dalle traiettorie che corrispondono ai moti effettivi del sistema anche nel caso indipendente dal tempo. Per esempio un punto materiale vincolato a rimanere su un piano e non soggetto ad altre forze si muoverà di moto rettilineo uniforme, laddove una traiettoria virtuale è una curva regolare qualsiasi sul piano.

Osservazione 36.15 In luogo di $|\alpha| < 1$ in (36.10) potremmo richiedere $\alpha \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ tale che $x(\alpha_0; t_0) = x(t_0)$ per qualche $\alpha_0 \in (a, b)$. La condizione data nella definizione 36.13 non è però restrittiva poiché è sempre possibile, tramite una trasformazione invertibile di classe C^2, ottenere una riparametrizzazione della curva ridefinendo il parametro α come $\alpha' \in (-1, 1)$ tale che $x(\alpha'; t_0) = x(t_0)$ per $\alpha' = 0$ (cfr. l'esercizio 4).

Osservazione 36.16 Se invece di un sistema meccanico in $\mathbb{R}^3$, consideriamo un sistema in $\mathbb{R}^2$ nulla cambia nella discussione successiva a meno di cambiare $3N$ con $2N$. Dal punto di vista matematico, un sistema piano si può sempre considerare come un sistema in $\mathbb{R}^3$ con il vincolo che per ogni punto materiale di coordinate $\boldsymbol{x}^{(i)}$ si debba avere $x_3^{(i)} = 0$.

§37 Sistemi rigidi

Ricordiamo (cfr. il §26) che, dato un sistema a n gradi di libertà, si chiama *spazio delle configurazioni* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ in cui sono definiti gli n parametri che individuano i possibili stati del sistema (configurazioni). Introdurremo ora la nozione di sistema rigido, iniziando, nel §37.1, con i sistemi discreti, i.e. costituiti da un numero finito di punti. Vedremo poi, nel §37.2, come estendere la definizione al caso di sistemi continui.

§37.1 Sistemi rigidi discreti

Definizione 37.1 (Sistema rigido discreto) *Per* sistema rigido *(o* corpo rigido *o* solido*) si intende un sistema di punti materiali sottoposti alla condizione che le distanze tra ogni coppia di punti siano costanti. Se $\{\boldsymbol{q}_i\}_{i=1}^N$ è l'insieme delle cordinate dei punti, si ha*

$$|\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_j| = r_{ij}, \qquad \forall i, j = 1, \ldots, N, \tag{37.1}$$

dove la matrice simmetrica di elementi r_{ij} è costante. Le relazioni (37.1) *prendono il nome di* vincoli rigidi *o* vincoli di rigidità.

Osservazione 37.2 Poiché $r_{ii} = 0$ e $r_{ij} = r_{ji}$, le (37.1) costituiscono $N(N-1)/2$ relazioni: esse non sono però indipendenti l'una dell'altra, come implica il seguente risultato.

Teorema 37.3 *Lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido è $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$, se nel sistema rigido ci sono almeno tre punti non collineari. Se tutti punti del sistema rigido sono collineari, lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2$, dove $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}| = 1\}$ è la la superficie della sfera di raggio unitario.*

Dimostrazione. Siano P_1, P_2, P_3 tre punti del sistema che non giacciono sulla stessa retta, e siano $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ lo loro coordinate. Consideriamo il sistema di riferimento con origine nel punto P_1 e costituito da una terna di versori ortogonali tale che il suo primo versore sia diretto come $\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1$ e il secondo dalla parte dove si trova $\boldsymbol{q}_3$, rispetto a $\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1$, nel piano contenente i tre punti (cfr. la figura 9.1). Dalle condizioni (37.1) segue che la posizione di tutti gli altri punti del sistema è determinata in modo univoco dalle posizioni di P_1, P_2, P_3 (l'eventuale ambiguità derivante dalla riflessione rispetto al piano individuato da $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ si risolve tenendo conto che le due configurazioni non sono ottenibili l'una dall'altra mediante una trasformazione rigida). Infatti, consideriamo un punto $\boldsymbol{q}_j$, con $j > 3$, per esempio $\boldsymbol{q}_4$. Poiché $|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_4| = r_{14}$, il punto $\boldsymbol{q}_4$ deve trovarsi sulla superficie della sfera di raggio r_{14} e centro in $\boldsymbol{q}_1$. Analogamente si vede che deve trovarsi sulla superficie della sfera di raggio r_{24} e centro in $\boldsymbol{q}_2$; l'intersezione delle due superfici sferiche determina una circonferenza $\mathcal{C}$ (eventualmente degenere, i.e. costituita da un solo punto). Poiché abbiamo anche il vincolo $|\boldsymbol{q}_3 - \boldsymbol{q}_4| = r_{34}$, il punto $\boldsymbol{q}_3$ deve anche trovarsi sulla superficie della sfera di raggio r_{34} e centro in $\boldsymbol{q}_3$: l'ulteriore vincolo determina due punti sulla circonferenza $\mathcal{C}$ (eventualmente coincidenti). Se tali punti sono distinti, le due configurazioni che a essi corrispondono non si possono ottenere l'una dall'altra mediante una trasformazione rigida.

