9 | Vincoli e sistemi rigidi

§36 Vincoli

Nel presente capitolo introdurremo due nozioni fondamentali della meccanica classica: quella di vincolo e quella di sistema rigido. Da un punto di vista concettuale, la definizione di sistema rigido richiede di introdurre preliminarmente il concetto di vincolo olonomo bilatero – e così noi faremo. Infatti un sistema rigido è un caso particolare di sistema vincolato.

I vincoli sono delle "relazioni *a priori*" che legano tra loro le coordinate (ed eventualmente le velocità) di un insieme di punti materiali; i sistemi rigidi sono sistemi di punti sottoposti al vincolo che le mutue distance rimangono costanti. Fin tanto che si volessero studiare solo le proprietà configurazionali o cinematiche dei sistemi rigidi, si potrebbe evitare di approfondire ulteriormente l'analisi; tuttavia, non appena ci si interessi alle proprietà dinamiche, non si può evitare di analizzare le conseguenze che tali relazioni *a priori* hanno sul moto dei punti. Più in generale, per studiare la dinamica di un sistema sottoposto a vincoli, non basterà considerare le relazioni che definiscono i vincoli, ma bisognerà anche stabilire come tenerne conto quando si vogliano scrivere e risolvere le equazioni del moto.

Lo studio dei sistemi vincolati costituisce un aspetto non banale della meccanica classica. Noi seguiremo nel presente capitolo un approccio assiomatico: daremo una definizione astratta di vincolo e faremo vedere che l'introduzione di un nuovo principio (il principio di d'Alembert) consente di estendere i risultati validi per punti materiali non vincolati al caso di sistemi vincolati. Si potrebbe anche seguire un approccio differente, facendo vedere che i sistemi vincolati si possono ottenere attraverso un procedimento di limite a partire da sistemi non vincolati soggetti a forze particolarmente intense, senza che sia necessario introdurre nuovi principi o postulati oltre a quelli consueti della dinamica. Per una discussione lungo le linee di un simile approccio rimandiamo al capitolo 11.

Dopo aver dato nel presente paragrafo la definizione di vincolo in generale, la specificheremo nel prossimo al caso dei sistemi rigidi. Subito dopo analizzeremo quelle proprietà dei sistemi rigidi che discendono direttamente dalle relazioni che definiscono i vincoli. Successivamente, vedremo che le tali relazioni non sono sufficienti a determinarne la dinamica e che sarà necessario assumere qualcosa in più se si vuole scrivere le equazioni del moto in una forma che ci consenta di trovarne la soluzione usando i teoremi noti di esistenza e unicità: questo porterà alla formulazione delle equazioni cardinali della dinamica per sistemi rigidi. Chi volesse ignorare qualsiasi accenno alla teoria dei vincoli e studiare solo il moto dei sistemi rigidi dovrebbe quindi, per poterne studiare la caratteristiche dinamiche (quali quelle analizzate in questo e nel prossimo capitolo), assumere direttamente la validità delle equazioni cardinali della dinamica discusse nel §42.

Consideriamo un sistema meccanico costituito da N punti materiali nello spazio euclideo tridimensionale e scegliamo un sistema di assi cartesiani in cui i punti siano descritti dalle coordinate $x_k^{(i)}$, con $i = 1, \ldots, N$ e $k = 1, 2, 3$; con $\boldsymbol{x}^{(i)}$ e $\dot{\boldsymbol{x}}^{(i)}$ indichiamo i vettori in $\mathbb{R}^3$ di componenti $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$ e, rispettivamente, $\dot{x}_1^{(i)}, \dot{x}_2^{(i)}, \dot{x}_3^{(i)}$, che individuano la posizione e la velocità del punto i-esimo. Indichiamo inoltre con x la collezione delle $3N$ coordinate $x_k^{(i)}$ e, analogamente, con $\dot{x}$ la collezione delle $3N$ velocità corrispondenti $\dot{x}_k^{(i)}$. Più in generale, dati N vettori $\boldsymbol{f}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{f}^{(N)}$ in $\mathbb{R}^3$ indicheremo con f la collezione delle $3N$ componenti $f_k^{(i)}$, con $i = 1, \ldots, N$ e $k = 1, \ldots, 3$. Analogamente, data una funzione scalare $F : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$, indicheremo con ∇F il gradiente di F, i.e. il vettore di componenti $\partial F / \partial x_k^{(i)}$, con $i = 1, \ldots, N$ e $k = 1, 2, 3$. A volte useremo la stessa notazione anche per vettori appartenenti a sottospazi di $\mathbb{R}^{3N}$; per esempio, dato $(G_1, \ldots, G_M) \in \mathbb{R}^M$, con $M \leq 3N$, scriveremo $G = (G_1, \ldots, G_M)$.

