in base alla definizione di operatore di inerzia (cfr. le (44.7) e (44.14)), l'azione dell'operatore di inerzia I sull'asse di simmetria $\boldsymbol{e}$ dà $\boldsymbol{I}\boldsymbol{e} = c_0\boldsymbol{e}$. Infatti, per simmetria (nel limite $N \to \infty$), per ogni punto con coordinate (Q_1, Q_2, Q_3) ce n'è uno con coordinate $(-Q_1, -Q_2, Q_3)$. Quindi $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}$ è un asse di inerzia e il momento principale di inerzia associatogli è $I_3 = c_0$. Inoltre $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ sono ortogonali a $\boldsymbol{e}_3$. Per simmetria una qualsiasi scelta di due assi ortogonali tra loro e contenuti nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{e}_3$ e passante per il centro di massa del sistema rigido è valida (cfr. l'osservazione 44.6).

Osservazione 44.18 Dato un sistema rigido piano, sia π il piano in cui il sistema è contenuto. Allora uno degli assi di inerzia è sempre ortogonale a π, mentre gli altri due sono in π (cfr. l'esercizio 6).

§45 Momenti di inerzia di alcuni sistemi rigidi

Nel presente paragrafo applichiamo i risultati discussi nel paragrafo precedente per calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al centro di massa di alcuni sistemi rigidi notevoli. Altri esempi saranno discussi negli esercizi 31÷41.

Esempio 45.1 Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) del sistema costituito da due punti di massa m e mutua distanza d individuano una terna con origine nel centro di massa, con $\boldsymbol{e}_3$ diretto lungo la retta passante per i due punti ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ nel piano perpendicolare a tale retta (cfr. la figura 10.2). Si noti che $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$ non sono univocamente determinati (cfr. le osservazioni 44.6 e 44.17): qualsiasi coppia di vettori ortogonali tra loro e all'asse $\boldsymbol{e}_3$ costituiscono due assi di inerzia.

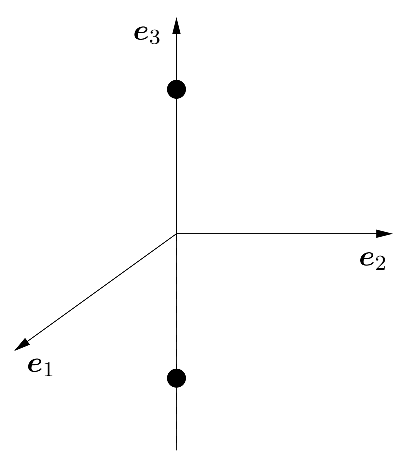

Figura 10.2: Assi di inerzia di un sistema costituito da due punti materiali (esempio 45.1).

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 10)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\, md^2, \qquad I_3 = 0. \tag{45.1}$$

§45.1 Asta

Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) di un'*asta* (o *sbarra*) omogenea di sezione trascurabile, di massa m e di lunghezza ℓ (densità lineare $\lambda = m/\ell$) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, con $\boldsymbol{e}_3$ diretto lungo l'asta ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ ortogonali ad $\boldsymbol{e}_3$ (cfr. la figura 10.3).

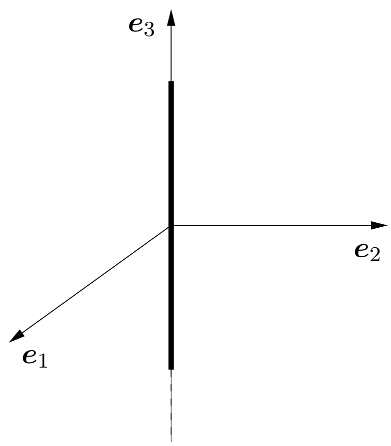

Figura 10.3: Assi di inerzia di un'asta omogenea.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 11)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\, m\ell^2, \qquad I_3 = 0. \tag{45.2}$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ passante per un estremo dell'asta e perpendicolare a essa è

$$I_{\boldsymbol{e}} = \frac{2}{3} m\ell^2. \tag{45.3}$$

§45.2 Anello sottile

Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) di un *anello sottile* (o *anello* tout court) omogeneo di massa m e raggio r (densità lineare $\lambda = m/2\pi r$) individuano una terna con origine nel centro di massa, con $\boldsymbol{e}_3$ ortogonale al piano dell'anello ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ contenuti in tale piano (cfr. la figura 10.4).

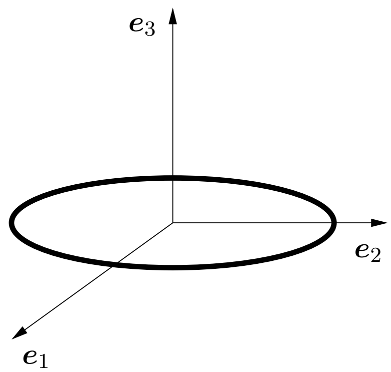

Figura 10.4: Assi di inerzia di un anello sottile.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 12)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}\, mr^2, \qquad I_3 = mr^2. \tag{45.4}$$

§45.3 Disco

Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) di un *disco* omogeneo sottile di massa m e raggio r (densità superficiale $\sigma = m/\pi r^2$) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, con $\boldsymbol{e}_3$ ortogonale al piano del disco ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ contenuti in tale piano (cfr. la figura 10.5).

