accordo con la (34.18)). Per $\delta \rightarrow 0$, si ha $\varphi_\delta \rightarrow 0$, e quindi $\tilde{B}_\delta = \mathbf{1} + O(\delta)$; inoltre $\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_0) = \mathbf{1}$, così che

$$\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta) = \mathbf{1} + \delta \left. \frac{\partial}{\partial \delta} \tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_\delta) \right|_{\delta=0} + O(\delta^2),$$

e quindi, tenuto conto che $\tilde{B}_\delta \tilde{B}_\delta^T = \mathbf{1}$ e, di nuovo, che $\tilde{B}(\boldsymbol{\xi}(t_0), \theta_0) = \mathbf{1}$, la (34.21) si scrive

$$B_\delta(t_0) = \mathbf{1} + \delta \alpha(t_0) A_{\boldsymbol{\xi}(t_0)} + O(\delta^2), \quad (34.22)$$

dove $A_{\boldsymbol{\xi}(t_0)}$ è usato conformemente alle notazioni dell'osservazione 34.10 e $\alpha(t_0) = [\partial \theta_\delta / \partial \delta](0)$ è definito come nella prima delle (34.19). Dal confronto della (34.22) con la (34.20), tenendo conto che l'azione di $A_{\boldsymbol{\xi}(t_0)}$ su un qualsiasi vettore \mathbf{q} si può scrivere $A_{\boldsymbol{\xi}(t_0)} \mathbf{q} = [\boldsymbol{\xi}(t_0), \mathbf{q}]$, segue allora che $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \alpha(t_0) \boldsymbol{\xi}(t_0)$, così che la dimostrazione del teorema è completa. ■

Osservazione 34.22 Il teorema 34.21 fornisce un'interpretazione geometrica del vettore velocità angolare come velocità angolare istantanea di rotazione e della sua direzione come *asse istantaneo di rotazione*, così giustificando la definizione 34.16. Infatti in ogni istante t_0 il moto è assimilabile a una rotazione intorno all'asse $\boldsymbol{\xi}(t_0)$ con velocità angolare di intensità $\alpha(t_0)$, che si ottiene considerando rotazioni infinitesime, a partire dall'istante t_0 fino all'istante $t_0 + \delta$, e passando al limite per $\delta \rightarrow 0$. Il ragionamento è del tutto analogo a quello che si segue quando si dimostra che la velocità istantanea si ottiene come limite del rapporto incrementale relativo a spostamenti infinitesimi: se $x(t_0)$ è la posizione che un punto ha all'istante t_0 e si considerano spostamenti infinitesimi da $x(t_0)$ a $x(t_0 + \delta)$ (posizione all'istante $t_0 + \delta$), si può definire la velocità (uniforme) $\delta^{-1}[x(t_0 + \delta) - x(t_0)]$ e farne il limite per $\delta \rightarrow 0$, ottenendo così una quantità $v(t_0) = \dot{x}(t_0)$, che chiamiamo *velocità istantanea*.

Lemma 34.23 *Se il sistema mobile K ruota rispetto a un suo punto \mathbf{O} , allora la velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$ di un punto mobile rispetto al sistema fisso κ (velocità assoluta) è data da*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_T, \quad (34.23)$$

dove $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$ è la velocità del punto mobile rispetto al sistema K (velocità relativa) e $\mathbf{v}_T = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}]$ è la velocità rotatoria di trascinamento.

Dimostrazione. Se il punto mobile si sposta anche nel sistema K ($\dot{\mathbf{Q}} \neq \mathbf{0}$), la (34.5) dà, tenendo conto anche della (34.13), $\dot{\mathbf{q}} = \dot{B}\mathbf{Q} + B\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{q} + \mathbf{v}'$, che comporta la (34.23). ■

Teorema 34.24 *La velocità di un punto mobile calcolata rispetto a un sistema fisso κ (velocità assoluta $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$) e quella calcolata rispetto a un sistema mobile K (velocità relativa $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$) sono legate dalla relazione*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0, \quad (34.24)$$

dove $\mathbf{v}_T = \dot{B}\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$ e $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}$ è la velocità del sistema mobile di coordinate rispetto a quello fisso. La velocità $\mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0$ prende il nome di velocità di trascinamento, di cui \mathbf{v}_T costituisce la componente rotatoria e \mathbf{v}_0 la componente traslatoria.

Dimostrazione. Segue dai lemmi 34.7 e 34.23, considerando un sistema mobile ausiliario K_1 che si muova di moto traslatorio rispetto a κ e rispetto al quale il sistema K si muova di moto rotatorio intorno a un punto $O \in K_1$. ■

Lemma 34.25 *Componendo due moti di rotazione rispetto allo stesso punto fisso O , si ottiene un moto la cui velocità angolare è in ogni istante la somma delle velocità angolari dei moti componenti.*

Dimostrazione. Sia κ un sistema fisso, K_1 un sistema mobile rispetto a κ e K_2 un sistema mobile rispetto a K_1 . Quindi se $\mathbf{Q}_2 \in K_2$, si ha $\mathbf{Q}_1 = B_2\mathbf{Q}_2 \in K_1$ e $\mathbf{q} = B_1\mathbf{Q}_1 \in \kappa$, così che $\mathbf{q} = B_1B_2\mathbf{Q}_2$, con $B_1B_2: K_2 \rightarrow \kappa$. La velocità angolare del moto risultante è pertanto

$$A = \left[\frac{d}{dt}(B_1B_2) \right] (B_1B_2)^{-1} = \dot{B}_1B_1^{-1} + B_1\dot{B}_2B_2^{-1}B_1^{-1} = \dot{B}_1B_1^{-1} + B_1A_2B_1^{-1} = A_1 + B_1A_2^{\text{rel}}B_1^{-1},$$

dove $A_1 = \dot{B}_1B_1^{-1}$ è la velocità angolare del sistema K_1 rispetto a κ e $A_2^{\text{rel}} = \dot{B}_2B_2^{-1}$ è la velocità angolare del punto mobile solidale con il sistema K_2 rispetto al sistema K_1 , così che $A_2 = B_1A_2^{\text{rel}}B_1^{-1}$ è la matrice che rappresenta A_2 nel sistema κ : quindi $A = A_1 + A_2$. Se $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$ sono i vettori velocità angolari corrispondenti ai tre operatori lineari A, A_1, A_2 , si ha quindi $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. ■

Esempio 34.26 La Terra, mentre ruota intorno al Sole, ruota anche intorno al proprio asse (cfr. l'osservazione 32.10) in senso antiorario; si veda anche l'esempio 49.5 per ulteriori dettagli. La velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del moto di rotazione della Terra è diretta dal Polo Sud al Polo Nord e ha modulo $|\boldsymbol{\omega}| \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ approssimativamente costante. Se si vuole descrivere un moto sulla superficie della Terra si può trascurare il suo moto di rivoluzione intorno al Sole; possono invece essere rilevanti gli effetti del moto di rotazione, come vedremo nel prossimo paragrafo.

§35 Forze di inerzia

Ci proponiamo ora di studiare, come accennato all'inizio del §34, in che modo la legge del moto di un sistema meccanico si modifichi in un sistema di riferimento mobile rispetto alla forma che essa assume in un sistema di riferimento fisso. Il risultato è che potremo ancora scrivere una legge della stessa forma della legge di Newton, purché alla forza effettivamente agente si aggiungano forze efficaci che prendono il nome di forze apparenti. La ragione del nome è la seguente: tali forze non corrispondono ad alcun agente reale, ma sono dovute semplicemente al fatto che un osservatore che effettui esperimenti in un sistema di riferimento mobile "risente" del

fatto di essere in moto e può descrivere l'effetto di tale moto introducendo forze supplementari (fittizie) che si sommano a quella reale.

Teorema 35.1 *Supponiamo che in un sistema di coordinate fisso κ il moto avvenga secondo l'equazione di Newton $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$. In un sistema di riferimento K che si muova di moto traslatorio rispetto a κ , il moto avviene come se in ogni punto mobile di massa m agisse una forza supplementare (forza di inerzia o forza apparente)*

$$\mathbf{F}_I = -m\ddot{\mathbf{r}},$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}$ è l'accelerazione del sistema K .

Dimostrazione. Per la (34.3), con $B_t = \mathbf{1}$, risulta $\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$ e quindi $\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{r}}$. L'equazione del moto diventa allora $m\ddot{\mathbf{Q}} = m\ddot{\mathbf{q}} - m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f} - m\ddot{\mathbf{r}}$. ■

Lemma 35.2 *Dato un qualsiasi vettore $\mathbf{X} \in K$, tale che $\mathbf{x} = B\mathbf{X} \in \kappa$, dove B è una rotazione, possiamo scrivere $\dot{B}\mathbf{X} = B(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X})$, se $\boldsymbol{\omega} = B\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare che corrisponde alla rotazione B .*

Dimostrazione. Per il teorema 34.15, si ha $\dot{B}\mathbf{X} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}$. Poiché B conserva la metrica e l'orientazione e lo stesso fa il prodotto vettoriale, si ha $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x} = B\boldsymbol{\Omega} \wedge B\mathbf{X} = B(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{X})$. ■

Teorema 35.3 *Supponiamo che in un sistema di coordinate fisso κ il moto avvenga secondo l'equazione di Newton $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$. In un sistema di riferimento rotante K il moto avviene come se in ogni punto mobile $\mathbf{Q} = B^{-1}\mathbf{q}$, $\mathbf{q} \in \kappa$, di massa m , agissero tre forze supplementari (forze di inerzia o forze apparenti), così che*

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3), \quad (35.1)$$

dove $B\mathbf{F} = \mathbf{f}$, e

1. $\mathbf{F}_1 = -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q}$ è la forza inerziale di rotazione,
2. $\mathbf{F}_2 = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}$ è la forza di Coriolis (o forza complementare),
3. $\mathbf{F}_3 = -m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ è la forza centrifuga.

Dimostrazione. Poiché $\mathbf{q} = B\mathbf{Q}$, derivando e utilizzando il lemma 35.2, con $\mathbf{X} = \mathbf{Q}$, otteniamo

$$\dot{\mathbf{q}} = B(\dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}),$$

e, derivando una seconda volta, quindi riutilizzando il lemma 35.2 con $\mathbf{X} = \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}$, abbiamo

$$\ddot{\mathbf{q}} = B\left(\ddot{\mathbf{Q}} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q}\right), \quad (35.2)$$

da cui segue la (35.1). ■

Osservazione 35.4 La forza inerziale di rotazione \mathbf{F}_1 in (35.1) si osserva solo nel caso di una rotazione non uniforme.

Osservazione 35.5 La forza di Coriolis \mathbf{F}_2 in (35.1) dipende dalla velocità $\dot{\mathbf{Q}}$ ed è diretta come illustrato nella figura 8.8.