Se due vettori $f, g \in \mathbb{R}^{3N}$ si ottengono, rispettivamente, da N vettori $\boldsymbol{f}^{(i)} = (f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)})$ e $\boldsymbol{g}^{(i)} = (g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, g_3^{(i)})$, con $i = 1, \ldots, N$, in $\mathbb{R}^3$, scriveremo

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}^{(i)} \cdot \boldsymbol{g}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} f_k^{(i)} g_k^{(i)}, \tag{36.1}$$

dove il secondo prodotto scalare è in $\mathbb{R}^3$ e il primo, per estensione, indica il prodotto scalare indotto in $\mathbb{R}^{3N}$. A volte useremo la stessa notazione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ per indicare il prodotto scalare in $\mathbb{R}^q$, per qualche $q \in \mathbb{N}$; specificheremo sempre il valore di q qualora possa insorgere confusione.

Definizione 36.1 (VINCOLI) *Dato un sistema meccanico costituito da N punti materiali, chiameremo* vincoli *delle relazioni* a priori *della forma*

$$G_m(x, \dot{x}, t) \geq 0 \,, \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{36.2}$$

per qualche $M \leq 3N$, che legano tra loro le coordinate e le velocità dei punti.

Definizione 36.2 (VINCOLI BILATERI) *Chiameremo* vincoli bilateri *quei vincoli in cui si abbia*

$$G_m(x, \dot{x}, t) = 0 \,, \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{36.3}$$

i.e. tali che le relazioni (36.1) *valgano con il segno uguale.*

Definizione 36.3 (VINCOLI OLONOMI) *Chiameremo* vincoli olonomi *i vincoli della forma*

$$G_m(x,t) \geq 0 \,, \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{36.4}$$

i.e. tali che nelle relazioni (36.1) *compaiano solo le variabili di posizione. Se si ha*

$$G_m(x,t) = 0 \,, \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{36.5}$$

diremo che il vincolo è un vincolo olonomo bilatero*.*

Definizione 36.4 (VINCOLI ANOLONOMI) *Un vincolo è detto* vincolo anolonomo *se non è olonomo.*

A volte si usa il termine *vincolo unilatero* per indicare un vincolo della forma (36.4). Un esempio di vincolo olonomo bilatero è costituito da un punto materiale vincolato a giacere su un piano prefissato; se invece il punto non può scendere al di sotto del piano ma può muoversi anche al di sopra di esso, abbiamo un esempio di vincolo olonomo unilatero. Un esempio di vincolo anolonomo è dato dal moto di rotolamento senza strisciamento (cfr. la definizione seguente), che verrà studiato in dettaglio nel §43.

Definizione 36.5 (ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO) *La condizione di* rotolamento senza strisciamento *(o* moto di puro rotolomento*) si ha quando, nel moto di due superfici regolari Σ_1 e Σ_2 che abbiano almeno un punto di contatto, in ogni istante le velocità dei punti di contatto guardati come punti di Σ_1 sono uguali alle velocità che essi hanno guardati come punti di Σ_2.*

Se una delle due superfici è in quiete, allora i punti di contatto hanno in ogni istante velocità nulla. Si ha una situazione di questo tipo, per esempio, se un cilindro circolare retto (cfr. la definizione 38.9 più avanti) rotola su un piano in modo tale che in ogni istante

- il cilindro e il piano hanno in comune una generatrice del cilindro,
- la velocità dei punti della generatrice è nulla.

Vedremo al §44 come descrivere analiticamente un moto di questo tipo. Si può immaginare, in maniera analoga, un cilindro che rotoli su un piano che a sua volta scorra in una data direzione, per esempio lungo l'asse x, con velocità v. In tal caso il cilindro rotola senza strisciare sul piano se i punti di contatto si muovono anch'essi nella direzione dell'asse x con velocità v.

Definizione 36.6 (VINCOLI OLONOMI BILATERI REGOLARI E INDIPENDENTI) *Definiremo* regolari *quei vincoli olonomi bilateri descritti dalle equazioni* (36.5)*, in cui le funzioni G_m, $m = 1, \ldots, M$, siano di classe C^2 e si abbia $\nabla G_m(x,t) \neq 0$ nei punti (x,t) in cui valgono le*

(36.5). *Diremo che tali vincoli sono* indipendenti *se, nei punti* (x,t) *in cui valgono le* (36.5)*, la relazione*

$$\sum_{m=1}^{M} c_m \nabla G_m(x,t) = 0 \tag{36.6}$$

è soddisfatta se e solo se $c_m = 0 \ \forall m = 1, \ldots, M$.

