Esercizio 17 Si consideri un cilindro circolare retto che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale π come nell'esempio 43.10. In ogni istante il cilindro tocca π lungo una delle sue generatrici g. Sia Q un punto di contatto lungo tale generatrice. Si determini l'asse istantaneo di rotazione rispetto al punto Q e l'asse di moto. Si determini la rigata fissa e la rigata mobile descritte dall'asse di moto. [*Soluzione.* L'asse istantaneo di rotazione e l'asse di moto coincidono entrambi con la generatrice g. La rigata fissa e la rigata mobile coincidono entrambe con il piano π.]

Esercizio 18 Si consideri un cilindro circolare retto che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale π che si muova in direzione verticale con velocità costante $\boldsymbol{v}$. Si determini l'asse istantaneo di rotazione rispetto a un punto Q appartenente alla generatrice di contatto tra il cilindro e il piano (cfr. l'esercizio 17) e l'asse di moto. Si determini la rigata fissa e la rigata mobile descritte dall'asse di moto. [*Soluzione.* L'asse istantaneo di rotazione è dato dalla generatrice g, l'asse di moto è individuato dalla retta parallela a g passante per il punto P^* situato sul piano π a distanza $d = |\boldsymbol{v}|/|\boldsymbol{\omega}|$ da Q nel verso di avanzamento del cilindro se $\boldsymbol{v}$ è diretta verso l'alto e nel verso opposto se $\boldsymbol{v}$ è diretta verso il basso. La rigata fissa è il piano inclinato descritto dall'asse di moto, mentre la rigata mobile è il cilindro circolare retto il cui asse coincide con l'asse del cilindro e la cui base ha raggio $\sqrt{d^2 + r^2}$, se r è il raggio della base del cilindro. Tale cilindro rotola senza strisciare sulla rigata fissa.]

Esercizio 19 Si consideri un cilindro circolare retto che rotoli senza strisciare su un piano orizzontale π che si muova in direzione orizzontale con velocità costante $\boldsymbol{v}$. Si determini l'asse istantaneo di rotazione rispetto a un punto Q appartenente alla generatrice di contatto tra il cilindro e il piano (cfr. l'esercizio 17) e l'asse di moto. Si determini la rigata fissa e la rigata mobile descritte dall'asse di moto.

Esercizio 20 Si discuta come si modificano la definizione 38.3 e il teorema 38.12 nel caso in cui il moto avvenga in $\mathbb{R}^2$ anziché in $\mathbb{R}^3$ (moto rigido piano). [*Soluzione.* In $\mathbb{R}^2$, in luogo della (34.24), si può scrivere $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}'_P + \boldsymbol{v}_O + A(\boldsymbol{q}_P - \boldsymbol{q}_O)$, dove A è la matrice 2×2 di elementi $A_{11} = A_{22} = 0$, $A_{12} = -A_{21} = -\omega$ e gli altri simboli si interpretano nel modo ovvio. Si definisce *centro di rotazione* il punto P^* tale che

$$\boldsymbol{v}_O + A(\boldsymbol{q}_{P^*} - \boldsymbol{q}_O) = 0.$$

Si ha perciò $\boldsymbol{q}_{P^*} = \boldsymbol{q}_O - A^{-1}\boldsymbol{v}_O$, che è ben definito poiché A è invertibile. Il centro di rotazione è l'equivalente in $\mathbb{R}^2$ dell'asse di moto in $\mathbb{R}^3$. Il centro di rotazione descrive nel sistema fisso una curva detta *base* e nel sistema mobile una curva detta *rulletta*. Base e rulletta sono gli equivalenti in $\mathbb{R}^2$ della rigata fissa e della rigata mobile in $\mathbb{R}^3$, rispettivamente.]

Esercizio 21 Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale P di massa m, connesso da un'asta rigida di massa nulla a un punto fisso O (punto di sospensione) e vincolato a muoversi in un piano e soggetto alla forza di gravità (cfr. il §24). Si dimostri che il moto del pendolo è regolato dall'equazione (24.1) con $\alpha = 0$, se g indica l'accelerazione di gravità e ℓ la lunghezza dell'asta. [*Soluzione.* Si scelga un sistema di riferimento nel piano in cui si svolge il moto tale che il punto O coincida con l'origine. Siano (x, y) le coordinate del punto P. Il vincolo a cui è sottoposto il sistema è dato da $G(x, y) = x^2 + y^2 - \ell^2 = 0$, quindi le equazioni del moto, in accordo con la (41.6), si possono scrivere nella forma $m\ddot{x} = 2\lambda x, m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y$. Passando a coordinate polari, si ha $x = \rho \sin\theta$, $y = -\rho\cos\theta$, dove $\rho = \ell$ e θ rappresenta l'angolo che l'asta forma con la verticale discendente condotta per il punto O. Per la variabile angolare θ si ottiene