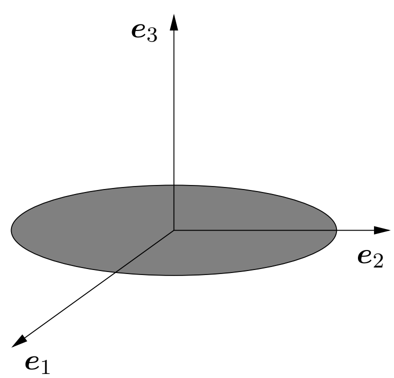

Figura 10.5: Assi di inerzia di un disco sottile.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 13)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\, mr^2, \qquad I_3 = \frac{1}{2}\, mr^2. \tag{45.5}$$

§45.4 Anello spesso

Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) di un *anello spesso* (o *corona circolare*) omogeneo di massa r, raggio esterno b e raggio interno $a \leq b$ (densità superficiale $\sigma = m/\pi(b^2 - a^2)$) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, con $\boldsymbol{e}_3$ ortogonale al piano dell'anello ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ contenuti in tale piano (cfr. la figura 10.6).

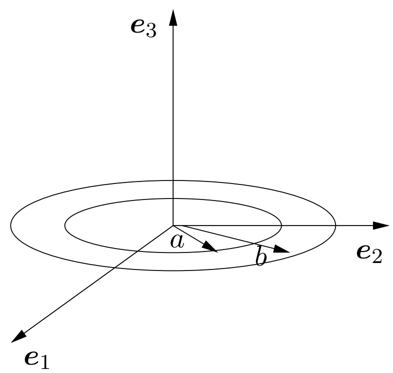

Figura 10.6: Assi di inerzia di un anello.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 14)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4}\, m(a^2 + b^2), \qquad I_3 = \frac{1}{2}\, m(a^2 + b^2). \tag{45.6}$$

Si noti che, per $a = b$, ritroviamo l'anello sottile del §45.2, con raggio $r = a = b$, mentre, per $a = 0$, ritroviamo il disco del §45.3, con raggio $r = b$.

§45.5 Cilindro circolare retto

Si consideri un *cilindro circolare retto* omogeneo di massa m, raggio r e altezza h. Il volume del cilindro è $\pi r^2 h$ e la sua densità di volume $\rho = m/\pi r^2 h$. Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, con $\boldsymbol{e}_3$ diretto lungo l'asse del cilindro ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ ortogonali ad $\boldsymbol{e}_3$ (cfr. la figura 10.7). I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 15)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\, m\big(3r^2 + h^2\big), \qquad I_3 = \frac{1}{2}\, mr^2. \tag{45.7}$$

Si noti che per $r \to 0$ si ottiene l'asta del §45.1, mentre per $h \to 0$ si ottiene il disco del §45.3. Il momento di inerzia rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ passante per un diametro di una base del cilindro è (cfr. l'esercizio 16)

$$I_{\boldsymbol{e}} = m\left(\frac{1}{3}h^2 + \frac{1}{4}r^2\right).$$

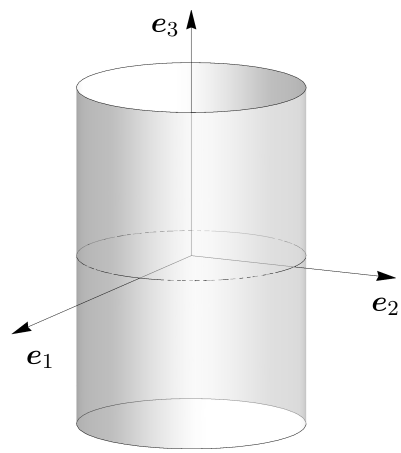

Figura 10.7: Assi di inerzia di un cilindro circolare retto.

§45.6 Sfera

Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) di una *sfera* omogenea di massa m e raggio r (così che il suo volume e la sua densità di volume sono, rispettivamente, $4\pi r^3/3$ e $\rho = 3m/4\pi r^3$) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, con $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ arbitrari, purché ortogonali tra loro (cfr. la figura 10.8).

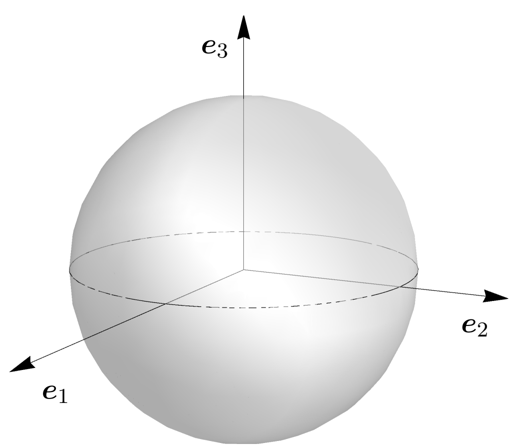

Figura 10.8: Assi di inerzia di una sfera.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 17)

