Esercizio 7 Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva di classe C^1 con jacobiano diverso da zero. Allora, se $f\colon \Phi(U) \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, vale la seguente *formula del cambiamento di coordinate per integrali multipli* (cfr. la nota bibliografica):

$$\int_{\Phi(U)} \mathrm{d}x\, f(x) = \int_U \mathrm{d}u\, f(\Phi(u)) \left|\det \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u)\right|.$$

Si utilizzi la formula per discutere come si trasformano gli integrali in $\mathbb{R}^2$ passando a coordinate polari. [*Suggerimento.* L'applicazione che fa passare da coordinate polari $u = (\rho, \theta)$ a coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2)$ è data da $x = \Phi(u) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, dove $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in [0, 2\pi)$ (cfr. l'esercizio 2 del capitolo 7). Indicando con $A = \partial\Phi/\partial u$ la matrice jacobiana, risulta $\det A = \rho$, e quindi si ha

$$\int_{\Phi(U)} \mathrm{d}x\, f(x_1, x_2) = \int_U \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \rho\, f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

per ogni funzione integrabile f.]

Esercizio 8 Utilizzando la formula del cambiamento di coordinate per integrali multipli data nell'esercizio 7, si discuta come si trasformano gli integrali in $\mathbb{R}^3$ passando a coordinate sferiche. [*Suggerimento.* L'applicazione che fa passare da coordinate sferiche $u = (\rho, \theta, \varphi)$ a coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$ è data da $x = \Phi(u) = (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, dove $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi)$ (cfr. l'esercizio 3 del capitolo 7). Indicando con $A = \partial\Phi/\partial u$ la matrice jacobiana, risulta $\det A = \rho^2 \sin\varphi$, e quindi si ha

$$\int_{\Phi(U)} \mathrm{d}x\, f(x_1, x_2, x_3) = \int_U \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \rho^2 \sin\varphi\, f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$$

per ogni funzione integrabile f.]

Esercizio 9 Utilizzando la formula del cambiamento di coordinate per integrali multipli data nell'esercizio 7, si discuta come si trasformano gli integrali in $\mathbb{R}^3$ passando a coordinate cilindriche. [*Suggerimento.* L'applicazione che fa passare da coordinate cilindriche $u = (\rho, \theta, \zeta)$ a coordinate cartesiane $x = (x_1, x_2, x_3)$ è data da $x = \Phi(u) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$, dove $\rho \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $z \in \mathbb{R}$ (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 7). Indicando con $A = \partial\Phi/\partial u$ la matrice jacobiana, risulta $\det A = \rho$, e quindi si ha

$$\int_{\Phi(U)} \mathrm{d}x\, f(x_1, x_2, x_3) = \int_U \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z\, \rho\, f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$

per ogni funzione integrabile f.]

Esercizio 10 Si dimostrino le (45.1). [*Suggerimento.* Si tiene conto dell'osservazione 44.17, per individuare la direzione degli assi d'inerzia, e si applica quindi la definizione 44.9 per calcolare i momenti d'inerzia principali: si ha

$$I_1 = I_2 = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2, \qquad I_3 = 0,$$

poiché i due punti sono collocati lungo l'asse $\boldsymbol{e}_3$ e hanno distanza $d/2$ dagli assi $\boldsymbol{e}_1$ ed $\boldsymbol{e}_2$.]

Esercizio 11 Si dimostrino le (45.2). [*Suggerimento.* Si tiene conto dell'osservazione 44.17 per individuare la direzione degli assi d'inerzia. Si applica quindi la (44.20) per calcolare i momenti d'inerzia principali, scegliendo un sistema di riferimento in cui il centro di massa è situato nell'origine e l'asse x è diretto lungo l'asse $\boldsymbol{e}_3$: poiché la densità di massa è $\lambda = m/\ell$, essendo l'asta omogenea, si ha allora, per $k = 1, 2, 3$,

$$I_k = \lambda \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \mathrm{d}x \, r_k^2(x),$$

dove $r_k^2(x) = x^2$ per $k = 1, 2$ e $r_k^2(x) = 0$ per $k = 3$.]

Esercizio 12 Si dimostrino le (45.4). [*Suggerimento.* Si tiene conto dell'osservazione 44.17 per individuare la direzione degli assi d'inerzia. Si applica quindi la (44.20) per calcolare i momenti d'inerzia principali, scegliendo un sistema di riferimento in cui il centro di massa è situato nell'origine e l'asse z è diretto lungo l'asse $\boldsymbol{e}_3$: tenendo conto che la densità di massa è $\lambda = m/2\pi r$ e utilizzando coordinate polari – così che $\lambda(\boldsymbol{Q}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{Q} = \lambda \, r \, \mathrm{d}\theta$ – si trova, per $k = 1, 2, 3$,

$$I_k = \lambda \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\theta \, r_k^2(x),$$

dove $r_k^2(x) = r^2 \sin^2 \theta$ per $k = 1, 2$ e $r_k^2(x) = r^2$ per $k = 3$.]

Esercizio 13 Si dimostrino le (45.5). [*Suggerimento.* Si ragiona come per l'esercizio 12. Poiché il sistema rigido è omogeneo, la densità di massa è $\sigma = m/\pi r^2$; utilizzando coordinate polari – così che $\sigma(\boldsymbol{Q}) = \sigma \, r' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\theta$ (cfr. anche l'esercizio 7) – si trova

$$I_1 = I_2 = \sigma \int_0^r r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \, (r')^2 \sin^2 \theta, \qquad I_3 = \sigma \int_0^r r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \, (r')^2,$$

come segue dalla (44.20).]