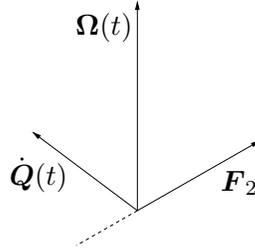


Figura 8.8: Forza di Coriolis.

Osservazione 35.6 La forza centrifuga \mathbf{F}_3 in (35.1) è rivolta in direzione perpendicolare all'asse istantaneo di rotazione, nel verso di allontanamento. Il suo modulo è uguale a $|\boldsymbol{\Omega}|^2 r$, se r è la distanza dall'asse. A differenza di \mathbf{F}_2 , la forza centrifuga non dipende dalla velocità del moto relativo e agisce anche su corpi che sono in quiete nel sistema K (cfr. la figura 8.9).

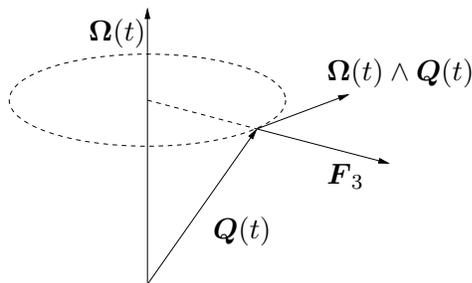


Figura 8.9: Forza centrifuga.

Nel caso generale, in cui il moto del sistema di riferimento mobile K rispetto a quello fisso κ sia un moto rigido qualsiasi, si ha il seguente risultato.

Teorema 35.7 (TEOREMA DI CORIOLIS) *Supponiamo che in un sistema di coordinate fisso κ il moto avvenga secondo l'equazione di Newton $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$. In un sistema di coordinate mobile K il moto avviene come se in ogni punto mobile $\mathbf{Q} = D^{-1}\mathbf{q} = B^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{r})$, $\mathbf{q} \in \kappa$, di massa m , agissero quattro forze supplementari (forze di inerzia o forze apparenti), così che*

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} + (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4),$$

dove $B\mathbf{F} = \mathbf{f}$ e

1. $\mathbf{F}_1 = -m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{Q}$ è la forza inerziale di rotazione,
2. $\mathbf{F}_2 = -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}$ è la forza di Coriolis (o forza complementare),
3. $\mathbf{F}_3 = -m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ è la forza centrifuga,
4. $\mathbf{F}_4 = -mB^{-1}\ddot{\mathbf{r}}$ è la forza inerziale di traslazione.

Dimostrazione. Si può ragionare come per la dimostrazione del teorema 35.3, tenendo conto che $\dot{\mathbf{q}}$ è dato dalla (34.24) nel caso generale di un moto qualsiasi. ■

Nell'emisfero settentrionale la forza di Coriolis spinge verso destra un corpo che si muova sulla Terra, tangenzialmente alla sua superficie, e verso est un corpo che cada sulla Terra, ortogonalmente alla sua superficie (cfr. la figura 8.10).

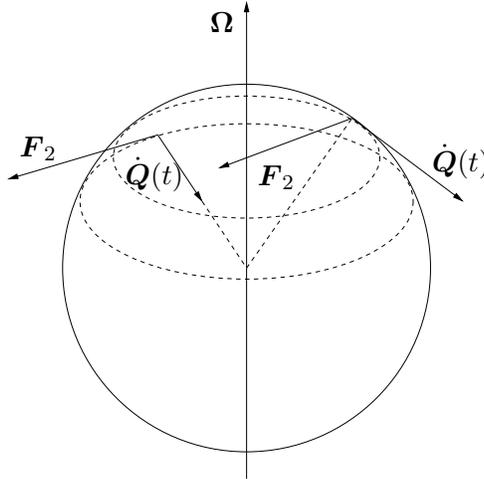


Figura 8.10: Forza di Coriolis sulla superficie della terra. Sono considerati due tipi di moto nell'emisfero settentrionale: un moto tangenziale alla superficie e diretto verso ovest (a destra) e un moto ortogonale alla superficie e diretto verso il basso (a sinistra). Nel primo caso la forza di Coriolis spinge verso l'asse di rotazione della Terra ed è perpendicolare a tale asse, nel secondo spinge verso est.

Esempio 35.8 Assumendo che la Terra ruoti uniformemente intorno al proprio asse (cfr. l'esempio 34.26), si ha $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$. La forza centrifuga è nulla ai poli e assume valore massimo all'equatore dove vale una frazione p del peso, con p dato da

$$p := \frac{|\boldsymbol{\Omega}|^2 \rho}{g} \approx \frac{(7.3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (6.4 \cdot 10^6)}{9.8} \approx \frac{3}{1000}, \quad (35.3)$$

se ρ è il raggio terrestre e g è l'accelerazione di gravità, i.e. $g = |\mathbf{g}|$, dove $-m\mathbf{g}$ è la forza peso, rivolta verso il centro della terra (cfr. l'osservazione 32.11). Quindi in esperimenti di

laboratorio gli effetti della rotazione terrestre si manifestano essenzialmente attraverso la sola forza di Coriolis e, per scopi pratici, si può spesso approssimare la (35.1) con

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = -m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}. \quad (35.4)$$

Per tener conto eventualmente della forza centrifuga, si può ridefinire \mathbf{g} a un valore che dipende dalla latitudine λ (cfr. pag. 361): $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{g}(1 - p \cos \lambda)$, con p dato dalla (35.3). In realtà la forza centrifuga non altera solo l'intensità della forza gravitazionale, ma anche la sua direzione. Infatti il vettore

$$-\mathbf{g}_{\text{eff}} := -\mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}), \quad |\mathbf{Q}| = \rho, \quad (35.5)$$

è la somma di un vettore diretto verso il centro della Terra e di un vettore ortogonale all'asse di rotazione e diretto verso l'esterno. Questo mostra che un corpo in caduta libera sulla superficie della Terra non è attratto esattamente verso il centro della Terra, ma, piuttosto, verso un punto spostato un po' sotto se P si trova nell'emisfero settentrionale e un po' sopra se P si trova nell'emisfero meridionale.

Esempio 35.9 (PENDOLO DI FOUCAULT) Si studino le piccole oscillazioni di un pendolo semplice tenendo conto della forza di Coriolis.

Discussione dell'esempio. Vogliamo descrivere il moto del pendolo in un sistema di riferimento K che ruoti solidalmente con la Terra. Consideriamo prima il caso in cui il pendolo sia fermo in tale sistema di riferimento.

Scegliamo innanzitutto il sistema fisso in modo tale che la sua origine coincida con il centro della Terra e l'asse \mathbf{e}_z abbia la direzione del vettore $\boldsymbol{\Omega}$ (velocità angolare della Terra). Fissiamo l'origine O' del sistema K , richiedendo che O' sia un punto sulla superficie della Terra: assumendo per semplicità che la Terra sia sferica, O' è individuato quindi dal vettore $\mathbf{r} = (\rho \cos \lambda \cos \Omega t, \rho \cos \lambda \sin \Omega t, \rho \sin \lambda)$, dove $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$, ρ è il raggio terrestre e λ è la latitudine. Per fissare gli assi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ procediamo come segue. La forza gravitazionale è diretta verso il centro della terra e ha quindi la forma $\mathbf{f} = -m\mathbf{g}\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, dove g è l'accelerazione di gravità (cfr. l'osservazione 32.11). Se poniamo un punto P in O' ($\mathbf{Q} = \mathbf{0}$) con velocità nulla ($\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$) la forza che agisce del punto P nel sistema K è data allora da

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_4 = B^{-1}(\mathbf{f} - m\ddot{\mathbf{r}}), \quad \ddot{\mathbf{r}} = (-\rho\Omega^2 \cos \lambda \cos \Omega t, -\rho\Omega^2 \cos \lambda \sin \Omega t, 0), \quad (35.6)$$

come si ricava immediatamente dal teorema 35.7; la matrice di rotazione B è ancora indeterminata, poiché non abbiamo ancora fissato la terna $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Definiamo $\mathbf{g}_{\text{eff}} := -\mathbf{g}\mathbf{r}/|\mathbf{r}| - \ddot{\mathbf{r}}$. Scegliamo il sistema di riferimento $K = O'\xi\eta\zeta$ tale che l'asse \mathbf{e}_3 abbia la direzione del vettore $-\mathbf{g}_{\text{eff}}$ e verso opposto, mentre l'asse \mathbf{e}_1 sia ortogonale a \mathbf{e}_3 e diretto nel piano che contiene i vettori \mathbf{g}_{eff} e $\boldsymbol{\Omega}$. Se richiediamo che $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3$, questo fissa univocamente anche l'asse \mathbf{e}_2 . Nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ risulta $\mathbf{g}_{\text{eff}} = (0, 0, g_{\text{eff}})$, dove $g_{\text{eff}} = |\mathbf{g}_{\text{eff}}|$ prende il nome di *accelerazione di gravità efficace*. Gli assi \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 non sono esattamente tangenti alla superficie della Terra

a causa della presenza del vettore $\ddot{\mathbf{r}}$ nella definizione di \mathbf{g}_{eff} ; inoltre nel sistema di riferimento K si ha $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \cos \lambda_{\text{eff}}, 0, \Omega \sin \lambda_{\text{eff}})$, dove λ_{eff} è la *latitudine efficace* e rappresenta l'angolo che il vettore \mathbf{e}_3 forma con il piano equatoriale. Si noti che entrambi i valori g_{eff} e λ_{eff} sono molto vicini a g e λ , rispettivamente, essendo le differenze di ordine $\rho\Omega^2$ (cfr. l'esempio 35.8). Ovviamente se P è un punto libero, sotto l'azione della forza (35.6) inizia a muoversi. Se invece abbiamo un pendolo, allora dobbiamo imporre la condizione che la distanza tra il punto P e il punto di sospensione del pendolo S sia uguale alla lunghezza ℓ del pendolo. Nel sistema di riferimento scelto, $(0, 0, \ell)$ sono le coordinate del punto S e, se poniamo $P = (\xi, \eta, \zeta)$, abbiamo

$$G(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \ell)^2 - \ell^2 = 0, \quad (35.7)$$

che costituisce quello che è noto come un *vincolo*. Vedremo nel capitolo 9 (in particolare nel §41) quando discuteremo i vincoli, che per tener conto della relazione (35.7) dobbiamo modificare le equazioni del moto scrivendo

$$m\ddot{\mathbf{Q}} = \lambda' \frac{\partial G}{\partial \mathbf{Q}} - m\mathbf{g}_{\text{eff}} - m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}) - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}}, \quad (35.8)$$

dove si è tenuto conto che $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ (e quindi la forza inerziale di rotazione è assente). Qui λ' è un moltiplicatore di Lagrange (cfr. la definizione 41.6) e non deve essere confuso con la latitudine λ . Scritta per componenti la (35.8) dà

$$m\ddot{\xi} = 2\lambda'\xi + 2m\Omega\dot{\eta}\sin\lambda + m\Omega^2(\zeta\sin\lambda\cos\lambda + \xi\sin^2\lambda), \quad (35.9a)$$

