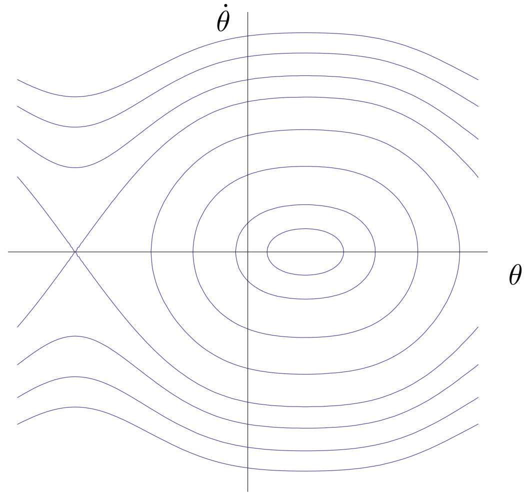

Figura 12.11: Curve di livello per il sistema di energia potenziale (61.18) per $\alpha \geq \sqrt{2}$.

tecniche variazionali; si veda [Hagedorn]. L'instabilità di punti di equilibrio che corrispondano a punti di sella dell'energia potenziale è stata dimostrata, prima nel caso di funzioni con parte "dominante" omogenea nel senso del teorema 58.13 (cfr. [Kozlov]), quindi nel caso generale (cfr. [Palamodov]), sotto l'assunzione di analiticità.

Per il §59, abbiamo seguito essenzialmente [Dell'Antonio, Cap. VII]. Per un'introduzione alla teoria delle biforcazioni si veda, per esempio, [Guckenheimer & Holmes, Chow & Hale, Kuznetsov].

Esercizi

Esercizio 1 Sia A una matrice simmetrica definita positiva. Si dimostri che esiste una matrice simmetrica definita positiva α tale che $A = \alpha^2$. Chiameremo α la *radice quadrata* della matrice A. [*Soluzione.* Poiché A è simmetrica, esiste una matrice diagonale D tale che $A = UDU^{-1}$, con U ortogonale (cfr. l'esercizio 42 del capitolo 1). Si definisca $\alpha = U\sqrt{D}U^{-1}$, dove $\sqrt{D}$ è la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono le radici quadrate degli elementi D_{ii} di D; poiché A è definita positiva, si ha $D_{ii} > 0$ e quindi $\sqrt{D_{ii}}$ è ben definito. Risulta allora

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= U\sqrt{D}U^{-1}U\sqrt{D}U^{-1} = U\sqrt{D}\sqrt{D}U^{-1} = UDU^{-1} = A, \\ \alpha^T &= \left(U\sqrt{D}U^{-1}\right)^T = U\sqrt{D}U^{-1} = \alpha, \end{aligned}$$

poiché $U^{-1} = U^T$.]

Esercizio 2 Sia A una matrice simmetrica $n \times n$. Si dimostri che se esiste $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $\langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle < 0$ allora A ha almeno un autovalore negativo. [*Soluzione.* Poiché A è simmetrica i suoi autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono reali e i suoi autovettori $v_1, \ldots, v_n$ ortogonali (cfr. gli esercizi 38÷41 del capitolo 1). In particolare gli autovettori costituiscono una base, quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esistono n numeri $x_1, \ldots, x_n$ tali che $x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$, così che

$$\langle x, Ax \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \langle v_i, A v_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j x_i x_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 |v_i|^2.$$

Se gli autovalori di A sono tutti non negativi si ha $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, in contraddizione con l'ipotesi.]

Esercizio 3 La definizione di funzione omogenea data a pag. 67 si estende a funzioni non definite nell'origine. La funzione $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice *omogenea* di grado $m \in \mathbb{N}$ se $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sia $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è una funzione continua omogenea di grado m. Si dimostri che

- se f è definita in $x = 0$, si ha $f(0) = 0$,
- se f non è definita in $x = 0$, la si può estendere con continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$.

[*Suggerimento.* Per $\lambda > 0$ si ha $f(\lambda x) = \lambda^m f(x) \; \forall x \neq 0$. Se f è definita in $x = 0$, si ha, per ogni $y \neq 0$,

$$f(0) = \lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda y) = \lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^m f(y) = 0.$$

Se $f(x)$ non è definita in $x = 0$, ragionando allo stesso modo si trova che, fissato $y \neq 0$, il limite per $\lambda \to 0^+$ di $f(\lambda y) = \lambda^m f(y)$ è 0; d'altra parte $\lambda y \to 0$ per $\lambda \to 0^+$, quindi, data l'arbitrarietà di y, $f(x) \to 0$ per $x \to 0$ e quindi si può estendere per continuità f in $x = 0$ definendo $f(0) := 0$. Un esempio di funzione omogenea ma non definita in $x = 0$ è, per $n = 2$, $f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1^3 + x_1^2 x_2)/(x_1^2 + x_2^2)$.]

