

Più in generale possiamo considerare sistemi soggetti sia a vincoli olonomi bilateri sia a vincoli di mobilità, i.e. sistemi descritti dalle equazioni

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} + \mathbf{f}_V^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (43.9a)$$

$$G_m(x, t) = 0 \quad m = 1, \dots, M_1, \quad (43.9b)$$

$$\langle c_{m'}(x, t), \dot{x} \rangle = b_{m'}(x, t), \quad m' = 1, \dots, M_2, \quad (43.9c)$$

con  $M := M_1 + M_2 < 3N$ . In tal caso il principio di d'Alembert porta a scrivere le forze vincolari nella forma

$$f_V = \sum_{m=1}^{M_1} \lambda_m \nabla G_m + \sum_{m=M_1+1}^M \lambda_m c_{m-M_1}, \quad (43.10)$$

dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$  sono  $M$  moltiplicatori di Lagrange, e si può procedere unificando le trattazioni dei stemmi sottoposti a vincoli olonomi e anolonomi, per discutere la risolubilità delle equazioni (43.9) integrate dal principio di d'Alembert attraverso la (43.10).

### §43.2 Sistemi rigidi che rotolano senza strisciare

Consideriamo ora in particolare il moto di sistemi rigidi (continui) che *rotolano senza strisciare*. In base alla definizione 36.5, il sistema rigido rotola su una superficie in modo tale che la velocità del punto di contatto visto come punto del sistema rigido è in ogni istante uguale alla velocità che esso ha visto come punto della superficie.

Se un sistema rigido rotola su un piano fisso senza strisciare, il numero dei punti di contatto dipende dal sistema rigido. Per esempio, un disco avrà un solo punto di contatto (cfr. l'esempio 43.9 più avanti); un cilindro circolare retto avrà come punti di contatto tutti i punti della generatrice lungo la quale poggia sul piano (cfr. l'esempio 43.10 più avanti); lo stesso vale nel caso di un cono circolare retto (cfr. l'esempio 53.9 del capitolo 11); un solido come quello della figura 9.10 che rotola sul piano avrà istante per istante due punti di contatto. In tutti questi casi, il sistema rigido ruota intorno a un asse istantaneo passante per i punti di contatto: in ogni istante ogni punto di contatto è fermo (quindi si tratta di un caso particolare della definizione 36.5, in cui la velocità del punto di contatto è nulla), ma il punto di contatto stesso cambia istante per istante.

**Esempio 43.9** Consideriamo un disco di massa  $m$  e raggio  $r$ , che rotoli senza strisciare su un piano, mantenendosi sempre ortogonale al piano. Se  $P$  è il punto di contatto del disco con il piano e  $O$  è il centro di massa del disco, le condizioni di moto di rotolamento senza strisciamento si esprimono (si tenga conto che la velocità di  $P$  è nulla nel sistema solidale con il disco, perché  $P$  è il punto intorno a cui il disco ruota) attraverso la formula

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O) = \mathbf{0}, \quad (43.11)$$

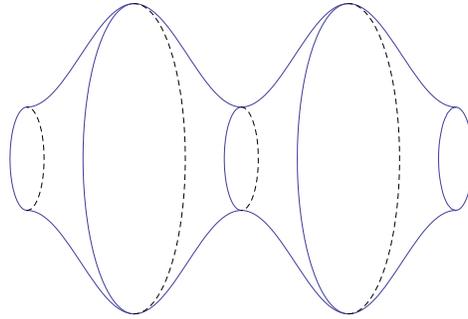


Figura 9.10: Solido che rotola senza strisciare su un piano avendo due punti di contatto con il piano.

dove  $\mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O$  è il vettore dato dalla differenza dei raggi vettori che individuano i punti  $P$  e  $O$  in un sistema di riferimento fisso  $\kappa$ , dotato di una terna  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ , e  $\boldsymbol{\omega}$  è la velocità angolare istantanea. Introduciamo le coordinate  $(x, y, z)$  per determinare la posizione del centro di massa del disco,  $\theta$  per indicare l'angolo di rotazione del disco rispetto alla verticale  $\mathbf{e}_z$  (misurato in senso orario) e  $\varphi$  per indicare l'angolo che il piano del disco forma con l'asse  $\mathbf{e}_x$ , misurato in senso antiorario (cfr. la figura 9.11). In termini di tali coordinate, si ha

$$\mathbf{q}_O = (x, y, r), \quad \mathbf{q}_P - \mathbf{q}_O = (0, 0, -r), \quad \boldsymbol{\omega} = (-\dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\theta} \cos \varphi, 0).$$