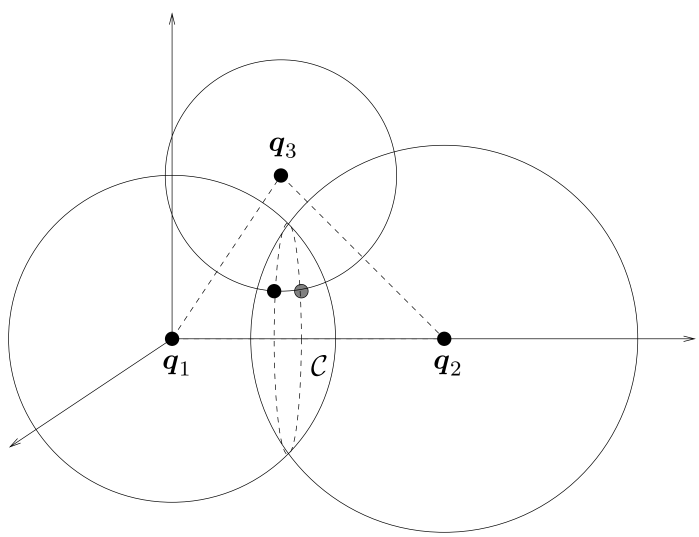

Figura 9.1: Discussione del teorema 37.3. Dati i tre punti $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ e $\boldsymbol{q}_3$, risultano geometricamente possibili due configurazioni per $\boldsymbol{q}_4$ (una segnata in nero e una segnata in grigio). Poiché esse non si possono ottenere l'una dall'altra attraverso una trasformazione rigida, solo una (per esempio quella segnata in nero) corrisponde a una configurazione possibile per il sistema.

Poiché $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ individuano una terna di riferimento e ogni terna si ottiene da una terna fissata mediante una trasformazione rigidia, ovvero mediante la composizione di una traslazione con una rotazione (cfr. l'osservazione 34.3), questo implica che lo spazio di tutte le terne di riferimento è isomorfo a $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{SO}(3)$.

Se i punti sono tutti collineari, è sufficiente determinare la direzione della retta $\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_1$. Tutti gli altri punti giaceranno lungo tale retta e saranno univocamente determinati dalle condizioni (37.1). Quindi lo spazio delle configurazioni è $\mathbb{R}^3 \times S^2$, dove $S^2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{x}| = 1\}$, dato che una direzione nello spazio tridimensionale è fissata individuando un punto sulla sfera di raggio unitario. ■

Definizione 37.4 (Sistema rigido con un punto fisso) *Per* sistema rigido con un punto fisso *si intende un sistema rigido con il vincolo supplementare che uno dei punti, per esempio P_1, abbia coordinate costanti.*

Corollario 37.5 *Lo spazio delle configurazioni di un sistema rigido con un punto fisso è lo spazio a tre dimensioni* $\mathrm{SO}(3)$*, se nel sistema rigido ci sono almeno tre punti non collineari. Se tutti punti del sistema rigido sono collineari, lo spazio delle configurazioni è dato da S^2.*

Dimostrazione. A meno di ridenominare i punti, possiamo supporre che il punto fisso sia P_1. Il risultato discende allora dal teorema 37.3, tenuto conto che l'origine della terna di riferimento è fissata dalla condizione che le coordinate $\boldsymbol{q}_1$ del punto P_1 siano fissate. Ne segue che tutti gli altri punti sono individuati fissando un punto della superficie della sfera di raggio unitario. ■

Definizione 37.6 (Centro di massa) *Dato un sistema rigido costituito da N punti di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, definiamo* centro di massa *(o* centro di inerzia*) del sistema rigido il punto O di coordinate*

$$\boldsymbol{q}_O := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{q}_i, \tag{37.2}$$

dove m_i è la massa del punto in $\boldsymbol{q}_i$ e $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ è la massa del sistema rigido.

