Esercizio 7 Si dimostri che il lavoro lungo una traiettoria virtuale $\alpha \mapsto x(\alpha; t_0)$, con $|\alpha| < \alpha_0$, è dato dalla (41.2). [*Suggerimento.* Data una curva $s \mapsto x(s) = (\boldsymbol{x}^{(1)}(s), \ldots, \boldsymbol{x}^{(N)}(s))$, il *lavoro* compiuto dalla forza f dal punto $x(s_1)$ al punto $x(s_2)$ è dato (cfr. la definizione (31.2) di lavoro lungo una traiettoria) dall'integrale da s_1 a s_2 di $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f}^{(i)}(x(s)) \cdot [\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{(i)}/\mathrm{d}s](s)$.]

Esercizio 8 Sia A una matrice $n \times n$. Si dimostri che l'equazione $Ax = 0$ ammette una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se $\det A = 0$. [*Soluzione.* Se $x \neq 0$, allora si ha necessariamente $\det A = 0$ (altrimenti A sarebbe invertibile e $Ax = 0$ implicherebbe $x = A^{-1}0 = 0$). Viceversa, se $\det A = 0$ allora le colonne di A sono linearmente dipendenti – per il teorema del rango (cfr. l'esercizio 22 del capitolo 1). Ne deduciamo che, se indichiamo con $v_1, \ldots, v_n$ i vettori individuati dalle colonne di A, esiste $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ tale che $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$. L'ultima relazione si può riscrivere $Ac = 0$; questo mostra che l'equazione $Ax = 0$ ammette una soluzione $x = c \neq 0$.]

Esercizio 9 Dati n vettori $v_1, \ldots, v_n$ in uno spazio euclideo E, si definisce *matrice gramiana* dei vettori $v_1, \ldots, v_n$ la matrice G di elementi $G_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in E, e *gramiano* il determinante della matrice gramiana. Si dimostri che i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il gramiano corrispondente è diverso da zero. [*Soluzione.* Dimostriamo, equivalentemente, che i vettori sono linearmente dipendenti se e solo se il gramiano è nullo. Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti esiste $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ tale $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$. Se moltiplichiamo l'equazione scalarmente per v_i otteniamo $c_1 \langle v_i, v_1 \rangle + \ldots + c_n \langle v_i, v_n \rangle = 0$, così che risulta

$$\sum_{j=1}^{n} G_{ij} c_j = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

che possiamo scrivere in modo più compatto nella forma $Gc = 0$. Poiché $c \neq 0$ si ha $\det G = 0$ (cfr. l'esercizio 8). Viceversa, se $\det G = 0$, l'equazione $Gc = 0$ ammette soluzione $c \neq 0$ (cfr. sempre l'esercizio 8). Moltiplicando le n equazioni $(Gc)_i = 0$ per c_i e sommando su c_i otteniamo

$$0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} G_{ij} c_j = 0 = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\rangle = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right|,$$

ovvero la norma del vettore $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$ è zero, quindi il vettore stesso è nullo. Poiché per ipotesi $c \neq 0$ i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti.]

Esercizio 10 Si considerino M vincoli regolari e indipendenti descritti dalle equazioni (36.5). Sia m la matrice di massa del sistema meccanico (cfr. l'osservazione 36.8). Si dimostri che la matrice $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x,t)$ di elementi $\mathcal{M}_{ij}(x,t) = \left\langle \nabla G_i(x,t), m^{-1} \nabla G_j(x,t) \right\rangle$ è non singolare. [*Soluzione.* Poniamo per semplicità $v_i = \nabla G_i$ per $i = 1, \ldots, M$. Poiché i vincoli sono indipendenti i vettori $v_1, \ldots, v_M$ sono linearmente indipendenti, così che si ha $c_1 v_1 + \ldots + c_M v_M = 0$ se e solo se $c_1 = \ldots = c_M = 0$. D'altra parte, se A è una matrice non singolare ($\det A \neq 0$), si ha $Ax = 0$ se e solo se $x = 0$ (crfr. l'esercizio 8), quindi si ha

$$\sum_{i=1}^{M} c_i A v_i = A \left(\sum_{i=1}^{M} c_i v_i \right) = 0$$

se e solo se $c_1 = \ldots = c_M = 0$. Ne concludiamo che i vettori $Av_1 \ldots, Av_M$ sono linearmente indipendenti. La matrice di massa m è una matrice diagonale. Se scriviamo i suoi elementi diagonali come

$a_k = \sqrt{a_k}\sqrt{a_k}$, $k = 1, \ldots, 3N$, e introduciamo la matrice diagonale A di elementi $A_k = \sqrt{a_k}$, possiamo definire i vettori $w_i = Av_i = A\nabla G_i$ e riscrivere $\mathcal{M}_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle$. Poiché $\det A \neq 0$, i vettori $w_1, \ldots, w_M$ sono linearmente indipendenti. Per l'esercizio 9, si ha $\det \mathcal{M} \neq 0$.]