$$m\ddot{\eta} = 2\lambda'\eta - 2m(\Omega\dot{\zeta}\cos\lambda + \Omega\dot{\xi}\sin\lambda) + m\Omega^2\eta, \quad (35.9b)$$

$$m\ddot{\zeta} = 2\lambda'(\zeta - \ell) - mg + 2m\Omega\dot{\eta}\cos\lambda + m\Omega^2(\xi\sin\lambda\cos\lambda + \zeta\cos^2\lambda), \quad (35.9c)$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo lasciato cadere il pedice in g_{eff} e λ_{eff} . Le equazioni (35.9) e (35.7) costituiscono le equazioni del moto. Tuttavia sono troppo complicate da risolvere. Si può effettuare una prima approssimazione fissando λ' al valore che rende le equazioni soddisfatte in corrispondenza della posizione di equilibrio. In altre parole, per fissare λ' , imponiamo che in assenza di oscillazioni il punto P rimanga fermo nell'origine. Se in (35.9) richiediamo che per $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$ si abbia $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$, otteniamo $-2\lambda'\ell - mg = 0$, che fissa $2\lambda' = -m\omega^2$, dove $\omega := \sqrt{g/\ell}$. In generale ci si aspetta che λ' dipenda dalla posizione e dalla velocità del punto P , così che, mentre il punto P si muove, λ' cambi consistentemente in modo da rendere soddisfatta la (35.7). Noi stiamo ignorando tali cambiamenti. Nell'approssimazione fatta, le (35.9) diventano allora

$$\ddot{\xi} = -\omega^2\xi + 2\Omega\dot{\eta}\sin\lambda + \Omega^2(\zeta\sin\lambda\cos\lambda + \xi\sin^2\lambda), \quad (35.10a)$$

$$\ddot{\eta} = -\omega^2\eta - 2(\Omega\dot{\zeta}\cos\lambda + \Omega\dot{\xi}\sin\lambda) + \Omega^2\eta, \quad (35.10b)$$

$$\ddot{\zeta} = -\omega^2\zeta + 2\Omega\dot{\eta}\cos\lambda + \Omega^2(\xi\sin\lambda\cos\lambda + \zeta\cos^2\lambda), \quad (35.10c)$$

che costituiscono un sistema di equazioni lineari (in \mathbb{R}^6 se viste come equazioni del primo ordine). In linea di principio le (35.10) si possono risolvere esplicitamente (cfr. il capitolo 2). Tuttavia, data la dimensionalità alta, questo richiede un po' di lavoro (cfr. gli esercizi 10÷14). Per semplicità, e anche per meglio visualizzare il comportamento del sistema, usualmente si fanno ulteriori approssimazioni (cfr. anche l'esercizio 15).

- Si studia il sistema nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, i.e. si linearizza la relazione (35.7), così da ottenere $2\ell\zeta = 0$, ovvero $\zeta = 0$. Questo suggerisce di trascurare la terza equazione (35.10c) e di considerare solo le prime due con $\zeta = 0$ (torneremo sulla teoria delle piccole oscillazioni nel capitolo 14, nell'ambito del formalismo lagrangiano).
- Si trascurano i termini $O(\Omega^2)$, i.e. il contributo dovuto all'energia centrifuga.

Con tali approssimazioni le (35.10) danno

$$\ddot{\xi} = -\omega^2\xi + 2\Omega_3\dot{\eta}, \quad (35.11a)$$

$$\ddot{\eta} = -\omega^2\eta - 2\Omega_3\dot{\xi}, \quad (35.11b)$$

dove abbiamo posto $\Omega_3 := \Omega \sin \lambda$. Questo vuol dire che, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, la forza di Coriolis è diretta nel piano (ξ, η) ed è data da

$$\mathbf{F}_2 = 2m\Omega_3\dot{\eta} \mathbf{e}_1 - 2m\Omega_3\dot{\xi} \mathbf{e}_2.$$

Per risolvere le equazioni (35.11) è conveniente riscriverle come un'unica equazione complessa. A tal fine introduciamo la variabile complessa $u = \xi + i\eta$. Se moltiplichiamo la (35.11b) per i e la sommiamo alla (35.11a) otteniamo

$$\ddot{u} + \omega^2 u + 2i\Omega_3\dot{u} = 0. \quad (35.12)$$

La soluzione di (35.12) si calcola immediatamente (cfr. il §9). Se approssimiamo

$$\sqrt{\Omega_3^2 + \omega^2} \approx \omega + O(\Omega_3^2),$$

e trascuriamo al solito i termini quadratici, troviamo

$$u(t) = e^{-i\Omega_3 t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}),$$

dove c_1 e c_2 sono costanti che dipendono dai dati iniziali.

Per $\Omega_3 = 0$ (all'equatore) si ottengono le usuali oscillazioni armoniche. Altrimenti, l'effetto della forza di Coriolis si manifesta attraverso una rotazione di tutto il sistema in senso orario con una velocità angolare Ω_3 . In particolare, se le condizioni iniziali corrispondono a quello che in assenza di forza di Coriolis sarebbe un moto piano (il pendolo semplice del §24), allora il piano di oscillazione del pendolo ruoterà in senso orario con velocità angolare Ω_3 nel sistema di riferimento K (cfr. la figura 8.11).

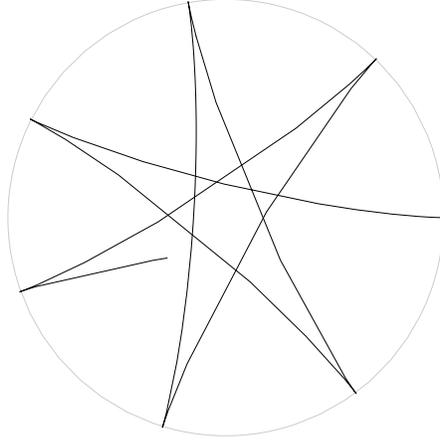


Figura 8.11: Visione dall'alto del moto del pendolo di Foucault.

Per esempio, se $\xi(0) = \eta(0) = 0$, $\dot{\eta}(0) = 0$ e $\dot{\xi}(0) = v_0 > 0$, in assenza di forza di Coriolis il moto avverrebbe nel piano $\eta = 0$. Tenendo conto invece della forza di Coriolis, i.e. risolvendo la (35.12) con $w(0) = 0$ e $\dot{w}(0) = v_0$, si ottiene

$$w(t) = e^{-i\Omega_3 t} \frac{v_0}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) = e^{-i\Omega_3 t} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

e quindi

$$\xi(t) = \cos \Omega_3 t \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \eta(t) = -\sin \Omega_3 t \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Possiamo introdurre la trasformazione di coordinate $(\xi', \eta') \mapsto (\xi, \eta)$, definita da

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_3 t & \sin \Omega_3 t \\ -\sin \Omega_3 t & \cos \Omega_3 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}. \quad (35.13)$$

Nel sistema di coordinate (ξ', η') il moto è dato da

$$\xi'(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \eta'(t) = 0, \quad (35.14)$$

quindi consiste in un'oscillazione lungo l'asse ξ' . In conclusione, nel sistema di coordinate (ξ, η) , il moto si ottiene applicando la matrice di rotazione (cfr. l'esercizio 9) in (35.13) alla (35.14). È dunque la composizione di un'oscillazione in un piano verticale (più precisamente lungo una direzione) con una rotazione del piano di oscillazione in senso orario intorno all'asse verticale. Ai poli il piano di oscillazione compie in K una rotazione completa ogni 24 ore (ed è fisso rispetto a un sistema fisso κ), mentre alla latitudine di Roma ($\lambda \approx 42^\circ$) occorrono circa 36 ore perchè il piano di oscillazioni ritorni in K alla posizione iniziale.

Esempio 35.10 Un sasso è lasciato cadere in un pozzo profondo $\ell = 250$ m, alla latitudine $\lambda = 60^\circ$. Di quanto si allontana dalla verticale?

Discussione dell'esempio. Possiamo ragionare come nell'esempio 35.9, identificando il sasso con il punto P di massa m . Poiché in questo caso non c'è alcun vincolo sulle coordinate (ξ, η, ζ) di P , le equazioni del moto nel sistema K sono date dalle (35.8) con $G = 0$, i.e., scritte per componenti,

$$\ddot{\xi} = 2\Omega \dot{\eta} \cos \lambda + \Omega^2 (\zeta \sin \lambda \cos \lambda + \xi \sin^2 \lambda), \quad (35.15a)$$

$$\ddot{\eta} = -2(\Omega \dot{\zeta} \cos \lambda + \Omega \dot{\xi} \sin \lambda) + \Omega^2 \eta, \quad (35.15b)$$

$$\ddot{\zeta} = -g + 2\Omega \dot{\eta} \cos \lambda + \Omega^2 (\xi \sin \lambda \cos \lambda + \zeta \cos^2 \lambda), \quad (35.15c)$$

dove, al solito, abbiamo scritto g e λ invece di g_{eff} e λ_{eff} per semplicità notazionale. Le equazioni (35.15) si possono risolvere per approssimazioni successive, scrivendo la soluzione nella forma $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1\Omega + O(\Omega^2)$, dove $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}| \ll 1$, ed eguagliando membro a membro i coefficienti delle potenze di Ω . All'ordine zero si ha $\ddot{\mathbf{Q}}_0 = -\mathbf{g}$, che, risolta tenendo conto delle condizioni iniziali ($\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$), dà

$$\mathbf{Q}_0(t) = \mathbf{Q}_0(0) - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \quad (35.16)$$

L'equazione per \mathbf{Q}_1 diventa

$$\ddot{\mathbf{Q}}_1\Omega = -2\mathbf{g} \wedge \boldsymbol{\Omega}t, \quad (35.17)$$

che, risolta, dà

$$\mathbf{Q}_1(t)\Omega = -\frac{t^3}{3}\mathbf{g} \wedge \boldsymbol{\Omega}. \quad (35.18)$$

Se trascuriamo i termini $O(\Omega^2)$ e approssimiamo consistentemente $\mathbf{g}_{\text{eff}} \approx \mathbf{g}$, poiché la differenza tra i due vettori è ordine Ω^2 (cfr. l'esempio 35.8), troviamo che, dopo una caduta di 250 m, la deviazione del sasso dalla verticale verso est (cfr. l'osservazione 35.5), risulta approssimativamente di

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2\ell}{g} \right)^{3/2} g \Omega \cos \lambda \approx 4 \text{ cm}.$$

Si noti che perché il risultato trovato sia significativo, occorre una stima dell'errore che si commette nel trascurare le correzioni $O(\Omega^2)$ (cfr. l'esercizio 17).

Esempio 35.11 Un fiume scorre con velocità di 3 km/h. Per quale raggio di curvatura di un'ansa del fiume la forza di Coriolis è più forte della forza centrifuga, dovuta alla svolta compiuta dal fiume?