Esercizio 14 Si dimostrino le (45.6). [*Suggerimento.* Si ragiona come per l'esercizio precedente, con l'unica differenza che ora r' va integrato tra a e b.]

Esercizio 15 Si dimostrino le (45.7). [*Suggerimento.* Utilizzando coordinate cilindriche (cfr. l'esercizio 9) si ha

$$I_1 = I_2 = \rho \int_0^r r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \left(z^2 + (r')^2 \sin^2 \theta \right), \qquad I_3 = \rho \int_0^r r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \, (r')^2,$$

come segue dall'osservazione 44.17 e dalla (44.20).]

Esercizio 16 Si dimostri che il momento di inerzia di un cilindro circolare retto omogeneo rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ passante per un diametro di una delle due basi è dato da $I_{\boldsymbol{e}} = m(h^2/3 + r^2/4)$. [*Suggerimento.* Si combinano le (45.7) con il teorema 44.15.]

Esercizio 17 Si dimostrino le (45.8). [*Suggerimento.* Utilizzando coordinate sferiche (cfr. l'esercizio 8) si ha

$$I_1 = I_2 = I_3 = \rho \int_0^r (r')^2 \mathrm{d}r' \int_0^{\pi} \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \, (r')^2 \sin^2 \varphi,$$

come segue dalla discussione di pag. 472, dall'osservazione 44.17 e dalla (44.20).]

Esercizio 18 Si dimostri che il momento di inerzia di una sfera rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ tangente alla superficie è dato da $I_{\boldsymbol{e}} = 7mr^2/5$. [*Suggerimento.* Si combinano le (45.8) con il teorema 44.15.]

Esercizio 19 Si dimostrino le (45.9). [*Suggerimento.* Si ha

$$I_1 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \, y^2, \qquad I_2 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \, x^2, \qquad I_3 = \sigma \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \left(x^2 + y^2\right),$$

come segue dalla (44.20) e dall'osservazione 44.17.]

Esercizio 20 Si dimostrino le (45.10). [*Suggerimento.* Se α denota l'angolo al vertice del cono, si ha $\tan\alpha = r/h$; il centro di massa avrà coordinate $(0, 0, z_0)$, con

$$z_0 := \frac{1}{m} \left(\rho \int_0^h z \, \mathrm{d}z \int_0^{rz/h} r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right) = \frac{3}{4} h.$$

La densità di volume è $\rho = m/\pi r h^2$. Utilizzando coordinate cilindriche (cfr. l'esercizio 9) si trova

$$I_1 = I_2 = \rho \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{rz/h} r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left((z - z_0)^2 + (r')^2 \sin^2\theta \right), \qquad I_3 = \rho \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{rz/h} r' \, \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \, (r')^2,$$

avendo tenuto conto dell'osservazione 44.17 e della (44.20).]

Esercizio 21 Si dimostri che il momento di inerzia di un cono circolare retto rispetto a un asse $\boldsymbol{e}$ passante per il vertice e perpendicolare all'asse del cono è dato da $I_{\boldsymbol{e}} = 3m(h^2/5 + r^2/20)$. [*Suggerimento.* Si combinano le (45.10) con il teorema 44.15.]

Esercizio 22 Si dimostri che nella discussione delle equazioni di Eulero (47.2), per $\sqrt{2EI_2} < L < \sqrt{2EI_3}$, l'intersezione dell'ellissoide $\boldsymbol{L} \cdot I^{-1}\boldsymbol{L} = 2E$ con la sfera $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = L^2$ consiste in due curve chiuse che si avvolgono intorno all'asse $\boldsymbol{e}_3$. [*Soluzione.* Le curve d'intersezione sono curve in $\mathbb{R}^3$, che possono essere parametrizzate come $(L_1, L_2) \mapsto L_3 = f(L_1, L_2)$. Usando coordinate polari si ha $(L_1, L_2) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, con $\rho \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in \mathbb{R}$: infatti in principio le curve potrebbero non chiudersi. Noi vogliamo appunto dimostrare che, dopo che θ ha compiuto un giro completo di 2π, le curve si sono chiuse. Dalle (47.3) si vede subito che, dati L_1 e L_2 sono definiti due valori di L_3, così che si hanno due curve. Inoltre si ha

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{I_1} + \frac{\rho^2\sin^2\theta}{I_2} + \frac{L^2 - \rho^2}{I_3} = 2E;$$

esplicitando ρ in funzione di θ,

$$\rho^2 = \frac{2EI_3 - L^2}{\dfrac{I_3}{I_1}\cos^2\theta + \dfrac{I_3}{I_2}\sin^2\theta - 1},$$

dove

$$2EI_3 - L^2 > 0, \qquad \frac{I_3}{I_1}\cos^2\theta + \frac{I_3}{I_2}\sin^2\theta > 1,$$

si vede che $\rho = \rho(\theta)$ è univocamente determinata come funzione periodica di θ. Pertanto

$$f(L_1, L_2) = G(\theta) := f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$$

è una funzione periodica di θ di periodo 2π.]