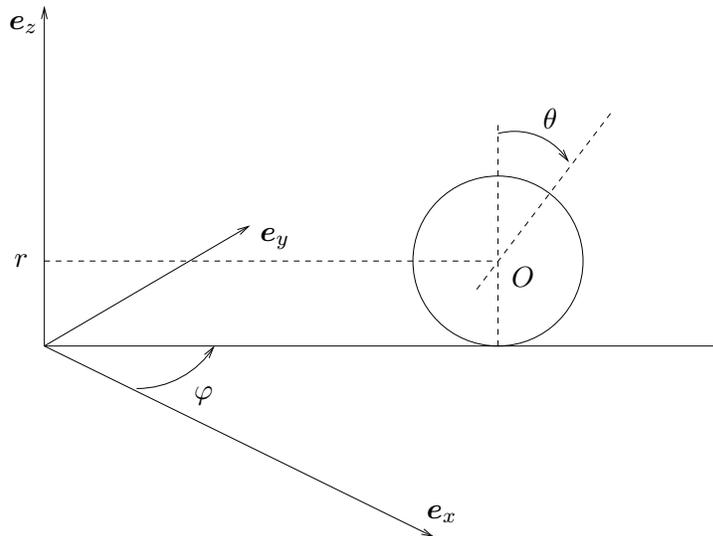


Figura 9.11: Disco che rotola senza strisciare su un piano.

e la (43.11) diventa

$$\begin{cases} \dot{x} - r\dot{\theta} \cos \varphi = 0, \\ \dot{y} - r\dot{\theta} \sin \varphi = 0, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \quad (43.12)$$

Le equazioni (43.12) non sono integrabili in generale (cfr. l'esercizio 16). Lo sono tuttavia se  $\varphi$  è costante. In tal caso infatti, scegliendo l'asse  $e_x$  in modo tale che sia  $\varphi = 0$ , le (43.12) diventano

$$\dot{x} = r\dot{\theta}, \quad \dot{y} = \dot{z} = 0,$$

e, per una scelta opportuna dell'origine del sistema fisso ( $\mathbf{q}_O = (0, 0, r)$  e  $\theta = 0$  all'istante iniziale), otteniamo

$$x = r\theta, \quad y = 0, \quad z = r,$$

che poteva essere ottenuta direttamente da semplici considerazioni geometriche, notando che, in seguito a una rotazione di  $\theta$  del disco, il suo centro avanza di un tratto  $r\theta$ .

**Esempio 43.10** Si descriva il moto di un cilindro circolare retto omogeneo di massa  $m$  e raggio  $r$  che rotoli senza strisciare (cfr. la figura 9.12)

1. su un piano orizzontale  $\pi$ ,
2. all'interno di una superficie cilindrica di raggio  $R > r$ .

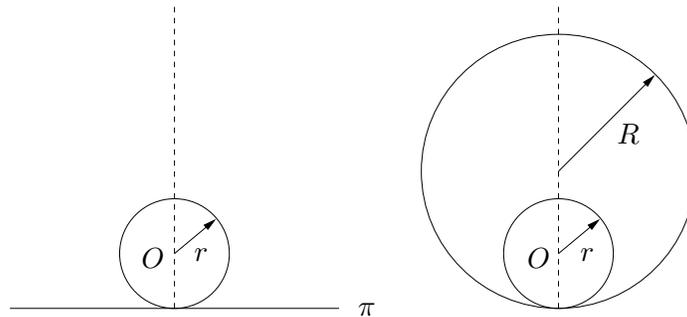


Figura 9.12: Cilindro di raggio  $r$  che rotola senza strisciare su un piano (a sinistra) e all'interno di una superficie cilindrica di raggio  $R > r$  (a destra). Entrambe le figure sono in sezione laterale.