Discussione dell'esempio. Se siamo interessati solo agli ordini di grandezza delle forze, ragioniamo come segue. La forza di Coriolis ha modulo $|\mathbf{F}_2| \approx \Omega v$, se v è il modulo della velocità di scorrimento del fiume, mentre la forza centrifuga ha modulo $|\mathbf{F}_3| \approx v^2/r$, se r è il raggio di

curvatura dell'ansa (cfr. la figura 8.12). Possiamo definire quindi un valore di soglia r_0 tale che per $r \approx r_0$ si ha $|\mathbf{F}_2| \approx |\mathbf{F}_3|$. Con i dati del problema si ha $r_0 \approx 10$ km e la forza di Coriolis tende a prevalere per $r > r_0$. In conclusione il raggio di curvatura dell'ansa non deve essere più piccolo di una decina di km per fiumi che si trovano a latitudini medie (così che possiamo prendere $\cos \lambda$ di ordine 1).

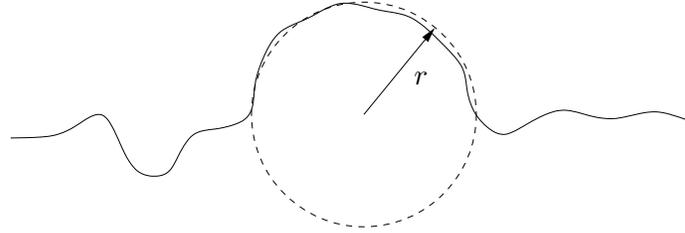


Figura 8.12: Discussione dell'esempio 35.11.

Osservazione 35.12 La discussione dell'esempio 35.11 spiega perché i grossi fiumi dell'emisfero settentrionale erodono principalmente la riva destra, mentre i fiumi con anse di piccola curvatura erodono alternativamente sia la riva destra sia quella sinistra (cioè le rive esterne rispetto all'ansa).

Esempio 35.13 A volte si attribuisce alla forza di Coriolis anche il moto rotatorio dell'acqua quando si svuota un lavandino. L'argomento è che, nel momento in cui si apre lo scarico, il moto dell'acqua è essenzialmente un moto laminare parallelo al piano del lavandino, dal bordo verso il sifone (almeno fintanto che le sue molecole non lo abbiano raggiunto, dopo di che defluiscono rapidamente), così che il flusso d'acqua, sotto l'effetto della forza di Coriolis, descrive un moto a spirale con una componente rotatoria in senso antiorario nell'emisfero settentrionale e orario in quello meridionale. In realtà l'effetto della forza di Coriolis, in tale operazione, è minimo ed è usualmente dominato da altri contributi, quali la geometria del lavandino o la velocità rotatoria iniziale dell'acqua (che, per la conservazione del momento angolare, aumenta quando diminuisce il raggio di rotazione, così determinando un moto vorticoso)

Definizione 35.14 (SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE) *Il primo principio della dinamica (o principio di Galileo o principio di inerzia) afferma che un punto materiale non sottoposto a forze esterne persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Un sistema di riferimento si dice inerziale se in esso vale il primo principio della dinamica.*

In un sistema di riferimento inerziale la legge del moto è dunque $m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}$, dove \mathbf{f} è la forza esterna. In particolare, in assenza di forze si ha $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Si vede dunque dal teorema 35.7 che un sistema di riferimento mobile è inerziale se e solo se si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al sistema fisso (i.e. se il moto rigido D_t è un moto puramente traslatorio con $\dot{\mathbf{r}}(t)$ costante).

Nota bibliografica Abbiamo seguito prevalentemente [Arnold-1, Cap. VI], tranne che per alcuni argomenti per i quali rimandiamo a [Dell'Antonio, Cap.IV]. Per le proprietà (elementari) di algebra che sono state brevemente richiamate si può vedere per esempio [Lang] o [Kuroš].

Gli esempi 35.10 e 35.11 sono presi da [Arnold-1], mentre la discussione dell'esempio 35.9 segue [Dell'Antonio]. Per gli esercizi 10÷14 abbiamo tenuto presente [Barenboim & Oteo]. Gli esercizi dal 19 in poi sono ispirati a [Bressan & Grioli, Cap. IV].

Esercizi

Esercizio 1 Si verifichi che lo spazio della matrici $GL(n, \mathbb{R})$ definito a pag. 382 forma un gruppo (non commutativo) rispetto all'operazione di moltiplicazione tra matrici.

Esercizio 2 Si dimostri che se A è una matrice ortogonale si ha $|\det A| = 1$. [*Soluzione.* Poiché $A^{-1} = A^T$, si ha $1 = \det \mathbf{1} = \det AA^{-1} = \det AA^T = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$.]

Esercizio 3 Si definisce *riflessione* rispetto a un piano l'operazione che scambia ogni punto con la sua immagine speculare rispetto al piano (i.e. tale che ogni punto P è scambiato con il punto lungo la retta passante per P e ortogonale al piano, dalla parte opposta rispetto a P e alla stessa distanza dal piano). Si dimostri che le riflessioni conservano la metrica, ma non l'orientazione

Esercizio 4 Si dimostri che il cambiamento di sistema di riferimento ottenuto come composizione di rotazioni, traslazioni e riflessioni non è una trasformazione rigida. [*Suggerimento.* Le riflessioni non conservano l'orientazione (cfr. l'esercizio 3).]

Esercizio 5 Dati due vettori non paralleli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, si dimostri che il prodotto vettoriale $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$

1. è ortogonale al piano individuato dai due vettori e diretto in modo da vedere \mathbf{x} ruotare in senso antiorario per sovrapporsi a \mathbf{y} ;
2. ha modulo $|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \sin \alpha$, se $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo compreso tra i due vettori.

[*Soluzione.* Si sceglie una terna levogira $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ tale che \mathbf{e}_x sia diretto lungo il vettore \mathbf{x} ed \mathbf{e}_2 sia nel piano individuato dai due vettori, dalla parte in cui si trova \mathbf{y}_2 . In tale sistema di riferimento si ha $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_x$ e $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_y$, con $x_1, y_2 > 0$. Si ha allora $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (0, 0, x_1 y_2)$, per la (34.2b), dove $x_1 y_2 > 0$. Quindi $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ è diretto lungo l'asse \mathbf{e}_z , da cui segue la proprietà 1. Inoltre si ha, per costruzione, $x_1 = |\mathbf{x}|$, $y_1 = |\mathbf{y}| \cos \alpha$ e $y_2 = |\mathbf{y}| \sin \alpha$, quindi $|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}| = x_1 y_2 = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \sin \alpha$, che implica la proprietà 2.]

Esercizio 6 Sia $D : K \rightarrow \kappa$ una trasformazione lineare, i.e. tale che $\mathbf{Q} = A\mathbf{q} + \mathbf{r}$. Si dimostri che se D conserva l'orientazione allora $\det A > 0$. [*Soluzione.* Sia P la matrice del cambiamento di base della trasformazione rigida D . Poiché D conserva l'orientazione si ha $\det P > 0$. La matrice di cambiamento di coordinate $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q}$ è data da $(P^T)^{-1}$ (cfr. il lemma 1.41). Quindi $A = (P^T)^{-1}$ che implica $\det A = \det P$.]

Esercizio 7 Si dimostri che l'insieme delle matrici antisimmetriche $n \times n$ a elementi reali forma un sottospazio lineare di $M(n, \mathbb{R})$ di dimensione $n(n-1)/2$. Se ne deduca che l'insieme L_{as} delle matrici antisimmetriche in \mathbb{R}^3 , introdotto a pag. 387, forma un sottospazio lineare di dimensione 3.

Esercizio 8 Sia B una matrice 3×3 in forma canonica di Jordan con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \{\pm 1\}$. Si dimostri che se B non è diagonale, allora esiste un vettore $\xi \in \mathbb{R}^3$ tale che $|B^N \xi|$ è arbitrariamente grande per N opportuno. [*Suggerimento.* Se B non è diagonale, tutti gli elementi non diagonali sono nulli tranne B_{21} o B_{32} o entrambi, che sono uguali a 1 (cfr. la definizione 5.13). Si scelga $\xi = (1, \lambda_2, 1)$ e si definisca $\xi_N := B^N \xi$. Se $B_{21} = 1$ (così che $\lambda_2 = \lambda_1$) e $B_{32} = 0$, si ha $\xi_{2N} = (1, (2N+1)\lambda_1, 1) \forall N \in \mathbb{Z}_+$, come si verifica facilmente per induzione, tenendo conto che $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 = 1$ e notando che $\xi_0 = \xi$ e $\xi_{2N+2} = B^2 \xi_N$, così che $|B^{2N} \xi| > 2N + 1$. Se $B_{21} = B_{22} = 1$ (così che $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1$), basta notare che le prime due componenti di ξ_{2N} sono sempre 1 e $(N+1)\lambda_1$. Se infine $B_{21} = 0$ e $B_{32} = 1$ (così che $\lambda_3 = \lambda_2$), sempre per induzione si dimostra che $\xi_{2N} = (1, \lambda_2, 2N+1) \forall N \in \mathbb{Z}_+$, così che di nuovo $|B^{2N} \xi| > 2N + 1$.]

Esercizio 9 Siano $B^1(\theta)$, $B^2(\theta)$ e $B^3(\theta)$ le tre matrici ortogonali date da

$$B^1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad B^2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad B^3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $\theta \in \mathbb{T}$. Si verifichi che la rotazione $B: K \rightarrow \kappa$ di un angolo θ (in senso antiorario) intorno all'asse e_z è rappresentata dalla matrice $B^3(\theta)$, i.e. che se \mathbf{q} e \mathbf{Q} sono le coordinate nei sistemi di riferimento κ e K , rispettivamente, il vettore $\mathbf{q} = B^3(\theta)\mathbf{Q}$ è ruotato di un angolo θ intorno all'asse e_z rispetto al vettore \mathbf{Q} . Si verifichi allo stesso modo che le matrici che rappresentano rotazioni in senso antiorario intorno agli assi e_x ed e_y di un angolo θ sono date rispettivamente da $B^1(\theta)$ e $B^2(\theta)$. Le matrici B^1 , B^2 e B^3 prendono il nome di *matrici di rotazione intorno agli assi e_x , e_y ed e_z* , rispettivamente. [*Soluzione.* Siano (x, y, z) e (ξ, η, ζ) le coordinate di un punto P nei sistemi di riferimento κ e K , rispettivamente (cfr. la figura 8.13). Se θ , α e β sono gli angoli tra gli assi e_1 ed e_x , tra il raggio vettore \mathbf{v} che individua il punto P e l'asse e_x e tra \mathbf{v} e l'asse e_1 , rispettivamente, si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos \alpha, \\ y = \rho \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi = \rho \cos \beta, \\ \eta = \rho \sin \beta, \end{cases}$$

dove $\rho = |\mathbf{v}|$, e, poiché $\alpha = \beta + \theta$, utilizzando le identità trigonometriche (*formule di addizione*)

$$\sin(\beta + \theta) = \sin \beta \cos \theta + \cos \beta \sin \theta, \quad \cos(\beta + \theta) = \cos \beta \cos \theta - \sin \beta \sin \theta,$$

si trova

$$\begin{cases} x = \xi \cos \theta - \eta \sin \theta, \\ y = \xi \sin \theta + \eta \cos \theta, \end{cases}$$

così che possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

dove si è usato che $\zeta = z$. Quindi la matrice di rotazione in senso antiorario di un angolo θ intorno all'asse e_z ha la forma cercata. Analogamente si ragiona per le rotazioni intorno agli altri due assi.]

