avendo tenuto conto che $\boldsymbol{f} = (f_x, f_y, 0)$ e $\boldsymbol{f}_V^{(i)} = (0, 0, f_V^{(i)})$ per $i = 1, 2$. Per la (41.8) si ha

$$f_V^{(1)} = m_1 \left(\ddot{a}(t) + g\right), \qquad f_V^{(2)} = m_2 \left(\ddot{a}(t) + g\right). \tag{41.11}$$

Scrivendo le forze vincolari come combinazioni lineari dei gradienti delle funzioni (41.8) che definiscono il vincolo, conformemente alla (41.5), si ottiene $\lambda_1(t) = m_1(\ddot{a}(t) + g)$ e $\lambda_2(t) = m_2(\ddot{a}(t)+g)$. Il lavoro compiuto dalle forze vincolari lungo una traiettoria qualsiasi del sistema, nell'intervallo di tempo $[0, T]$, è dato da

$$\begin{aligned} \int_0^T \left[\boldsymbol{f}_V^{(1)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{(1)} + \boldsymbol{f}_V^{(2)} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{(2)}\right] \mathrm{d}t \;&=\; (m_1 + m_2) \int_0^T \left(\ddot{a}(t)\, \dot{a}(t) + g\, \dot{a}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &=\; (m_1 + m_2) \left[\frac{1}{2} \left(\dot{a}^2(T) - \dot{a}^2(0)\right) + g \left(a(T) - a(0)\right)\right], \end{aligned} \tag{41.12}$$

indipendentemente dalla traiettoria, i.e. indipendentemente da come i punti si muovano sul piano orizzontale. Tale lavoro non è altro che la variazione di energia del sistema dal tempo 0 al tempo T. In particolare se $a(t) = a =$ costante, il lavoro (41.12) è nullo. Si noti che se i vincoli non dipendono dal tempo, l'energia totale del sistema, i.e. la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale corrispondente alle forze esterne agenti sul sistema, è una costante del moto: in tal caso il lavoro compiuto dalle forze vincolari è nullo (per l'osservazione 41.9).

§42 Principio di d'Alembert e vincoli rigidi

Abbiamo definito nel §37 i sistemi rigidi come quei sistemi meccanici costituiti da N punti materiali soggetti ai vincoli che le mutue distanze dei punti siano costanti (vincoli rigidi). Vogliamo mostrare (cfr. il teorema 42.4 più avanti) che se tale vincolo è un vincolo perfetto, i.e. se è un vincolo per cui vale il principio di d'Alembert, allora segue che per i sistemi rigidi rimangono valide le equazioni della dinamica

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{n}, \tag{42.1}$$

se $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{l}$ rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema (rispetto a un punto dato), e, analogamente, $\boldsymbol{f}$ è la risultante delle forze attive applicate al sistema e $\boldsymbol{n}$ è il risultante dei loro momenti (rispetto allo stesso punto). Le (42.1) sono note come *equazioni cardinali della dinamica per sistemi rigidi*. Come si vede sono una semplice estensione delle leggi che valgono per punti materiali non vincolati; concettualmente non si tratta però un'estensione banale, dal momento che necessita di un principio (il principio di d'Alembert) che ne giustifichi la correttezza.

Imponiamo il vincolo che, dati N punti materiali, si abbia

$$|\boldsymbol{x}^{(i)}(t) - \boldsymbol{x}^{(j)}(t)| = r_{ij}(t), \qquad 1 \leq i < j \leq N, \tag{42.2}$$

dove $r_{ij}(t)$ indipendente dal tempo sarà un caso particolare e corrisponderà al caso di sistemi rigidi (cfr. la (37.1)). Se $\alpha \mapsto x(\alpha; t_0)$ è una traiettoria virtuale all'istante t_0, si ha

$$|\boldsymbol{x}^{(i)}(\alpha; t_0) - \boldsymbol{x}^{(j)}(\alpha; t_0)| = r_{ij}(t_0), \tag{42.3}$$

per la definizione 36.13. Per il principio di d'Alembert per ogni $\alpha_0 \in (0, 1)$ si deve avere

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \boldsymbol{f}_V^{(i)} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(i)}}{\mathrm{d}\alpha} \, \mathrm{d}\alpha = 0, \tag{42.4}$$

dove il prodotto scalare è scritto in $\mathbb{R}^3$.