Definizione 37.7 (Sistema di riferimento solidale) *Dato un sistema rigido costituito da N punti $P_1, \ldots, P_N$ in $\mathbb{R}^3$, diremo che un sistema di riferimento K è solidale con il sistema rigido se il sistema rigido è in quiete in K, i.e. se, indicando con $\boldsymbol{Q}_i$ la coordinata di P_i in K, si ha $\dot{\boldsymbol{Q}}_i = \boldsymbol{0}\ \forall i = 1, \ldots, N$.*

Corollario 37.8 *Per individuare la configurazione di un sistema rigido, è sufficiente descrivere il moto rigido di un sistema di riferimento mobile K, solidale con il sistema rigido, rispetto a un sistema di riferimento fisso κ. Se il sistema rigido ha un punto fisso il moto si riduce a una rotazione.*

Dimostrazione. Segue dal teorema 37.3 e dal corollario 37.5. ■

§37.2 Sistemi rigidi continui

Un sistema rigido continuo si può immaginare come una coppia $(\mathcal{C}, \rho)$, dove $\mathcal{C}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^3$ e $\rho \colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ una funzione non negativa che prende il nome di *densità di massa* (o *densità* tout court). Si può considerare un sistema rigido continuo come limite per $\Delta \boldsymbol{Q} \to 0$ di una successione di sistemi rigidi discreti formati da un numero finito di punti $\boldsymbol{Q}_i$, di massa $\rho(\boldsymbol{Q}_i)\Delta\boldsymbol{Q}$. I due integrali

$$V := \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{Q}, \tag{37.3a}$$

$$m := \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \rho(\boldsymbol{Q}) \tag{37.3b}$$

rappresentano, rispettivamente, il volume e la massa del sistema rigido continuo; se il sistema è *omogeneo*, allora la densità è costante, i.e. $\rho(\boldsymbol{Q}) = \rho := m/V$. Esattamente come nel caso di sistemi rigidi discreti, un sistema di riferimento K in cui l'insieme $\mathcal{C}$ è in quiete si dice *solidale* con il sistema rigido e il moto del sistema rigido continuo si descrive seguendo il moto di un sistema riferimento solidale con esso. Tutti i risultati validi per i sistemi discreti, che studieremo nel corso del presente capitolo, possono essere estesi al caso dei sistemi continui. In particolare il centro di massa di un sistema continuo è dato da (cfr. l'esercizio 5)

$$\boldsymbol{q}_O = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\, \rho(\boldsymbol{Q})\, \boldsymbol{Q}, \tag{37.4}$$

dove $\rho(\boldsymbol{Q})$ è la densità di massa e m è la massa del sistema rigido data in (37.3b).

Se un sistema rigido continuo ha una dimensione trascurabile rispetto alle altre due si può schematizzare come un sistema bidimensionale. Identificando con $Q_3 = 0$ il piano in cui giace il sistema rigido, si definisce allora una *densità superficiale di massa* $\sigma(\boldsymbol{Q})$, dove $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, 0)$, con $(Q_1, Q_2) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$. Se il sistema è omogeneo allora $\sigma(\boldsymbol{Q}) = \sigma := m/A$, dove A è l'area del sistema $\mathcal{C}$. Diremo in tal caso che il sistema rigido è *bidimensionale* o *piano*.

Infine, se un sistema rigido continuo $\mathcal{C}$ si sviluppa essenzialmente in una sola dimensione (per esempio un'asta sottile), identificando con $Q_2 = Q_3 = 0$ la direzione che esso individua, si introduce una densità lineare $\lambda(\boldsymbol{Q})$, dove $\boldsymbol{Q} = (Q_1, 0, 0)$, con $Q_1 \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$; se il sistema è omogeneo allora $\lambda(\boldsymbol{Q}) = \lambda := m/\ell$, dove ℓ è la lunghezza del sistema $\mathcal{C}$. Diremo in tal caso che il sistema rigido è *unidimensionale* o *lineare*.

Come esempi di sistemi rigidi continui, nel seguito, considereremo esplicitamente il caso di solidi geometrici, quali cilindri, sfere e coni (solidi tridimensionali), ovvero dischi, lastre e anelli spessi (solidi bidimensionali), ovvero aste e anelli sottili (solid unidimensionali). Ovviamente nulla vieta, in principio, di immaginare sistemi rigidi continui più complicati, ma sicuramente più difficili da trattare dal punto di vista matematico.