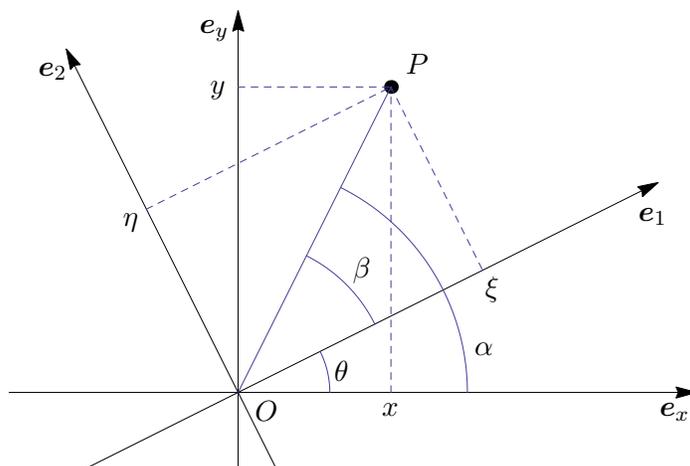


Figura 8.13: Rotazione di un angolo θ intorno all'asse e_z .

Esercizio 10 Data la matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \\ 0 & -\cos \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{T},$$

si verifichi che

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} -\sin^2 \lambda & 0 & -\sin \lambda \cos \lambda \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin \lambda \cos \lambda & 0 & -\cos^2 \lambda \end{pmatrix}$$

e si mostri che $\Lambda^{2k} = (-1)^{k+1} \Lambda^2$ e $\Lambda^{2k-1} = (-1)^{k+1} \Lambda \forall k \geq 1$. [*Suggerimento.* L'espressione di Λ^2 si trova con conto esplicito. Si verifica quindi facilmente che $\Lambda^3 = -\Lambda$ e $\Lambda^4 = -\Lambda^2$. Le altre relazioni si dimostrano per induzione.]

Esercizio 11 Sia Λ la matrice dell'esercizio 10. Si mostri che per ogni $\Omega, t \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{\pm \Omega \Lambda t} = \mathbb{1} \pm \Lambda \sin \Omega t + \Lambda^2 (1 - \cos \Omega t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \lambda (\cos \Omega t - 1) & \mp \sin \lambda \sin \Omega t & \sin \lambda \cos \lambda (\cos \Omega t - 1) \\ \pm \sin \lambda \sin \Omega t & \cos \Omega t & \pm \cos \lambda \sin \Omega t \\ \sin \lambda \cos \lambda (\cos \Omega t - 1) & \mp \cos \lambda \sin \Omega t & 1 + \cos^2 \lambda (\cos \Omega t - 1) \end{pmatrix}.$$

[*Suggerimento.* Per definizione di esponenziale di un operatore lineare (cfr. la definizione 3.3) si ha

$$\begin{aligned} e^{\pm \Omega \Lambda t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\pm \Omega t)^k \Lambda^k}{k!} = \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm \Omega t)^{2k} \Lambda^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\pm \Omega t)^{2k-1} \Lambda^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \mathbb{1} - \Lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pm \Omega t)^{2k}}{(2k)!} + \Lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pm \Omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathbb{1} - \Lambda^2 (\cos \Omega t - 1) \pm \Lambda \sin \Omega t, \end{aligned}$$

dove si sono usati gli sviluppi in serie di MacLaurin di seno e coseno (cfr. l'esercizio 31 del capitolo 1),

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

e le loro proprietà di parità $\sin(-x) = -\sin x$ e $\cos(-x) = \cos x$.]

Esercizio 12 Si consideri l'equazione $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q})$ in \mathbb{R}^3 . Si mostri che l'equazione si può riscrivere nella forma $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}$, dove A è la matrice antisimmetrica con $A_{12} = -\Omega_3$, $A_{13} = \Omega_2$ e $A_{23} = -\Omega_1$. [Suggerimento. Segue dal lemma 34.9 e dall'osservazione 34.10.]

Esercizio 13 Nel sistema di riferimento K considerato nell'esempio 35.9, si consideri l'equazione

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}),$$

con $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \cos \lambda, 0, \Omega \sin \lambda)$, dove λ è notazione semplificata per λ_{eff} . Si mostri che la soluzione si può scrivere nella forma $\mathbf{Q}(t) = U(t)\mathbf{x}(t)$, dove $U(t) = e^{-At}$, con $A = \Omega\Lambda$ e Λ come nell'esercizio 10, e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ risolve l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = U^{-1}\mathbf{F}$. [Soluzione. Per l'esercizio 12 possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} - 2A\dot{\mathbf{Q}} - A^2\mathbf{Q}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \sin \lambda & 0 \\ \Omega \sin \lambda & 0 & \Omega \cos \lambda \\ 0 & -\Omega \cos \lambda & 0 \end{pmatrix} = \Omega\Lambda,$$

dove Λ è la matrice introdotta nell'esercizio 10. Cerchiamo una soluzione nella forma $\mathbf{Q} = U\mathbf{x}$, dove $U = U(t)$ è una matrice da fissare. Si ha $\dot{\mathbf{Q}} = \dot{U}\mathbf{x} + U\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}}$, così che l'equazione diventa

$$\ddot{U}\mathbf{x} + 2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + U\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} + 2A\dot{U}\mathbf{x} + 2AU\dot{\mathbf{x}} + A^2U\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

Imponiamo che i termini con $\dot{\mathbf{x}}$ scompaiano dall'equazione, i.e. che $2\dot{U}\dot{\mathbf{x}} + 2AU\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Questo implica

$$\dot{U} + AU = 0 \quad \implies U = e^{-At},$$

(più in generale U è della forma $e^{-At}M$, con M matrice arbitraria, e possiamo fissare $M = \mathbf{1}$). Usando il fatto che $\dot{U} = -AU$, e quindi $\ddot{U} = A^2U$, l'equazione per \mathbf{x} si semplifica notevolmente e si riduce a $U\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Osservando che U è invertibile, poiché $(e^{-At})^{-1} = e^{At}$ (cfr. la proprietà 3 del lemma 3.5), segue l'asserto.]

Esercizio 14 Si considerino le equazioni (35.10) che descrivono il pendolo di Foucault nell'approssimazione $2\lambda' = -m\omega^2$. In forma vettoriale, esse diventano

$$\ddot{\mathbf{Q}} = -\omega^2\mathbf{Q} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}).$$

Se ne trovi la soluzione senza compiere alcuna ulteriore approssimazione. [Soluzione. Nel sistema di riferimento K dell'esempio 35.9 si ha $\boldsymbol{\Omega} = (-\Omega \cos \lambda, 0, \Omega \sin \lambda)$, dove λ sta per λ_{eff} . Per l'esercizio 13 la soluzione è data da $\mathbf{Q}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t)$, dove $A = \Omega\Lambda$, con Λ come nell'esercizio 10, e $\mathbf{x}(t)$ risolve l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$. Si ha quindi $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, dove

$$x_k(t) = x_k(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}_k(0)}{\omega} \sin \omega t, \quad k = 1, 2, 3,$$

con i dati iniziali $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ che si possono esprimere in termini dei dati iniziali $\mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0)$; infatti, poiché $U(0) = \mathbf{1}$ e $\dot{U}(0) = -A$, si ha $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) - A\mathbf{x}(0)$, e quindi $\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{Q}}(0) + A\mathbf{Q}(0)$, i.e.

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \xi(0), & x_2(0) &= \eta(0), & x_3(0) &= \zeta(0), \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{\xi}(0) - \Omega \sin \lambda \eta(0), & \dot{x}_2(0) &= \dot{\eta}(0) + \Omega (\sin \lambda \xi(0) + \cos \lambda \zeta(0)), & \dot{x}_3(0) &= \dot{\zeta}(0) - \Omega \cos \lambda \eta(0). \end{aligned}$$

Per l'esercizio 11 la soluzione $\mathbf{Q}(t)$ è data allora da

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sin^2 \lambda (\cos \Omega t - 1) & \sin \lambda \sin \Omega t & \sin \lambda \cos \lambda (\cos \Omega t - 1) \\ -\sin \lambda \sin \Omega t & \cos \Omega t & -\cos \lambda \sin \Omega t \\ \sin \lambda \cos \lambda (\cos \Omega t - 1) & \cos \lambda \sin \Omega t & 1 + \cos^2 \lambda (\cos \Omega t - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Usando le espressioni esplicite di $\mathbf{x}(t)$ in termini dei dati iniziali $\mathbf{Q}(0)$ e $\dot{\mathbf{Q}}(0)$ si ottiene infine l'espressione completa di $\mathbf{Q}(t)$.]

Esercizio 15 Si mostri che, a partire dalle equazioni (35.7) e (35.9), se si fanno le sole due approssimazioni alla fine di pag. 400, si ottengono direttamente le equazioni (35.11). [*Suggerimento.* L'approssimazione lineare, nella relazione (35.7), dà $\zeta = 0$, che introdotta nelle (35.9), elimina tutti i termini in cui compare ζ . La (35.9c) fissa allora $2\lambda'\ell = -mg + 2m\Omega \cos \lambda \dot{\eta} - m\Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda \xi$. Se introduciamo tale espressione nelle (35.9a) e (35.9b) e trascuriamo sia i termini non lineari in ξ ed η sia i termini in Ω^2 , otteniamo le (35.11).]