$$\theta = -\arctan\frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta} = -\frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{x^2 + y^2} = -\frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{\rho^2} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}y - x\ddot{y}}{x^2 + y^2} + 2\dot{\rho}\frac{\dot{x}y - x\dot{y}}{\rho^3},$$

mentre per la variabile radiale si ha

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad \rho\dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y} \quad \Longrightarrow \quad \rho\ddot{\rho} = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \rho^2\dot{\theta}^2,$$

avendo tenuto conto che $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$. Il moltiplicatore di Lagrange λ va scelto derivando due volte rispetto tempo la relazione $\rho(t) - \ell = 0$ (cfr. la soluzione dell'esercizio 11): dall'equazione radiale si ottiene

$$0 = m\rho\ddot{\rho} = mx\ddot{x} + my\ddot{y} + m\rho^2\dot{\theta}^2 = 2\lambda\rho^2 + mg\rho\cos\theta + m\rho^2\dot{\theta}^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right),$$

mentre l'equazione angolare diventa, tenendo conto che $\dot{\rho} = 0$ e $\rho = \ell$,

$$m\ddot{\theta} = -\frac{1}{\rho^2}\left(2\lambda yx - xmg - 2\lambda xy\right) = \frac{xmg}{\rho^2} = -\frac{m}{\ell}g\sin\theta,$$

che implica la (24.1) per $\alpha = 0$. Si noti che λ dipende dalla posizione e dalla velocità del punto P.]

Esercizio 22 Si consideri il pendolo semplice dell'esercizio 21. Si studino le forze vincolari che agiscono sul punto di sospensione del pendolo. [*Soluzione.* Tenendo conto dei risultati dell'esercizio 21 e usando la (41.6c), si trova $f_{Vx} = \lambda\,\partial G/\partial x$ e $f_{Vy} = \lambda\,\partial G/\partial y$, dove $G = G(x,y) = x^2 + y^2 - \ell^2$ e $\lambda = -(m/2)\,(\dot{\theta}^2 + (g/\ell)\cos\theta)$, i.e.

$$f_{Vx} = 2\lambda x = -m\ell\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)\sin\theta, \qquad f_{Vy} = 2\lambda y = m\ell\left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)\cos\theta,$$

così che $|f_V| = m\,|\ell\dot{\theta}^2 + g\cos\theta|$. In particolare, in corrispondenza del punto di equilibrio $(\theta,\dot{\theta}) = (0,0)$ si ha $\lambda = -mg/2\ell$ e $f_V = (0, mg)$, quindi la forza vincolare si oppone alla forza gravitazionale. Poiché l'energia

$$E := \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell\,(1-\cos\theta)$$

è una costante del moto (cfr. il §24.1), si ha

$$|f_V| = mg\,|A + 3\cos\theta - 2|\,, \qquad A := \frac{2E}{mg\ell},$$

dove $\theta \in [-\pi,\pi)$ se $A \geq 4$ e $\theta \in [-\arccos(1-A/2), \arccos(1-A/2)]$ se $0 \leq A < 4$. In particolare la forza vincolare è massima per $\theta = 0$.]

Esercizio 23 Il *pendolo sferico* è definito come nell'esercizio 21, senza il vincolo che il punto debba muoversi un piano. Usando coordinate sferiche (cfr. l'esercizio 3 del capitolo 7), le coordinate del punto P sono $x = \rho\cos\theta\sin\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = -\rho\cos\varphi$, se $\varphi \in [0,\pi)$ è calcolato a partire dalla verticale discendente e $\rho = \ell$ è fissato. Si dimostrino le identità

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \ell^2\left(\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2 + \cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2\right), \qquad \dot{z}^2 = \ell^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2,$$

$$z\dot{z} = -\ell^2\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \qquad x\dot{y} - y\dot{x} = \ell^2\sin^2\varphi\,\dot{\theta}^2, \qquad \delta\dot{\delta} = x\dot{x} + y\dot{y} = -z\dot{z},$$

dove $\delta = \sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\varphi = \ell\sin\varphi$. [*Suggerimento.* Derivando (x,y,z) rispetto al tempo, si ha

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{\rho}\cos\theta\sin\varphi - \rho\sin\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + \rho\cos\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \\
\dot{y} &= \dot{\rho}\sin\theta\sin\varphi + \rho\cos\theta\sin\varphi\,\dot{\theta} + \rho\sin\theta\cos\varphi\,\dot{\varphi}, \\
\dot{x} &= -\dot{\rho}\cos\varphi + \rho\sin\varphi\,\dot{\varphi},
\end{aligned}$$

dove tutti i termini con $\dot{\rho}$ sono nulli se $\rho = \ell$ è costante. L'asserto si ottiene allora per calcolo esplicito.]