Definizione 36.7 (Forze vincolari) *In presenza di vincoli olonomi bilateri* (36.4)*, le equazioni di Newton che descrivono la dinamica del sistema considerato si scrivono nella forma*

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}^{(i)} = \boldsymbol{f}^{(i)} + \boldsymbol{f}_V^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{36.7}$$

dove $\boldsymbol{f}^{(i)}$ *è la forza attiva applicata al punto materiale di coordinate* $\boldsymbol{x}^{(i)}$ *e di massa* m_i*, mentre* $\boldsymbol{f}_V^{(i)}$ *rappresenta la forza che viene esercitata su tale punto per effetto dei vincoli, i.e. per fare in modo che le condizioni imposte dai vincoli siano rispettate. Tale forza prende il nome di* forza vincolare *(o* reazione vincolare*) che agisce sul punto considerato.*

La schematizzazione dell'effetto dei vincoli tramite la (36.7) deve essere fatta in modo compatibile. In primo luogo i dati iniziali devono soddisfare le condizioni (36.5). Inoltre le forze vincolari devono essere tali che le traiettorie generate $x(t)$ soddisfino ancora, in ogni istante, i vincoli (36.5). Questo implica che in generale le forze vincolari dipendono non solo dalle posizioni ma anche dalle velocità dei punti.

Tuttavia, le condizioni di compatibilità non determinano univocamente le forze vincolari: infatti le (36.7) e (36.5) costituiscono un sistema di $3N + M$ equazioni nelle $6N$ incognite x e f_V, e quindi non c'è unicità della soluzione. A meno che non sia $M = 3N$, nel qual caso però la compatibiltà richiede che gli N punti materiali siano tutti in posizioni che variano con il tempo in modo preassegnato e quindi la dinamica diventa banale; in particolare se i vincoli sono indipendenti dal tempo i punti materiali sono in posizioni fisse. Se $M < 3N$, perché il problema sia ben posto (i.e. perché sia possibile che la soluzione esista e sia unica, per ogni dato iniziale compatibile con i vincoli), occorre imporre qualche condizione aggiuntiva. Questo sarà fatto attraverso il principio di d'Alembert (cfr. il §41).

Osservazione 36.8 Possiamo scrivere le (36.7) in modo più compatto introducendo la *matrice di massa* m del sistema meccanico, definita come la matrice diagonale in $M(3N, \mathbb{R})$ la cui diagonale principale ha i primi tre elementi uguali a m_1, i successivi tre uguali a m_2 e così via (cfr. anche l'osservazione 17.29)

$$m\ddot{x} = f + f_V \ , \qquad x \in \mathbb{R}^{3N}. \tag{36.8}$$

In generale possiamo anche supporre che la matrice di massa m non sia necessariamente diagonale, purché sia una matrice simmetrica definita positiva e quindi invertibile (cfr. la definizione 17.31). Sottolineiamo – anche se confidiamo che non sia necessario – che, a livello di notazione, la matrice di massa m non va confusa con l'indice m usato per le relazioni (36.2) che definiscono i vincoli.

Definizione 36.9 (Superficie di vincolo) *Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi bilateri indipendenti, chiameremo* superficie di vincolo *al tempo t_0 la superficie $\Sigma = \Sigma(t_0)$ di codimensione M in $\mathbb{R}^{3N}$, individuata dalle M condizioni* (36.5) *all'istante t_0.*

Osservazione 36.10 Se i vincoli dipendono esplicitamente dal tempo la superficie di vincolo varia nel tempo. Si noti anche che tale superficie è una superficie nello spazio delle configurazioni $\mathbb{R}^{3N}$ e non nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ (a meno che non sia $N = 1$).

Osservazione 36.11 Se i vincoli (38.1) sono indipendenti e regolari (cfr. la definizione 36.6), la superficie di vincolo $\Sigma(t)$ è una superficie regolare – per il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 2). Inoltre, per ogni $x \in \Sigma$, i vettori $\nabla G_1(x,t), \ldots, \nabla G_M(x,t)$ sono ortogonali a $\Sigma(t)$ nel punto x (cfr. di nuovo l'esercizio 2). In particolare, per ogni $x_0 \in \Sigma(t)$ è possibile trovare un intorno U_0 di x_0 e una trasformazione invertibile Ξ in $C^2(\Omega, U_0)$, dove Ω è un insieme aperto convesso di $\mathbb{R}^{3N}$ contenente l'origine, tali che i punti di U_0 sono dati da $x = \Xi(\beta)$ con $\beta \in \Omega$. Diremo che (U_0, Ξ) è un *sistema di coordinate regolari* e chiameremo Ω la *base* del sistema di coordinate.