Esercizio 11 Si consideri un sistema meccanico conservativo sottoposto a M vincoli regolari e indipendenti della forma (36.5). Si definisca H_i la matrice hessiana della funzione G_i, i.e. $H_{i,jk}(x,t) := [\partial^2 G_i/\partial x_j \partial x_k](x,t)$, e si introducano i vettori $A(x,\dot{x},t)$, $B(x,\dot{x},t)$, $C(x,t)$ e $D(x,t)$ di componenti

$$A_i(x,\dot{x},t) := \langle \dot{x}, H_i(x,t)\,\dot{x} \rangle\,, \qquad B_i(x,\dot{x},t) := 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\nabla G_i(x,t), \dot{x} \right\rangle,$$

$$C_i(x,t) = \frac{\partial^2 G_i}{\partial t^2}(x,t), \qquad D_i(x,t) = \left\langle \nabla G_i(x,t), m^{-1} f(x) \right\rangle.$$

Si dimostri che i moltiplicatori di Lagrange $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_M)$ del sistema sono dati da

$$\lambda = -\mathcal{M}^{-1}(x,t)\left(A(x,\dot{x},t) + B(x,\dot{x},t) + C(x,t) + D(x,t) \right),$$

dove $\mathcal{M}(x,t)$ è la matrice invertibile definita nell'esercizio 10. [*Soluzione.* Partendo dalle relazioni $G_i(x(t),t) = 0$ e derivando due volte rispetto al tempo, otteniamo

$$\langle \nabla G_i(x,t), \ddot{x} \rangle + \langle \dot{x}, H_i(x,t)\,\dot{x} \rangle + 2\left\langle \frac{\partial}{\partial t}\nabla G_i(x,t), \dot{x} \right\rangle + \frac{\partial^2 G_i}{\partial t^2}(x,t) = 0, \qquad i = 1, \ldots, M,$$

dove $x = x(t)$. D'altra parte si ha $m\ddot{x} = f(x) + f_V$, dove $f_V = \lambda_1 \nabla G_1 + \ldots + \lambda_M \nabla G_M$, quindi il primo termine si può riscrivere

$$\langle \nabla G_i(x,t), \ddot{x} \rangle = \left\langle \nabla G_i(x,t), m^{-1} f(x) \right\rangle + \sum_{j=1}^{M} \left\langle \nabla G_i(x,t), m^{-1} \lambda_j \nabla G_j(x,t) \right\rangle.$$

Con le notazioni introdotte nel testo si ha dunque

$$D_i(x,t) + \sum_{j=1}^{M} \mathcal{M}_{ij}(x,t)\,\lambda_j + A_i(x,\dot{x},t) + B_i(x,\dot{x},t) + C_i(x,t) = 0,$$

così che, tenendo condo che $\det \mathcal{M}(x,t) \neq 0$ (cfr. l'esercizio 10), segue l'asserto.]

Esercizio 12 Si considerino le prime M componenti della (41.6c), che riscriviamo

$$\begin{pmatrix} f_{V1} \\ \ldots \\ f_{VM} \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_M \end{pmatrix}, \qquad \Gamma := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial G_M}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial x_M} & \ldots & \dfrac{\partial G_M}{\partial x_M} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che, se i vincoli sono indipendenti, allora, eventualmente ridenominando gli indici delle componenti, si ottiene una matrice Γ che è invertibile. [*Soluzione.* Poiché i vettori $\partial G_1/\partial x, \ldots, \partial G_M/\partial x$ sono linearmente indipendenti, esiste una sottomatrice $M \times M$ della matrice di elementi $\partial G_i/\partial x_j$ che ha determinante non nullo (cfr. l'esercizio 1). Siano $i_1, \ldots, i_M$ i valori di j che compaiono in tale sottomatrice. Se ridenominiamo $1, \ldots, M$ tali indici, la sottomatrice diventa la matrice Γ nel testo dell'esercizio.]