

§41 Principio di d'Alembert

Nel §36 abbiamo definito le traiettorie virtuali solo per vincoli olonomi bilateri. Vedremo, nel §43, come definire le traiettorie virtuali nel caso di vincoli anolonomi bilateri, della forma (36.3), purché essi siano lineari nelle velocità (cfr. la (43.1)). Intenderemo che il principio 41.1 vale anche per tali vincoli (43.1).

Principio 41.1 (PRINCIPIO DI D'ALEMBERT (O DEI LAVORI VIRTUALI)) *Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli, le forze vincolari non compiono lavoro lungo le traiettorie virtuali.*

Definizione 41.2 (VINCOLI PERFETTI) *Chiameremo vincoli perfetti (o vincoli ideali) i vincoli per i quali valga il principio di d'Alembert.*

Lemma 41.3 *Dato un sistema meccanico soggetto a vincoli olonomi bilateri, che soddisfi il principio di d'Alembert, se $\Sigma(t_0)$ è la superficie di vincolo e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare in \mathbb{R}^{3N} , allora si deve avere*

$$\langle f_V(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0), \xi \rangle = 0. \quad (41.1)$$

per ogni vettore ξ tangente in $x(t_0)$ alla superficie di vincolo $\Sigma(t_0)$.

Dimostrazione. Consideriamo una traiettoria virtuale (36.10). Allora per ogni $\alpha_0 \in (0, 1)$, per il principio di d'Alembert e per definizione di lavoro (cfr. l'esercizio 7), si deve avere

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left\langle f_V(x, \dot{x}, t_0), \frac{dx}{d\alpha} \right\rangle d\alpha = 0, \quad (41.2)$$

dove $x = x(\alpha; t_0)$ e il prodotto scalare è in \mathbb{R}^{3N} .

Da qui segue immediatamente la (41.1). Supponiamo infatti per assurdo che la (41.1) non sia verificata per qualche istante t_0 e per qualche vettore ξ ; possiamo supporre per concretezza che il membro di sinistra di (41.1) sia strettamente positivo. Allora considerando una qualsiasi traiettoria virtuale che arrivi in $x(t_0)$ lungo la direzione individuata dal vettore ξ , per esempio tale che $[dx(\alpha; t_0)/d\alpha](0, t_0) = \xi$, si deve avere, per $\alpha \rightarrow 0$,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\langle f_V(x, \dot{x}, t_0), \frac{dx}{d\alpha} \right\rangle = \langle f_V(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0), \xi \rangle, \quad (41.3)$$

che è positiva per ipotesi. Per continuità esiste un intorno $(-\alpha_0, \alpha_0)$ di $\alpha = 0$ in cui il prodotto scalare in (41.2) rimane strettamente positivo. L'integrale in (41.2) è perciò strettamente positivo. Questo contraddice la condizione (41.2) postulata dal principio di d'Alembert. ■

Osservazione 41.4 Il principio di d'Alembert ammette una semplice interpretazione geometrica nel caso dei vincoli olonomi bilateri che stiamo considerando. Infatti la condizione (41.1) implica che le forze vincolari sono in ogni istante ortogonali alla superficie di vincolo. Se $N = 1$ allora questo accade non solo nello spazio delle configurazioni ma anche nello spazio euclideo, poiché i due coincidono per $N = 1$ (cfr. l'osservazione 36.10).

Proposizione 41.5 *Nel caso di vincoli olonomi bilateri, la forza vincolare f_V che agisce nel punto $x \in \Sigma(t_0)$ si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $\nabla G_m(x, t_0)$, i.e. esistono m funzioni*

$$\lambda_m(t) = \tilde{\lambda}_m(x(t), \dot{x}(t), t), \quad m = 1, \dots, M, \quad (41.4)$$

tali che

$$f_V(x(t), \dot{x}(t), t) = \sum_{m=1}^M \lambda_m(t) \nabla G_m(x(t), t), \quad (41.5)$$

se $t \mapsto x(t)$ rappresenta il moto del sistema vincolato con dati iniziali $(x(0), \dot{x}(0))$.