Definizione 36.12 (Sistema di coordinate regolari adattato) *Se in ogni istante t_0 la superficie di vincolo $\Sigma = \Sigma(t_0)$ è regolare, allora è sempre possibile scegliere il sistema di coordinate regolari (U_0, Ξ) in modo tale che i punti di $U_0 \cap \Sigma$ siano descritti dalle coordinate $\beta \in \Omega$ con*

$$\beta_1 = \ldots = \beta_M = 0, \tag{36.9}$$

se M è la codimensione della superficie. Il sistema di coordinate regolari (U_0, Ξ) si dice adattato *a Σ.*

Definizione 36.13 (Traiettoria virtuale per vincoli olonomi bilateri) *Dato un sistema meccanico sottoposto a vincoli olonomi bilateri* (36.5) *e un punto $x(t_0) \in \Sigma(t_0)$, definiremo* traiettoria virtuale *all'istante t_0 una curva di classe C^2*

$$\alpha \mapsto x(\alpha; t_0), \qquad -1 < \alpha < 1, \tag{36.10}$$

compatibile con le condizioni di vincolo e tale che $x(0; t_0) = x(t_0)$. Questo vuol dire che la parametrizzazione (36.10) *deve essere tale che la relazione*

$$G_m(x(\alpha; t_0), t_0) = 0\ , \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{36.11}$$

sia soddisfatta per ogni $\alpha \in (-1, 1)$.

Osservazione 36.14 Le traiettorie virtuali al tempo t_0 sono curve compatibili con i vincoli quali essi sono al tempo t_0. Se i vincoli dipendono dal tempo, esse non corrispondono in generale a traiettorie del sistema. Al contrario se i vincoli sono indipendenti dal tempo si può utilizzare il tempo t come parametro α e la traiettorie virtuali coincidono con i moti cinematicamente possibili per il sistema. Si noti in ogni caso che le traiettorie virtuali sono differenti dalle traiettorie che corrispondono ai moti effettivi del sistema anche nel caso indipendente dal tempo. Per esempio un punto materiale vincolato a rimanere su un piano e non soggetto ad altre forze si muoverà di moto rettilineo uniforme, laddove una traiettoria virtuale è una curva regolare qualsiasi sul piano.

Osservazione 36.15 In luogo di $|\alpha| < 1$ in (36.10) potremmo richiedere $\alpha \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ tale che $x(\alpha_0; t_0) = x(t_0)$ per qualche $\alpha_0 \in (a, b)$. La condizione data nella definizione 36.13 non è però restrittiva poiché è sempre possibile, tramite una trasformazione invertibile di classe C^2, ottenere una riparametrizzazione della curva ridefinendo il parametro α come $\alpha' \in (-1, 1)$ tale che $x(\alpha'; t_0) = x(t_0)$ per $\alpha' = 0$ (cfr. l'esercizio 4).

Osservazione 36.16 Se invece di un sistema meccanico in $\mathbb{R}^3$, consideriamo un sistema in $\mathbb{R}^2$ nulla cambia nella discussione successiva a meno di cambiare $3N$ con $2N$. Dal punto di vista matematico, un sistema piano si può sempre considerare come un sistema in $\mathbb{R}^3$ con il vincolo che per ogni punto materiale di coordinate $\boldsymbol{x}^{(i)}$ si debba avere $x_3^{(i)} = 0$.

§37 Sistemi rigidi

Ricordiamo (cfr. il §26) che, dato un sistema a n gradi di libertà, si chiama *spazio delle configurazioni* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in cui sono definiti gli n parametri che individuano i possibili stati del sistema (configurazioni). Introdurremo ora la nozione di sistema rigido, iniziando, nel §37.1, con i sistemi discreti, i.e. costituiti da un numero finito di punti. Vedremo poi, nel §37.2, come estendere la definizione al caso di sistemi continui.

§37.1 Sistemi rigidi discreti

Definizione 37.1 (Sistema rigido discreto) *Per* sistema rigido *(o* corpo rigido *o* solido*) si intende un sistema di punti materiali sottoposti alla condizione che le distanze tra ogni coppia di punti siano costanti. Se $\{\boldsymbol{q}_i\}_{i=1}^N$ è l'insieme delle cordinate dei punti, si ha*

$$|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j| = r_{ij}, \qquad \forall i, j = 1, \dots, N, \tag{37.1}$$

dove la matrice simmetrica di elementi r_{ij} è costante. Le relazioni (37.1) *prendono il nome di* vincoli rigidi *o* vincoli di rigidità.

Osservazione 37.2 Poiché $r_{ii} = 0$ e $r_{ij} = r_{ji}$, le (37.1) costituiscono $N(N-1)/2$ relazioni: esse non sono però indipendenti l'una dell'altra, come implica il seguente risultato.

Teorema 37.3 *Lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido è $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$, se nel sistema rigido ci sono almeno tre punti non collineari. Se tutti punti del sistema rigido sono collineari, lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2$, dove $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}| = 1\}$ è la la superficie della sfera di raggio unitario.*