Lemma 42.1 *Dato un sistema meccanico di N punti materiali non collineari soggetti ai vincoli* (42.2)*, le traiettorie virtuali possono essere parametrizzate con 6 parametri.*

Dimostrazione. I vincoli (42.2), nel caso in cui i punti non siano tutti collineari, definiscono una superficie di dimensione 6, per il teorema 37.3. ■

Lemma 42.2 *Dato un sistema meccanico di N punti materiali non collineari soggetti ai vincoli* (42.2)*, il principio de d'Alembert implica che le forze vincolari hanno risultante nulla.*

Dimostrazione. Tre dei 6 parametri in termini dei quali si possono descrivere le traiettorie virtuali, come enunciato nel lemma 42.1, possono essere fatti corrispondere alle traslazioni rigide, che ovviamente preservano la struttura dei vincoli. Dalla (42.4) segue che le forze vincolari devono soddisfare le relazioni (cfr. l'esercizio 14)

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}_V^{(i)} = \mathbf{0}, \tag{42.5}$$

sottointendendo, al solito, che la somma dei vettori deve essere effettuata dopo averli applicati, per trasporto paralello, allo stesso punto (cfr. l'osservazione 17.29). Da qui segue l'asserto. ■

Lemma 42.3 *Dato un sistema meccanico di N punti materiali non collineari soggetti ai vincoli* (42.2)*, il principio di d'Alembert implica che le forze vincolari hanno momento risultante nullo.*

Dimostrazione. I restanti tre parametri delle traiettorie virtuali possono essere scelti corrispondenti alle rotazioni intorno a tre assi ortogonali (arbitrari) passanti per un punto di $\mathbb{R}^3$, per esempio intorno ai tre assi cartesiani che costituiscono il sistema di riferimento con centro nell'origine al tempo t_0. Le rotazioni intorno all'asse $\boldsymbol{e}_x$ all'istante t_0 sono date dalla matrice

$$S^1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{42.6}$$

(cfr. il lemma 34.17 e l'esercizio 3 del capitolo 8) e analoghe formule valgono per le rotazioni intorno agli altri due assi cartesiani. Utilizzando la (42.4) si ottiene (cfr. l'esercizio 15)

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(i)} \wedge \boldsymbol{f}_V^{(i)} = \mathbf{0} \tag{42.7}$$

per ogni t_0. ■

Teorema 42.4 *Per un sistema rigido sono soddisfatte le leggi cardinali della dinamica* (42.1), *dove $\boldsymbol{f}$ indica la risultante delle forze attive applicate e $\boldsymbol{n}$ il risultante dei loro momenti (rispetto a un punto dato).*

Dimostrazione. Il sistema rigido è definito dalle condizioni di vincolo (42.2): tali condizioni implicano che deve essere nulla la risultante delle forze vincolari (per il lemma 42.2) e deve essere nullo il risultante dei loro momenti (per il lemma 42.3).

In generale possiamo scrivere, in virtù delle (40.3) e (40.8),

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{TOT}} := \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_V, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{TOT}} = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}_V, \tag{42.8}$$

dove $\boldsymbol{f}_V$ è la somma delle forze vincolari, come definita nel membro di sinistra della (42.5) e $\boldsymbol{n}_V$ è la somma dei loro momenti, come definita dal membro di sinistra della (42.7). Usando il fatto che $\boldsymbol{f}_V = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{n}_V = \mathbf{0}$, si ottengono le (42.1). ■