Dimostrazione. La (41.5) segue immediatamente dal fatto che, per ogni $x \in \Sigma(t_0)$, il vettore $f_V(x)$ deve essere ortogonale alla superficie di vincolo in x , e i vettori $\nabla G_1(x, t), \dots, \nabla G_M(x, t)$ costituiscono una base per lo spazio ortogonale a $\Sigma(t_0)$ in x , essendo M vettori linearmente indipendenti ortogonali a una superficie di dimensione $3N - M$ (cfr. l'osservazione 36.11 e la definizione di base a pag. 3).

Benché le funzioni G che esprimono i vincoli olonomi dipendano solo dalle posizioni, le forze vincolari – e quindi le funzioni (41.4) – in generale dipendono anche dalle velocità. Se il vincolo dipende dal tempo, le funzioni in (41.4) dipenderanno esplicitamente dal tempo. ■

Definizione 41.6 (MULTIPLICATORI DI LAGRANGE) *Le funzioni (41.4), che rappresentano i coefficienti della decomposizione delle forze vincolari nella base $\{\nabla G_1(x, t), \dots, \nabla G_M(x, t)\}$ dello spazio ortogonale alla superficie di vincolo, prendono il nome di moltiplicatori di Lagrange.*

Osservazione 41.7 Le forze vincolari, analogamente alle forze attive, sono vettori applicati: la forza vincolare $\mathbf{f}_V^{(i)}$ che agisce sul punto P_i individuato dal vettore $\mathbf{x}^{(i)}$ è applicato in $\mathbf{x}^{(i)}$. Tuttavia in generale la forza vincolare f_V dipende non solo dalle coordinate dei punti, ma anche dalle loro velocità. Questo spiega la notazione (41.4) usata per i moltiplicatori di Lagrange, dove se ne è sottolineata la dipendenza sia dalle posizioni che dalle velocità, oltre che, eventualmente, dal tempo. La dipendenza dei moltiplicatori di Lagrange da posizioni e velocità si può ricavare esplicitamente (cfr. l'esercizio 11). In particolare, se il vincolo è indipendente dal tempo, i moltiplicatori di Lagrange dipendono da $(x(t), \dot{x}(t))$, ma non esplicitamente dal tempo.

Osservazione 41.8 Le equazioni (41.5) permettono di esprimere le forze vincolari in termini delle M incognite λ , dove $\lambda = \lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_M(t))$. Se, nella (36.8), esprimiamo le forze vincolari f_V utilizzando le (41.5), otteniamo un sistema di $3N + M$ equazioni (in parte differenziali e in parte algebriche) nelle $3N + M$ incognite x e λ .

Consideriamo il sistema di equazioni dato dalle (36.7), (36.5) e (41.5), che qui riscriviamo per comodità,

$$G_m(x, t) = 0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (41.6a)$$

$$m_i \ddot{x}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} + \mathbf{f}_V^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (41.6b)$$

$$f_V(x(t), \dot{x}(t), t) = \sum_{m=1}^M \lambda_m(t) \nabla G_m(x(t), t), \quad (41.6c)$$

e poniamoci il problema di dimostrare esistenza e unicità delle soluzioni. In principio un modo di procedere può essere il seguente. Fissato un dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0))$ e supponendo che le forze applicate siano sufficientemente regolari, per ogni scelta di $\lambda: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^M$ di classe C^1 , con $T > 0$, il sistema dato dalle (41.6b) e (41.6c) ammette un'unica soluzione $t \mapsto x_\lambda(t)$ dipendente dalla funzione λ che è stata scelta (oltre, ovviamente, che dal dato iniziale). Questo segue semplicemente dal teorema di esistenza e unicità (teorema 11.29). In corrispondenza di tale soluzione si ha un'applicazione $\lambda \mapsto \Phi(\lambda)$, data da

$$\Phi_m(\lambda(t)) = G_m(x_\lambda(t), t), \quad m = 1, \dots, M. \quad (41.7)$$

Se l'equazione $\Phi_m(\lambda(t)) = 0$ ha soluzione unica $\lambda_0(t)$, allora l'unica soluzione di (41.6b) e (41.6c) che soddisfi le relazioni di vincolo (41.6a) è quella che si ottiene con la scelta $\lambda = \lambda_0$, i.e. introducendo λ_0 in (41.6c), sostituendo le (41.6c) in (41.6b) e quindi risolvendo (41.6b). Si noti che la funzione $\lambda_0(t)$ dipende dai dati iniziali, e poiché ogni istante t può essere scelto come istante iniziale, segue che la funzione $\lambda_0(t)$ dipende dalle posizioni e dalle velocità, in accordo con la dimostrazione della proposizione 41.5. Il problema è quindi ricondotto a quello di verificare che l'equazione $\Phi_m(\lambda(t)) = 0$ abbia una soluzione unica.