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\, mr^2. \tag{45.8}$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ tangente alla superficie è (cfr. l'esercizio 18)

$$I_{\boldsymbol{e}} = \frac{7}{5} mr^2.$$

§45.7 Lamina rettangolare

Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) di una *lamina rettangolare* (o *lastra rettangolare*) omogenea di massa m, e lati di lunghezza a e b (così che la sua area e la sua densità superficiale sono, rispettivamente, ab e $\sigma = m/ab$) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, con $\boldsymbol{e}_3$ ortogonale al piano della lamina, $\boldsymbol{e}_1$ parallelo al lato di lunghezza b ed $\boldsymbol{e}_2$ parallelo al lato di lunghezza a, come si può ricavare con argomenti di simmetria analoghi a quelli discussi nell'osservazione 44.18 (cfr. la figura 10.9).

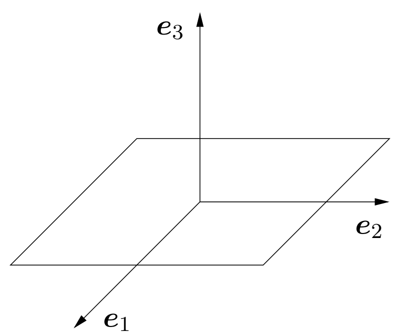

Figura 10.9: Assi di inerzia di una lamina rettangolare.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 19)

$$I_1 = \frac{1}{12}\, ma^2, \qquad I_2 = \frac{1}{12}\, mb^2, \qquad I_3 = \frac{1}{12}\, m\big(a^2 + b^2\big). \tag{45.9}$$

§45.8 Cono circolare retto

Si consideri un *cono circolare retto* (o rotondo) omogeneo di massa m, raggio r e altezza h. Il volume del cono è $\pi r^2 h/3$ e quindi la sua densità di volume $\rho = 3m/\pi r^2 h$. Gli assi di inerzia (rispetto al centro di massa) individuano una terna con origine nel centro di massa del sistema, che si trova lungo l'asse del cono a distanza $3h/4$ dal vertice, con $\boldsymbol{e}_3$ diretto lungo l'asse del cono ed $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ ortogonali ad $\boldsymbol{e}_3$ (cfr. la figura 10.10).

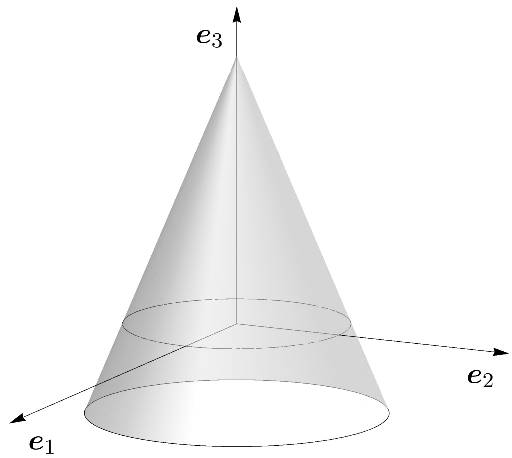

Figura 10.10: Assi di inerzia di un cono circolare retto.

I momenti principali di inerzia corrispondenti sono (cfr. l'esercizio 20)

$$I_1 = I_2 = \frac{3}{80}\, m\big(4r^2 + h^2\big), \qquad I_3 = \frac{3}{10}\, mr^2, \tag{45.10}$$

Il momento di inerzia rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono $\boldsymbol{e}_3$ è (cfr. l'esercizio 21)

$$I_{\boldsymbol{e}} = 3m\left(\frac{1}{5}h^2 + \frac{1}{20}r^2\right).$$

§46 Angoli di Eulero

Consideriamo due sistemi di riferimento κ e K, il primo fisso e il secondo mobile, solidale con un sistema rigido che ruota intorno a un punto fisso di $O \in \kappa$. Scegliamo in κ una terna levogira $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ tale che O sia l'origine nel sistema κ. Sia $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ una terna levogira nel sistema mobile, con origine in O e tale che i suoi versori siano orientati lungo gli assi principali di inerzia del sistema rigido. Supponiamo anche che i due assi $\boldsymbol{e}_3$ ed $\boldsymbol{e}_z$ non coincidano. Poiché i due sistemi di riferimento κ e K hanno la stessa origine, il moto $D_t \colon K \to \kappa$ è una rotazione $B_t = B$ (cfr. pag. 383).

Indichiamo con $\boldsymbol{e}_N$ il versore dell'asse $[\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_3]$; poiché $\boldsymbol{e}_z$ ed $\boldsymbol{e}_3$ non coincidono, il versore $\boldsymbol{e}_N$ è ben definito e appartiene al piano contenente i versori $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_y$.

Per sovrapporre il sistema fisso κ al sistema mobile K si devono compiere tre rotazioni:

1. una rotazione di un angolo φ intorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$, durante la quale $\boldsymbol{e}_z$ rimane fisso ed $\boldsymbol{e}_x$ si sovrappone a $\boldsymbol{e}_N$;