Osservazione 42.5 Se consideriamo un sistema di punti materiali interagenti tra loro, l'annullarsi della risultante delle forze è conseguenza del terzo principio della dinamica e del fatto che le forze sono additive. Nel caso di vincoli rigidi, le forze di interazione tra i punti non sono in generale additive: non è possibile scrivere in modo non ambiguo la forza vincolare che si esercita sul punto P_i come somma di $N-1$ forze $F_V^{(i,j)}$ dipendenti ciascuna solo dai punti P_i e P_j. Questo segue dal fatto che non è possibile costruire traiettorie virtuali in cui vari solo la posizione di due dei punti materiali. Se i vincoli (42.2) sono scritti nella forma

$$G_{i,j}(x,t) = |\boldsymbol{x}^{(i)}(t) - \boldsymbol{x}^{(j)}(t)| - r_{ij} = 0, \tag{42.9}$$

possiamo scrivere le forze vincolari come

$$f_V(x,\dot{x},t) = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij}(t) \nabla G_{i,j}(x,t), \tag{42.10}$$

ma, per $N > 2$, i vettori $\nabla G_{i,j}(x,t)$ non sono linearmente indipendenti e i coefficienti $\lambda_{ij}(t)$ non possono essere determinati univocamente, quindi l'additività insita in (42.10) è solo formale.

Corollario 42.6 *Il centro di massa di un sistema rigido che si muova di moto libero compie un moto rettilineo uniforme.*

Dimostrazione. Dalla prima delle (42.1) segue che se $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ si ha $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{0}$ e, poiché $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_O$, se $\boldsymbol{v}_O$ è la velocità del centro di massa O e m è la somma delle masse dei punti costituenti il sistema, segue l'asserto. ∎

Tutti i risultati precedenti si applicano al caso di un sistema rigido che non abbia altri vincoli che quelli di rigidità, espressi dalle condizioni (42.2). Se il sistema rigido ha anche un punto fisso allora le sole traiettorie virtuali possibili sono le rotazioni intorno al punto fisso. In tal caso si applica il lemma 42.3, ma non il lemma 42.2, e possiamo concludere che, in tal caso, si annulla il momento risultante delle forze vincolari, ma non la risultante delle forze stesse. In altre parole le equazioni (42.8), nel caso di un sistema rigido con un punto fisso, si semplificano in

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}_V, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{n}, \tag{42.11}$$

dove $\boldsymbol{f}_V$ deriva dalla forza vincolare che si applica nel punto fisso.

Corollario 42.7 *Un sistema rigido libero ruota intorno al suo centro di massa O, come se questo fosse vincolato a un punto fisso O.*

Dimostrazione. Basta considerare il sistema di riferimento inerziale in cui il centro di massa è fisso (che esiste per il teorema 40.2). In particolare, in tale sistema di riferimento, si ha, per ogni punto, $\boldsymbol{l}_i = m_i \boldsymbol{q}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{q}_i)$ in (40.7), poiché $\boldsymbol{q}_O = \boldsymbol{0}$ e $\dot{\boldsymbol{q}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{q}_i$. ∎

Teorema 42.8 *Nel problema del moto di un sistema rigido intorno a un punto fisso O, in assenza di forze esterne, si hanno quattro integrali primi: le tre componenti del vettore momento angolare $\boldsymbol{l}$ e l'energia E.*

Dimostrazione. Si può verificare per calcolo esplicito a partire dalle definizioni, tenendo conto che il sistema è conservativo e il risultante dei momenti delle forze esterne è nullo. Infatti la (42.10) dà $\dot{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{0}$ e, se $T = E$ indica l'energia (cinetica) del sistema rigido, si ha (tenendo conto che $\boldsymbol{q}_O = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{0}$)

$$\dot{T} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i=1}^{N} m_i |\boldsymbol{v}_i|^2\Big) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \boldsymbol{v}_i \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{q}_i) \cdot \big(\boldsymbol{\omega} \wedge \big(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{q}_i\big)\big) = 0, \tag{42.12}$$

poiché i vettori $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{q}_i$ e $\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{q}_i)$ sono ortogonali. ∎