Esercizio 16 Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ il sistema di riferimento dell'esempio 35.10, con O' situato a una latitudine efficace λ . Sia g l'accelerazione di gravità efficace. Si verifichi che se, nel discutere l'esempio 35.10, si tiene conto della forza centrifuga e non si compie alcuna approssimazione, la soluzione esatta $\mathbf{Q}(t)$ dell'equazione

$$\ddot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q}), \quad \mathbf{g} = (0, 0, g),$$

che descrivono il moto del sasso, lasciato inizialmente nell'origine con velocità nulla, è data da

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x_1(t) + \sin \lambda \sin \Omega t x_2(t) + (\cos \Omega t - 1) (\sin \lambda \cos \lambda x_3(t) + \sin^2 \lambda x_1(t)), \\ \eta(t) &= -\sin \Omega t (\sin \lambda x_1(t) + \cos \lambda x_3(t)) + \cos \Omega t x_2(t), \\ \zeta(t) &= x_3(t) + \cos \lambda \sin \Omega t x_2(t) + (\cos \Omega t - 1) (\sin \lambda \cos \lambda x_1(t) + \cos^2 \lambda x_3(t)), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} x_1(t) &= g \sin \lambda \cos \lambda \left(\frac{\cos \Omega t - 1}{\Omega^2} + \frac{1}{2} t^2 \right), \\ x_2(t) &= \frac{g \cos \lambda}{\Omega} \left(\frac{\sin \Omega t}{\Omega} - t \right), \\ x_3(t) &= g \cos^2 \lambda \left(\frac{\cos \Omega t - 1}{\Omega^2} \right) - \frac{1}{2} g \sin^2 \lambda t^2. \end{aligned}$$

[*Suggerimento.* Ragionando come nell'esercizio 13 si scrive la soluzione dell'equazione nella forma $\mathbf{Q}(t) = e^{-At} \mathbf{x}(t)$, dove $A = \Omega \Lambda$, se Λ è la matrice dell'esercizio 10, e $\mathbf{x}(t)$ risolve l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} + U^{-1} \mathbf{g} = \mathbf{0}$. Utilizzando l'esercizio 11 per l'espressione esplicita della matrice $U^{-1} = e^{At}$, si trova

$$U^{-1} \mathbf{g} = (g \sin \lambda \cos \lambda (\cos \Omega t - 1), g \cos \lambda \sin \Omega t, g + g \cos^2 \lambda (\cos \Omega t - 1)).$$

Integrando l'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = -U^{-1}\mathbf{g}$, con condizioni iniziali (cfr. l'esercizio 14 per il legame tra $\mathbf{x}(0)$ e $\mathbf{Q}(0)$)

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{Q}(0) = (0, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{Q}}(0) + A\mathbf{Q}(0) = (0, 0, 0),$$

poiché il sasso all'istante $t = 0$ si trova in O' con velocità nulla, si trova per $\mathbf{x}(t)$ l'espressione data nel testo dell'esercizio. Usando di nuovo l'espressione esplicita di e^{-At} si trova quindi $\mathbf{Q}(t)$.]

Esercizio 17 Si verifichi che, al primo ordine in Ω , la soluzione $\mathbf{Q}(t)$ dell'esercizio 16 dà il risultato (35.17). Si mostri che l'approssimazione fatta nel discutere l'esempio 35.10 è quindi giustificata e si dica fino a quale profondità del pozzo il risultato può essere accettato. [Soluzione. Sviluppando la soluzione $\mathbf{Q}(t)$ al primo ordine in Ω , si trova

$$\xi(t) = O(\Omega^2), \quad \eta(t) = \frac{1}{3}g\Omega \cos \lambda t^3 + O(\Omega^2), \quad \zeta(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + O(\Omega^2),$$

in accordo con le (35.16) e (35.18).]

Esercizio 18 Un disco in vinile, di raggio $R = 15$ cm, gira sul piatto di un grammofono, in senso orario, componendo 33 giri al minuto con velocità angolare costante. Una mosca di massa m parte dal centro del disco in direzione radiale mantenendo una velocità di intensità costante $v = 1$ cm/sec.

- (1) Si determini il tempo t_0 necessario perché la mosca, muovendosi sempre in linea retta nel proprio sistema di riferimento, raggiunga il bordo del disco.
- (2) Si dica quanti giri deve effettuare il disco perché la mosca raggiunga il bordo del disco.
- (3) Si determini la traiettoria percorsa dalla mosca in un sistema di riferimento fisso la cui origine coincida con il centro del disco.
- (4) Si calcoli la lunghezza dell'orbita descritta dalla traiettoria percorsa dalla mosca fino al tempo t_0 .
- (5) Si determini la forza di Coriolis che agisce sulla mosca.

[Suggerimento. Si scelga un sistema di riferimento $K = O'\xi\eta$ solidale con il disco, in cui O' sia il centro del disco; sia ξ la direzione lungo cui muove la mosca. (1) Si ha $t_0 = 15$ s. (2) Nel tempo t_0 il disco effettua $15 \cdot 33/60 = 8.25$ giri. (3) Nel sistema di riferimento fisso (che coincide con K a $t = 0$) la traiettoria è $x(t) = vt \cos \omega t$, $y(t) = -vt \sin \omega t$, per $0 \leq t \leq t_0$, dove $\omega = 2\pi \cdot 33/60$. (4) La lunghezza dell'orbita è (cfr. l'esercizio 36 del capitolo 3)

$$\ell = v \int_0^{t_0} dt \sqrt{1 + \omega^2 t^2} = \frac{1}{2} \left(t_0 \sqrt{1 + \omega^2 t_0^2} + \frac{1}{\omega} \log \left(\omega t_0 + \sqrt{1 + \omega^2 t_0^2} \right) \right).$$

- (5) La forza di Coriolis è $\mathbf{F}_2 = (0, -2m\omega vt, 0)$: per muoversi nella direzione ξ la mosca deve opporvisi.]

Esercizio 19 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso o assoluto), consideriamo una retta r nel piano xy , che passa per O e forma un angolo α con l'asse x . Sia O' un punto che si muove lungo r in modo che la sua coordinata lungo r , calcolata da O , varia nel tempo secondo la legge $\rho = a \sin bt$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento (sistema di riferimento mobile o relativo), con l'asse ζ parallelo all'asse z , che ruota con velocità angolare ω costante intorno all'asse verticale ζ . Se $\theta(t)$ è l'angolo che l'asse ξ forma con la retta r al tempo t , si assuma che all'istante $t = 0$ si abbia $\theta(0) = 0$. Un punto P si muove lungo la direzione ξ secondo la legge oraria $\xi(t) = e^{bt}$, con b costante. Si veda la figura 8.14.

- (1) Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ B$ e si determinino la forma di C e B .

- (2) Si determini la legge del moto nel sistema di riferimento assoluto.
- (3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .
- (4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .
- (5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
- (6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
- (7) Si determini la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P .

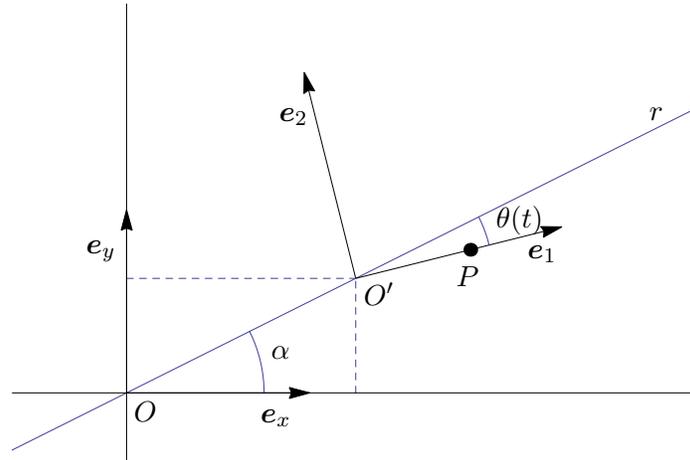


Figura 8.14: Sistemi di riferimento dell'esercizio 19.

[Soluzione. (1) Si ha $B = B^3(\alpha + \omega t)$, con le notazioni dell'esercizio 9, e $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, dove \mathbf{r} è dato da

$$\mathbf{r} = (a \cos \alpha \sin bt, a \sin \alpha \sin bt, 0).$$

(2) Si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \alpha \sin bt + e^{bt} \cos(\alpha + \omega t), \\ y(t) &= a \sin \alpha \sin bt + e^{bt} \sin(\alpha + \omega t), \\ z(t) &= 0. \end{aligned}$$

(3) Si ha $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, quindi

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ab \cos \alpha \cos bt + e^{bt} [b \cos(\alpha + \omega t) - \omega \sin(\alpha + \omega t)], \\ \dot{y}(t) &= ab \sin \alpha \cos bt + e^{bt} [b \sin(\alpha + \omega t) + \omega \cos(\alpha + \omega t)], \\ \dot{z}(t) &= 0. \end{aligned}$$

(4) Si ha $\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}}$, quindi $\mathbf{v}' = (e^{bt}b \cos(\alpha + \omega t), e^{bt}b \sin(\alpha + \omega t), 0)$. (5) Si ha

$$\mathbf{v}_0 = (ab \cos \alpha \cos bt, ab \sin \alpha \cos bt, 0).$$

(6) Si ha $\mathbf{v}_T = (-\omega e^{bt} \sin(\alpha + \omega t), \omega e^{bt} \cos(\alpha + \omega t), 0)$. (7) Si ha $\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega b e^{bt}, 0)$.]

Esercizio 20 Si considerino due sistemi di riferimento κ e K , di cui $\kappa = Oxyz$ (sistema di riferimento assoluto) è fisso e $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema di riferimento relativo) si muove nel modo seguente. L'origine O' di K si muove lungo una parabola nel piano (x, y) di equazione $y = 1 + x^2$, con legge oraria tale che la sua ascissa al tempo t è data da $x_{O'}(t) = t$ e l'asse ξ è istante per istante tangente alla parabola e diretto verso destra. Un punto materiale P di massa $m = 1$ è lasciato nella posizione $\mathbf{q}(0) = (0, 2, 0)$ con velocità iniziale nulla ed è soggetto alla forza di gravità $(0, -g, 0)$. Si veda la figura 8.15.

- (1) Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ B$ e si determinino la forma di C e B .
- (2) Si determinino il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto κ e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K .
- (3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .
- (4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .
- (5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
- (6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
- (7) Si determini la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P .

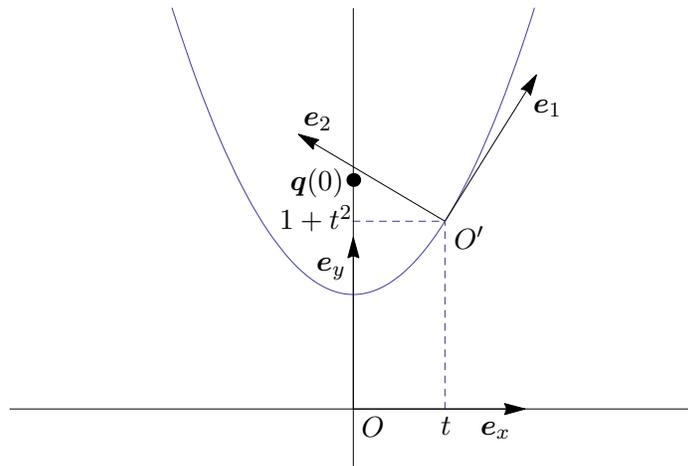


Figura 8.15: Sistemi di riferimento dell'esercizio 20.