*Discussione dell'esempio.* In entrambi i casi il cilindro e la superficie su cui esso rotola hanno in comune una generatrice del cilindro. Consideriamo prima il caso 1. Scegliamo un sistema di riferimento in cui il piano  $(x, y)$  coincida con il piano  $\pi$  e l'asse  $y$  sia parallelo all'asse del cilindro (poiché il moto è di rotolamento senza strisciamento se i due assi sono paralleli all'istante iniziale  $t_0$  restano tali per ogni tempo  $t$ ). Sia  $\theta$  l'angolo tra la verticale al piano e

un diametro prefissato del cilindro (tale che  $\theta = 0$  per  $t = 0$ ). Il centro di massa del cilindro ha velocità parallela al piano, data da

$$\dot{x} = r\dot{\theta}, \quad (43.13)$$

mentre le coordinate  $y$  e  $z$  si mantengono costanti.

Nel caso 2, sia  $\varphi$  l'angolo tra la verticale e la linea che unisce i centri dei due cilindri. Il centro di massa  $O$  del cilindro che rotola si muove con velocità di modulo  $v_O = (R - r)\dot{\varphi}$ . La velocità angolare  $\dot{\theta}$  di una rotazione pura intorno all'asse istantaneo che coincide con la retta di contatto dei due cilindri è data da

$$\dot{\theta} = \frac{v_O}{r} = \frac{R - r}{r} \dot{\varphi}. \quad (43.14)$$

**Osservazione 43.11** I vincoli dell'esempio 43.10 si possono ottenere anche attraverso una costruzione geometrica. Nel caso 1, se il centro di massa si è spostato di un tratto  $x$ , allora il cilindro deve aver ruotato di un angolo  $\theta$  tale che

$$x = r\theta, \quad (43.15)$$

mentre, nel caso 2, se il centro di massa ha ruotato di un angolo  $\varphi$  rispetto alla verticale, allora il cilindro che rotola deve aver ruotato di un angolo  $\theta$  tale che  $R\varphi = r(\theta + \varphi)$ , i.e.

$$(R - r)\varphi = r\theta. \quad (43.16)$$

Si noti che i vincoli (43.15) e (43.16) si ottengono per integrazione diretta, rispettivamente, dei vincoli (43.13) e (43.14). Questo è in accordo con il fatto che un vincolo anolonomo (lineare) integrabile è equivalente a un vincolo olonomo (cfr. l'osservazione 43.5).

**Nota bibliografica** Nel presente capitolo abbiamo seguito essenzialmente [Arnold-1, Capp. IV e VI] e [Dell'Antonio, Capp. IV÷VI], facendo riferimento però anche a [Gallavotti, Capp. 4 e 5]. Abbiamo anche tenuto presente [Levi-Civita & Amaldi-1, Capp. III e IV] per il §37 e [Levi-Civita & Amaldi-2, Cap. IV] per i §§39 e 40. L'esempio 41.10 è tratto da [Dell'Antonio].

Per definizioni e proprietà delle rigate si veda [Martinelli, Cap. 8] o [do Carmo, Cap. 3]. Per una discussione delle superfici nello spazio  $\mathbb{R}^3$  si veda [Giusti-2, Cap. 7]; più in generale per le superfici in  $\mathbb{R}^n$  si può consultare [do Carmo]. Per un'introduzione alle forme differenziali si veda [Giusti-2, Cap. 8], dove sono anche enunciate e dimostrate le proprietà che si sono usate nel testo (si rimanda al capitolo 17 per ulteriori dettagli e riferimenti). Per le proprietà delle matrici gramiane considerate nell'esercizio 9 si veda [Gantmacher-1, Cap. IX].

## Esercizi

**Esercizio 1** Siano  $v_1, \dots, v_r$  vettori linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $A$  la matrice  $n \times r$  le cui colonne sono date dai vettori  $v_1, \dots, v_r$  (i.e.  $A$  è la matrice di elementi  $A_{ij} = v_{ji}$ , dove  $1 \leq i \leq n$ ,