Alternativamente, si può seguire il seguente procedimento, più conveniente dal punto di vista pratico. Poiché il moto si svolge sulla superficie di vincolo, si lavora direttamente nel sistema di coordinate regolari adattato a tale superficie, così che si eliminano le forze vincolari dalle equazioni del moto (cfr. anche l'osservazione 53.6 del capitolo 11); una volta risolte le equazioni in tali coordinate si possono calcolare le reazioni vincolari attraverso le (36.8), esprimendo x in termini delle coordinate del sistema regolari adattato alla superficie (la cui evoluzione è nota) e scrivendo $f_V = m\ddot{x} - f(x)$. Se i vincoli sono indipendenti, individuata la forza vincolare f_V , dalla (41.6c) si determina la funzione $\lambda_0(t) = (\lambda_{01}(t), \dots, \lambda_{0m}(t))$ in modo univoco (cfr. l'esercizio 13).

Infine un terzo metodo consiste nell'approssimare l'azione del vincolo con un'energia potenziale di grande intensità λ (da non confondersi con i moltiplicatori di Lagrange), che tende a confinare il moto su una superficie data (corrispondente appunto alla superficie di vincolo), risolvere le equazioni del moto a λ finito – utilizzando il teorema 11.29 di esistenza e unicità per sistemi dinamici regolari – e quindi passare al limite $\lambda \rightarrow +\infty$, mostrando che tale limite è ben definito (cfr. l'inizio del §36). Resta anche in questo caso il problema di determinare poi le forze vincolari, che si può risolvere come discusso precedentemente.

Osservazione 41.9 Se i vincoli dipendono dal tempo, in generale le forze di vincolo compiono lavoro lungo le traiettorie reali del sistema – poiché esse non coincidono con quelle virtuali (cfr. l'osservazione 36.14). Nel caso di vincoli indipendenti dal tempo, il principio di d'Alembert si può formulare invece dicendo che le forze vincolari non compiono lavoro.

Esempio 41.10 Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2 di massa, rispettivamente, m_1 e m_2 , che interagiscano attraverso una forza che soddisfi il terzo principio della dinamica, siano soggette alla gravità e soddisfino infine il vincolo di restare su un piano orizzontale, la cui quota sia tuttavia una funzione regolare del tempo $a(t)$ (cfr. la figura 9.9).

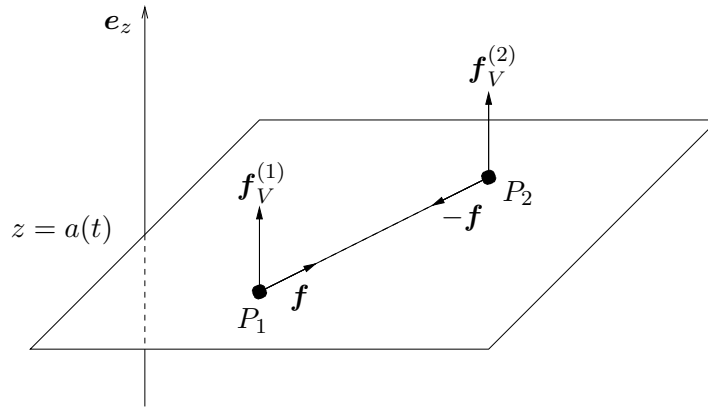


Figura 9.9: Discussione dell'esempio 41.10.