[Soluzione. (1) Si ha $D = C \circ B$, dove $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, 1 + t^2, 0)$, e $B = B^3(\alpha(t))$, con le notazioni dell'esercizio 9 e con $\alpha(t) = \arctan 2t$. (2) Si ha $\mathbf{q}(t) = (0, 2 - gt^2/2, 0)$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \left(-t \cos \alpha(t) + \left(1 - \frac{1}{2}gt^2 - t^2\right) \sin \alpha(t), t \sin \alpha(t) + \left(1 - \frac{1}{2}gt^2 - t^2\right) \cos \alpha(t), 0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \left(t - gt^3 - 2t^3, 1 + t^2 - \frac{1}{2}gt^2, 0 \right), \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che si ha

$$\cos \alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \quad \sin \alpha(t) = \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}.$$

(3) Si ha $\mathbf{v} = (0, -gt, 0)$. (4) Si ha $\dot{\mathbf{Q}} = (\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dot{Q}_3)$, dove

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1(t) &= -\cos \alpha(t) + t\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) + (-gt - 2t) \sin \alpha(t) + (1 - g(t^2/2) - t^2)\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t), \\ \dot{Q}_2(t) &= \sin \alpha(t) + t\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) + (-gt - 2t) \cos \alpha(t) - (1 - g(t^2/2) - t^2)\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t), \\ \dot{Q}_3(t) &= 0,\end{aligned}$$

dove $\dot{\alpha}(t) = 2/(1 + 4t^2)$, così che risulta

$$\mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} = (-1 + (1 - g(t^2/2) - t^2)\dot{\alpha}(t), t\dot{\alpha}(t) + (-gt - 2t), 0).$$

(5) Si ha $\mathbf{v}_0 = (1, 2t, 0)$. (6) Si ha

$$\mathbf{v}_T = \left(-\left(1 - \frac{1}{2}gt^2 - t^2\right)\dot{\alpha}(t), -t\dot{\alpha}(t), 0 \right).$$

(7) Si ha $\mathbf{F}_2 = (2\dot{\alpha}(t)\dot{Q}_2(t), -2\dot{\alpha}(t)\dot{Q}_1(t), 0)$.

Esercizio 21 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema di riferimento fisso o assoluto), consideriamo anche un sistema di riferimento mobile (o relativo) $K = O'\xi\eta\zeta$, che all'istante $t = 0$ coincide con κ e ruota intorno all'asse ζ , parallelo a z , con velocità angolare costante ω . Il sistema di riferimento K si muove rispetto a κ secondo una delle due seguenti modalità:

(a) $\omega = 0$ e O' si muove rispetto a O con accelerazione costante $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ e con velocità iniziale $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$;

(b) $\omega > 0$ e O' si muove rispetto a O con accelerazione nulla, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, e con velocità iniziale $\mathbf{v}(0) = (1, 1, 0)$.

Indichiamo con \mathbf{q} le coordinate nel sistema κ e con \mathbf{Q} le coordinate nel sistema K . Si consideri un punto materiale P di massa $m = 1$, situato inizialmente in $\mathbf{q}(0) = (0, 0, 1)$ e con velocità iniziale $\dot{\mathbf{q}}(0) = (0, 1, 2)$. Sia $\mathbf{f} = (1, 0, -1)$ la forza (costante) che agisce sul punto P .

(1) Si determini il moto assoluto $\mathbf{q}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

(2) Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ B$ e si determinino la forma di C e B in entrambi i casi (a) e (b).

(3) Si determinino la velocità assoluta \mathbf{v} , la velocità relativa \mathbf{v}' e la velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T + \mathbf{v}_0$ in entrambi i casi (a) e (b).

(4) Si determini la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P in entrambi i casi (a) e (b).

[Soluzione. (1) Si ha

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2, \quad y(t) = t, \quad z(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1.$$

(2) Nel caso (a) si ha $B = \mathbf{1}$ e $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (t^2/2, t^2/2, 0)$. Nel caso (b) si ha $B = B^3(\omega t)$, con le notazioni dell'esercizio 9, e $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (t, t, 0)$. (3) Si ha $\mathbf{v} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, quindi $\mathbf{v} = (t, 1, 2 - t)$. Nel caso (a) si ha

$$\mathbf{v}_0 = (t, t, 0), \quad \mathbf{v}_T = 0, \quad \mathbf{v}' = (0, 1 - t, 2 - t),$$

mentre nel caso (b) si ha

$$\mathbf{v}_0 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_T = \left(0, \frac{1}{2}\omega t^2 - \omega t, 0\right), \quad \mathbf{v}' = \left(t - 1, -\frac{1}{2}\omega t^2 + \omega t, 2 - t\right).$$

(4) Nel caso (a) la forza di Coriolis è $\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, mentre si ha

$$\mathbf{F}_2 = (-2\omega(t-1)\cos\omega t + (t^2-2t)\omega^2\sin\omega t, 2\omega(t-1)\sin\omega t + (t^2-2t)\omega^2\cos\omega t, 0)$$

nel caso (b).]

Esercizio 22 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo la circonferenza di raggio 1 e centro il punto $C = (0, 1)$ nel piano (x, y) . L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla circonferenza nel punto O' : i due sistemi κ e K coincidono all'istante iniziale $t = 0$. La componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge $x_{O'}(t) = \sin t$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = a \sin bt$, con a, b costanti positive.

(1) Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e si determino C e B .

(2) Si scriva la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.

(3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .

(4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .

(5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(7) Si determini la forza di Coriolis che agisce sul punto P .

(8) Si determini la forza centrifuga che agisce sul punto P .

[Soluzione. (1) Risulta $D = C \circ B$, dove $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (\sin t, 1 - \cos t, 0)$, e $B = B^3(t)$, con le notazioni dell'esercizio 9. (2) Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (a \sin bt, 0, 0), \quad \mathbf{q}(t) = (a \sin bt \cos t + \sin t, a \sin bt \sin t + 1 - \cos t, 0).$$

(3) Si ha

$$\mathbf{v} = (ab \cos bt \cos t - a \sin bt \sin t + \cos t, ab \cos bt \sin t + a \sin bt \cos t + \sin t, 0).$$

(4) Si ha

$$\mathbf{v}' = (ab \cos bt \cos t, ab \cos bt \sin t, 0).$$

(5) Si ha $\mathbf{v}_0 = (\cos t, \sin t, 0)$. (6) Si ha

$$\mathbf{v}_T = (-a \sin bt \sin t, a \sin bt \cos t, 0).$$

(7) La forza di Coriolis è data da $\mathbf{F}_2 = (0, -2ab \cos bt, 0)$. (8) Si ha $\mathbf{F}_3 = (a \sin bt, 0, 0)$.]

Esercizio 23 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo la spirale $r(t) = \theta(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre il piano (ξ, η) ruota con velocità angolare costante $\omega = 1$ intorno a O' . I due sistemi κ e K coincidono all'istante iniziale $t = 0$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = t$.

(1) Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e si determino C e B .

- (2) Si scriva la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema relativo.
 (3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .
 (4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .
 (5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
 (6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
 (7) Si determini la forza di Coriolis che agisce sul punto P .
 (8) Si determini la forza centrifuga che agisce sul punto P .
 (9) Si determini l'istante t_0 in cui il punto materiale P attraversa la circonferenza di raggio $R = 10$ e centro $C = (0, 0)$ nel piano (x, y) .
 [Soluzione. (1) Risulta $D = C \circ B$, dove $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (t \cos t, t \sin t, 0)$, e $B = B^3(t)$, con le notazioni dell'esercizio 9. (2) Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (t, 0, 0), \quad \mathbf{q}(t) = (2t \cos t, 2t \sin t, 0).$$

- (3) Si ha

$$\mathbf{v} = (2 \cos t - 2t \sin t, 2 \sin t + 2t \cos t, 0).$$

- (4) Si ha $\mathbf{v}' = (\cos t, \sin t, 0)$. (5) Si ha

$$\mathbf{v}_0 = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 0).$$

- (6) Si ha $\mathbf{v}_T = (-t \sin t, t \cos t, 0)$. (7) La forza di Coriolis è data da $\mathbf{F}_2 = (0, -2, 0)$. (8) Si ha $\mathbf{F}_3 = (t, 0, 0)$. (9) Si ha $t_0 = 5$.]

Esercizio 24 Dato un sistema di riferimento fisso $Oxyz$, si consideri un sistema di riferimento $O'\xi\eta\zeta$ la cui origine O' si muove lungo la circonferenza situata nel piano (x, y) , di centro O e raggio $r = 1$, in modo tale che l'angolo che il vettore $\mathbf{q}_{O'}$ forma con l'asse x sia dato da $\alpha(t) = \alpha t^2$, con α costante; inoltre la terna $O'\xi\eta\zeta$ ruota intorno all'asse ζ (parallelo all'asse z) in modo tale che l'angolo che l'asse ξ forma con l'asse x è dato da $\beta(t) = \beta t^3$, con β costante. Un punto P si muove lungo l'asse ξ con legge $\xi(t) = \nu t$, con ν costante. Si veda la figura 8.16.

- (1) Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione con una rotazione, $D = C \circ B$ e si determinino la forma di C e B .
 (2) Si determinino il moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema di riferimento assoluto κ e il moto $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema di riferimento relativo K .
 (3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .
 (4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .
 (5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
 (6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T . (7) Si determini la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P .

[Soluzione. (1) Risulta $D = C \circ B$, dove $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (\cos \alpha t^2, \sin \alpha t^2, 0)$, e $B = B^3(\beta t^3)$, con le notazioni dell'esercizio 9. (2) Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (\nu t, 0, 0), \quad \mathbf{q}(t) = (\cos \alpha t^2 + \nu t \cos \beta t^3 + \nu t, \sin \alpha t^2 + \nu t \sin \beta t^3, 0).$$

- (3) La velocità assoluta è

$$\mathbf{v} = (-2\alpha \sin \alpha t^2 + \nu \cos \beta t^3 - 3\beta \nu t^3 \sin \beta t^3, 2\alpha \cos \alpha t^2 + \nu \sin \beta t^3 + 3\beta \nu t^3 \cos \beta t^3, 0).$$

- (4) La velocità relativa è data da $\mathbf{v}' = (\nu \cos \beta t^3, \nu \sin \beta t^3, 0)$. (5) Si ha $\mathbf{v}_0 = (-2\alpha \sin \alpha t^2, 2\alpha \cos \alpha t^2, 0)$. (6) Si ha $\mathbf{v}_T = (-3\beta \nu t^3 \sin \beta t^3, 3\beta \nu t^3 \cos \beta t^3, 0)$. (7) La forza di Coriolis è data da $\mathbf{F}_2 = (0, -6\beta \nu t^3, 0)$.]

