## §40 Caratteristiche dinamiche dei sistemi rigidi

Nel presente paragrafo continueremo l'analisi iniziata nel paragrafo precedente sui sistemi rigidi, analizzandone le proprietà dinamiche. Vedremo come le forze vincolari che agiscono su un sistema rigido incidono sulle sue equazioni del moto. Nel prossimo capitolo ne studieremo le soluzioni, nel caso in cui il sistema rigido, con o senza un punto fisso, non sia soggetto a forze attive; anche se molto semplice tale caso è già interessante del punto di vista sia fisico sia matematico.

Ovviamente sarebbe interessante anche studiare casi più difficili, in cui il sistema rigido sia soggetto a forze esterne, quali la forza di gravità. In generale le equazioni del moto non sono più risolubili, a meno che non si impongano ulteriori condizioni. Tuttavia noi non consideremo esplicitamente tali casi, poiché la loro discussione risulta particolarmente agevole nell'ambito del formalismo lagrangiano, che verrà studiato a partire dal capitolo 11. Torneremo sull'argomento nel capitolo 15.

Dato un sistema rigido costituito di $N$ punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, se $\boldsymbol{f}_i$ denota la forza che agisce sul punto $P_i$ (data dalla somma della forza attiva applicata e della reazione vincolare), abbiamo

$$m_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i = \boldsymbol{f}_i, \tag{40.1}$$

e, sommando sui punti,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\boldsymbol{q}}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_{\mathrm{TOT}}, \tag{40.2}$$

dove $\boldsymbol{f}_{\mathrm{TOT}}$ indica la risultante di tutte le forze che agiscono sul sistema.

Come detto sopra la forza $\boldsymbol{f}_{\mathrm{TOT}}$ è dovuta sia alle forze attive applicate sui punti materiali che costituiscono il sistema rigido ("forze esterne") sia alle reazioni vincolari ("forze interne"). Mentre le prime sono quantità note (determinate volta per volta dal problema che si sta studiando), in generale nulla possiamo dire delle reazioni vincolari che dipendono fortemente dalla struttura interna del sistema rigido, non necessariamente accessibile agli esperimenti. Sarebbe auspicabile avere delle equazioni in cui non compaiano che le forze attive applicate. Questo sarà possibile, come vedremo nel §42, se si postula il principio di d'Alembert che verrà enunciato nel §41.

**Teorema 40.1** *Dato un sistema rigido costituito da $N$ punti $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, la derivata temporale della sua quantità di moto è*

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{TOT}}, \tag{40.3}$$

*dove $\boldsymbol{f}_{\mathrm{TOT}}$ è la risultante* (40.2) *di tutte le forze.*

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di quantità di moto,

$$\boldsymbol{p} := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{q}}_i, \tag{40.4}$$

e dalla (40.2). ■

**Teorema 40.2** *Dato un sistema rigido costituito da $N$ punti $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, \ldots, m_N$ e di coordinate $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N$, la derivata temporale del suo momento angolare (rispetto a un punto $O$) è legata al risultante dei momenti delle forze totali che agiscono sul sistema (rispetto allo stesso punto) dalla relazione*

$$\dot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{v}_O \wedge \boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{TOT}}, \tag{40.5}$$

*dove $\boldsymbol{v}_O$ è la velocità del punto $O$ e*

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{TOT}} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \wedge \boldsymbol{f}_i \tag{40.6}$$

*è il risultante dei momenti di tutte le forze che agiscono sul sistema rispetto al punto $O$.*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di momento angolare si ha

$$\boldsymbol{l} := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{l}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \wedge \dot{\boldsymbol{q}}_i, \tag{40.7}$$

così che, derivando la (40.7) rispetto al tempo, otteniamo

$$\dot{\boldsymbol{l}} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\boldsymbol{q}_i - \boldsymbol{q}_O) \wedge \ddot{\boldsymbol{q}}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{q}}_O \wedge \dot{\boldsymbol{q}}_i,$$

dove il primo termine nel membro di destra non è altro che la somma dei momenti delle forze (cfr. la (40.1)), mentre il secondo è uguale a $-\boldsymbol{v}_O \wedge \boldsymbol{p}$ se $\boldsymbol{v}_O = \dot{\boldsymbol{q}}_O$ e $\boldsymbol{p}$ è la quantità di moto (cfr. la (40.4)). ■

**Corollario 40.3** *Sotto le stesse condizioni del teorema 40.2, se $O$ è il centro di massa del sistema di punti materiali o è fisso, la derivata temporale del momento angolare è data da*

$$\dot{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{TOT}}, \tag{40.8}$$

*dove $\boldsymbol{n}_{\mathrm{TOT}}$ è il risultante (40.6) dei momenti di tutte le forze.*

*Dimostrazione.* Segue dal teorema 40.2 notando che $\boldsymbol{v}_O$ è parallelo a $\boldsymbol{p}$ se $O$ è il centro di massa e $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{0}$ se $O$ è fisso. ■