Se $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{x}^{(2)} = (x_2, y_2, z_2)$ sono le coordinate dei due punti, possiamo allora esprimere i vincoli come

$$G_1(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) := z_1 - a(t) = 0, \quad G_2(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, t) := z_2 - a(t) = 0, \quad (41.8)$$

Poiché inoltre $\nabla G_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ e $\nabla G_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ i due vincoli sono indipendenti, e poiché $\nabla G_1 \neq 0$ e $\nabla G_2 \neq 0$ essi sono regolari. Possiamo perciò applicare i risultati dei paragrafi precedenti. Il sistema è descritto dalle equazioni

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{f} - m_1 \mathbf{g} + \mathbf{f}_V^{(1)}, \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}^{(2)} = -\mathbf{f} - m_2 \mathbf{g} + \mathbf{f}_V^{(2)}, \quad (41.9)$$

dove $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ e si è tenuto conto che le forze di interazione soddisfano il terzo principio della dinamica. Inoltre le forze vincolari devono essere ortogonali al piano (cfr. il lemma 41.3), così che

$$m_1 \ddot{x}_1 = f_x, \quad m_1 \ddot{y}_1 = f_y, \quad m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g + f_V^{(1)}, \quad (41.10a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -f_x, \quad m_2 \ddot{y}_2 = -f_y, \quad m_2 \ddot{z}_2 = -m_2 g + f_V^{(2)}, \quad (41.10b)$$

avendo tenuto conto che $\mathbf{f} = (f_x, f_y, 0)$ e $\mathbf{f}_V^{(i)} = (0, 0, f_V^{(i)})$ per $i = 1, 2$. Per la (41.8) si ha

$$f_V^{(1)} = m_1 (\ddot{a}(t) + g), \quad f_V^{(2)} = m_2 (\ddot{a}(t) + g). \quad (41.11)$$

Scrivendo le forze vincolari come combinazioni lineari dei gradienti delle funzioni (41.8) che definiscono il vincolo, conformemente alla (41.5), si ottiene $\lambda_1(t) = m_1(\ddot{a}(t) + g)$ e $\lambda_2(t) = m_2(\ddot{a}(t) + g)$. Il lavoro compiuto dalle forze vincolari lungo una traiettoria qualsiasi del sistema, nell'intervallo di tempo $[0, T]$, è dato da

$$\begin{aligned} \int_0^T [\mathbf{f}_V^{(1)} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(1)} + \mathbf{f}_V^{(2)} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{(2)}] dt &= (m_1 + m_2) \int_0^T (\ddot{a}(t) \dot{a}(t) + g \dot{a}(t)) dt \\ &= (m_1 + m_2) \left[\frac{1}{2} (\dot{a}^2(T) - \dot{a}^2(0)) + g (a(T) - a(0)) \right], \end{aligned} \quad (41.12)$$

indipendentemente dalla traiettoria, i.e. indipendentemente da come i punti si muovano sul piano orizzontale. Tale lavoro non è altro che la variazione di energia del sistema dal tempo 0 al tempo T . In particolare se $a(t) = a = \text{costante}$, il lavoro (41.12) è nullo. Si noti che se i vincoli non dipendono dal tempo, l'energia totale del sistema, i.e. la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale corrispondente alle forze esterne agenti sul sistema, è una costante del moto: in tal caso il lavoro compiuto dalle forze vincolari è nullo (per l'osservazione 41.9).

§42 Principio di d'Alembert e vincoli rigidi

Abbiamo definito nel §37 i sistemi rigidi come quei sistemi meccanici costituiti da N punti materiali soggetti ai vincoli che le mutue distanze dei punti siano costanti (vincoli rigidi). Vogliamo mostrare (cfr. il teorema 42.4 più avanti) che se tale vincolo è un vincolo perfetto, i.e. se è un vincolo per cui vale il principio di d'Alembert, allora segue che per i sistemi rigidi rimangono valide le equazioni della dinamica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}, \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{n}, \quad (42.1)$$

se \mathbf{p} e \mathbf{l} rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema (rispetto a un punto dato), e, analogamente, \mathbf{f} è la risultante delle forze attive applicate al sistema e \mathbf{n} è il risultante dei loro momenti (rispetto allo stesso punto). Le (42.1) sono note come *equazioni cardinali della dinamica per sistemi rigidi*. Come si vede sono una semplice estensione delle leggi che valgono per punti materiali non vincolati; concettualmente non si tratta però un'estensione banale, dal momento che necessita di un principio (il principio di d'Alembert) che ne giustifichi la correttezza.

Imponiamo il vincolo che, dati N punti materiali, si abbia

$$|\mathbf{x}^{(i)}(t) - \mathbf{x}^{(j)}(t)| = r_{ij}(t), \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (42.2)$$