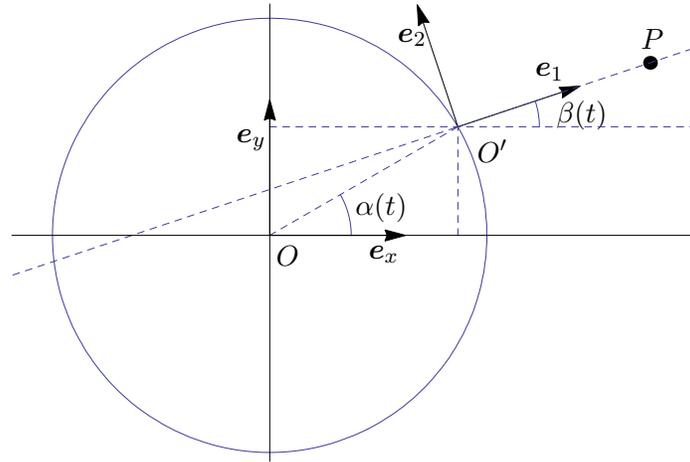


Figura 8.16: Sistemi di riferimento dell'esercizio 24.

Esercizio 25 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove in senso antiorario lungo l'ellisse di semiassi di lunghezza $a = 2$ e $b = 1$ e centro l'origine $O = (0, 0)$ nel piano (x, y) , orientata in modo che l'asse maggiore risulti parallelo all'asse x . L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ e K ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare costante ω in senso antiorario. All'istante iniziale $t = 0$ il punto O' occupa la posizione $\mathbf{q}_{O'} = (2, 0, 0)$ e gli assi ξ e η sono diretti come gli assi x e y , rispettivamente. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = vt$, con v costante positiva.

- (1) Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e si determino C e B .
- (2) Si scriva la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.
- (3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .
- (4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .
- (5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .
- (6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .
- (7) Si determini la forza di Coriolis \mathbf{F}_2 che agisce sul punto P .

[Soluzione. (1) Risulta $D = C \circ B$, dove $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, dove

$$\mathbf{r} = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t), 0),$$

con

$$\rho(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta(t)}}$$

e $\theta(t)$ che rappresenta la legge oraria (non specificata) con cui varia l'angolo che il raggio vettore che individua il punto P forma con l'asse x , e $B = B^3(\omega t)$, con le notazioni dell'esercizio 9. (2) Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (vt, 0, 0), \quad \mathbf{q}(t) = (vt \cos \omega t + \rho(t) \cos \theta(t), vt \sin \omega t + \rho(t) \sin \theta(t), 0).$$

(3) La velocità assoluta è $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, dove

$$\begin{aligned}v_1 &= v \cos \omega t - v \omega t \sin \omega t + \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \\v_2 &= v \sin \omega t + v \omega t \cos \omega t + \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \\v_3 &= 0.\end{aligned}$$

(4) Si ha $\mathbf{v}' = (v \cos \omega t, v \sin \omega t, 0)$. (5) Si ha

$$\mathbf{v}_0 = (\dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t), 0).$$

(6) Si ha $\mathbf{v}_T = (-v \omega t \sin \omega t, v \omega t \cos \omega t, 0)$. (7) La forza di Coriolis è data da $\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega v, 0)$.]

Esercizio 26 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), la cui origine O' si muove nel piano (x, y) lungo il profilo $y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; la componente lungo l'asse x del vettore che individua il punto O' varia secondo la legge $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ di K si mantiene sempre parallelo all'asse z di κ , mentre l'asse ξ si mantiene sempre tangente alla curva $y = y(x)$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ con legge oraria $\xi(t) = a \sin bt$, con a, b costanti positive. Si veda la figura 8.17.

(1) Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e si determinino C e B .

(2) Si scriva la soluzione delle equazioni del moto $\mathbf{q}(t)$ nel sistema assoluto e $\mathbf{Q}(t)$ nel sistema mobile.

(3) Si determini la velocità assoluta \mathbf{v} .

(4) Si determini la velocità relativa \mathbf{v}' .

(5) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_0 .

(6) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento \mathbf{v}_T .

(7) Si determini la forza di Coriolis che agisce sul punto P .

(8) Si determini la forza centrifuga che agisce sul punto P .

[Soluzione. (1) Risulta $D = C \circ B$, dove $C\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, con $\mathbf{r} = (t, y_0(t), 0)$, con $y_0(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, e $B = B^3(\theta(t))$, con le notazioni dell'esercizio 9 e con $\theta(t) = \arctan(3t^2 - 12t + 9)$. (2) Si ha

$$\mathbf{Q}(t) = (a \sin bt, 0, 0), \quad \mathbf{q}(t) = (a \sin bt \cos \theta(t) + t, a \sin bt \sin \theta(t) + y_0(t), 0).$$

(3) Si ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, con

$$\begin{aligned}v_1 &= ab \cos bt \cos \theta(t) - a \dot{\theta}(t) \sin bt \sin \theta(t) + 1 \\v_2 &= ab \cos bt \sin \theta(t) + a \dot{\theta}(t) \sin bt \cos \theta(t) + 3t^2 - 12t + 9, \\v_3 &= 0,\end{aligned}$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{6t - 12}{1 + (3t^2 - 12t + 9)^2}.$$

(4) Si ha

$$\mathbf{v}' = (ab \cos bt \cos \theta(t), ab \cos bt \sin \theta(t), 0).$$

(5) Si ha $\mathbf{v}_0 = (1, 3t^2 - 12t + 9, 0)$. (6) Si ha

$$\mathbf{v}_T = (-a \dot{\theta}(t) \sin bt \sin \theta(t), a \dot{\theta}(t) \sin bt \cos \theta(t), 0).$$

(7) La forza di Coriolis è data da $\mathbf{F}_2 = (0, -2ab \dot{\theta}(t) \cos bt, 0)$. (8) Si ha $\mathbf{F}_3 = (a \dot{\theta}^2(t) \sin bt, 0, 0)$.]

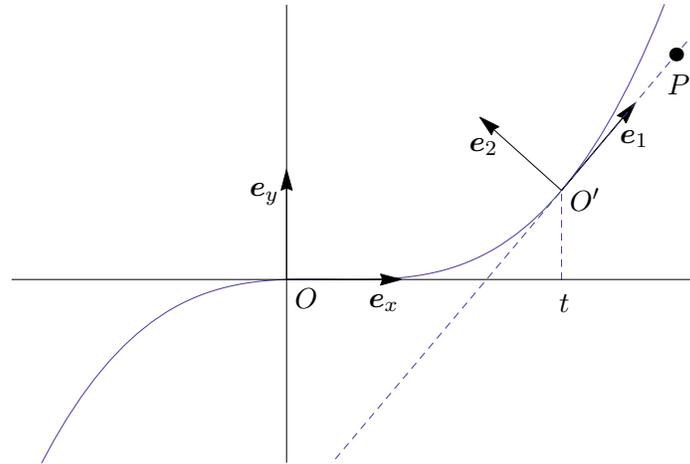


Figura 8.17: Sistemi di riferimento dell'esercizio 26.

Esercizio 27 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), si consideri anche un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ (sistema relativo), tale che l'asse ζ di K coincide con l'asse z di κ e K ruota intorno all'asse $\zeta = z$ con velocità angolare costante ω . I due sistemi κ e K coincidono all'istante iniziale $t = 0$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove lungo l'asse ξ sottoposto all'azione di una molla con costante elastica λ^2 (così che se \mathbf{r} è lo spostamento di P rispetto a $O = O'$ la forza di richiamo è data da $-\lambda^2\mathbf{r}$). All'istante iniziale $t = 0$ il punto materiale ha velocità nulla.

- (1) Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , i.e. $D = C \circ B$, e si determinino C e B .
- (2) Si scriva l'equazione del moto nel sistema di riferimento mobile K , tenuto conto che, poiché il punto materiale è costretto a muoversi lungo l'asse ξ , qualsiasi componente della forza \mathbf{F}_{TOT} non diretta lungo ξ è bilanciata da una corrispondente forza vincolare (cfr. il capitolo 9) e quindi non interviene nell'equazione del moto (in modo tale che le coordinate del punto materiale P lungo gli assi η e ζ sono identicamente nulle).
- (3) Si risolve l'equazione del moto nel sistema K e si determini la traiettoria $\mathbf{Q}(t)$ in tale sistema, al variare del parametro ω .
- (4) Si dimostri che esiste un valore di ω per il quale il punto materiale P risulta fermo nel sistema di riferimento K per una scelta opportuna dei dati iniziali.
- (5) Si discuta sotto quali condizioni su ω la soluzione $\mathbf{q}(t)$ descrive un moto periodico nel sistema di riferimento fisso κ .

[Soluzione. (1) Risulta $D = C \circ B$, dove $C = \mathbf{1}$, e $B = B^3(\theta(t))$, con le notazioni dell'esercizio 9, e $\theta(t) = \omega t$. (2) Si ha $\mathbf{F}_{TOT} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_V$, dove

$$\mathbf{F} = (-\lambda^2\xi, 0, 0), \quad \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_2 = (0, -2\omega\dot{\xi}, 0), \quad \mathbf{F}_3 = (\omega^2\xi, 0, 0)$$

e \mathbf{F}_V è diretta ortogonalmente alla direzione ξ ed è tale da rendere nulle le componenti lungo le direzioni η e ζ della forza totale. Quindi $\ddot{\xi} = \alpha\xi$, dove $\alpha = \omega^2 - \lambda^2$, mentre $\eta = 0$ e $\zeta = 0$. (3) Se $\alpha < 0$ si ha $\xi(t) = \xi_0 \cos \sqrt{-\alpha}t$; se $\alpha > 0$ si ha $\xi(t) = \xi_0 \cosh \sqrt{\alpha}t$, dove $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ (cfr. pag. 56);

se $\alpha = 0$ si ha $\xi(t) = \xi_0$. Inoltre $\eta(t) = 0$ e $\zeta(t) = 0$. (4) Per $\omega = \lambda$ si ha $\alpha = 0$, quindi $\xi(t) = \xi(0)$ purché si abbia $\dot{\xi}(0) = 0$. (5) Il moto è periodico nei due casi: (5.1) $\alpha = 0$ e $\dot{\xi}(0)$, (5.2) $\alpha < 0$, $\lambda > \omega$ e $\sqrt{\omega^2/(\lambda^2 - \omega^2)} \in \mathbb{Q}$.]

Esercizio 28 Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine O' si muova nel piano (x, y) lungo la guida di equazione $y = x + \sin x$ in modo tale che si abbia $x_{O'}(t) = t$. L'asse ζ è parallelo all'asse z , mentre l'asse ξ si mantiene tangente alla guida. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema di riferimento K lungo una guida parabolica di equazione $\eta = \xi^2$ con legge oraria $\xi(t) = \alpha \sin t$, $\alpha > 0$.

- (1) Si scriva la trasformazione rigida $D: K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B , e si determinino C e B .
- (2) Si determini la velocità assoluta del punto P .
- (3) Se ne determini la velocità relativa.
- (4) Si determini la componente traslatoria della velocità di trascinamento.
- (5) Si determini la componente rotatoria della velocità di trascinamento.
- (6) Si dimostri che si può fissare $\alpha < \alpha_0$ in modo tale che il moto nel piano (x, y) sia monotono nella direzione x e si dia una stima di α_0 .