Esercizio 4 Si dimostri che se $f \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile omogenea di grado $m \in \mathbb{N}$ allora $\langle \nabla f(x), x \rangle = m f(x)$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Tale risultato è noto come *teorema di Eulero sulle funzioni omogene.* [*Soluzione.* Derivando rispetto a λ l'identità $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$, con $\lambda > 0$, si trova $\langle \nabla f(\lambda x), x \rangle = m \lambda^{m-1} f(x)$, che, per $\lambda = 1$, comporta l'asserto.]

Esercizio 5 Si dimostri che se f è una funzione continua omogenea di grado m definita positiva allora esiste una costante $c > 0$ tale che $f(x) < -c|x|^m$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. [*Soluzione.* Dato $x \in \mathbb{R}^n$ si definisca $r := |x|$. Se si scrive $x = ry$, dove $|y| = 1$, si ha $y \in \partial B_1(0) = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ per costruzione. Si ha inoltre $f(x) = r^m f(y)$, poiché P è una funzione omogenea di grado m. Sia

$$M := \max_{y \in \partial B_1(0)} f(y).$$

Il massimo esiste per il teorema di Weiestrass e, poiché per ipotesi $f(x) < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, si ha $M < 0$. Se si pone $c = -M > 0$, risulta allora

$$f(x) = r^m f(y) \leq r^m M = -c r^m = -c|x|^m,$$

da cui segue l'asserto.]

Esercizio 6 Sia $R \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $R(q_0) = 0$. Si dimostri l'implicazione

$$\lim_{q \to q_0} \frac{1}{|q - q_0|^{m-1}} \frac{\partial R}{\partial q}(q) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{q \to q_0} \frac{R(q)}{|q - q_0|^m} = 0.$$

[*Soluzione.* Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|[\partial R/\partial q](q) < \varepsilon |q - q_0|^{m-1}$ per ogni q tale che $|q - q_0| < \delta$. Si ha quindi, per $|q - q_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |R(q)| &= |R(q) - R(q_0)| = \left| \int_0^1 \mathrm{d}t \left\langle \frac{\partial R}{\partial q}(q_0 + t(q - q_0)), q - q_0 \right\rangle \right| \\ &\le \int_0^1 \mathrm{d}t \left| \frac{\partial R}{\partial q}(q_0 + t(q - q_0)) \right| |q - q_0| \le \varepsilon |q - q_0|^{m-1} |q - q_0| = \varepsilon |q - q_0|^m, \end{aligned}$$

poiché $|q + t(q - q_0)| \le |q - q_0|$ $\forall t \in [0, 1]$. Da qui segue l'asserto.]

Esercizio 7 Si dimostri che, se un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi in un piano π che ruoti con velocità $\omega(t)$ intorno a un asse fisso, l'effetto delle forze apparenti si può descrivere in termini di un'*energia potenziale centrifuga*

$$V_{\mathrm{cf}}(x, y) = -\frac{1}{2} m \omega^2(t)\, x^2,$$

dove (x, y) sono le coordinate del punto P nel piano π. Si discuta in particolare il caso in cui $\omega(t) = \omega$ sia costante. [*Soluzione.* Il sistema solidale con il piano rotante è un sistema non inerziale, quindi bisogna tener conto delle forze apparenti (cfr. il teorema 35.3 del capitolo 8). La forza che agisce su un punto P del piano, di massa m e coordinate $\boldsymbol{Q} = (x, y, 0)$, è data da

$$\boldsymbol{F} - 2m\, [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{Q}}] - m\, [\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{Q}] - m\, [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]]\,,$$

dove $\boldsymbol{F}$ è la forza attiva espressa nel sistema solidale e $\boldsymbol{\Omega}$ è il vettore velocità angolare. Sia la forza $-m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{Q}]$ che la forza di Coriolis $-2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{Q}}]$ sono ortogonali al piano rotante, quindi non agiscono sul moto; tendono ad allontanare il punto P dal piano π e sono pertanto controbilanciate dalla forza vincolare. La forza centrifuga $-m\, [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]]$, espressa nelle coordinate del sistema rotante ha componente $m\omega^2 x$ lungo l'asse x e componente nulla lungo l'asse y. Quindi se si definisce V_{cf} come nel testo dell'esercizio, si può interpretare la forza centrifuga come la forza corrispondente all'*energia potenziale centrifuga* V_{cf}. In particolare, se ω è costante, anche $\boldsymbol{\Omega}$ è costante (è un vettore diretto lungo l'asse verticale e di modulo costante ω), quindi $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$, e solo la forza di Coriolis deve essere compensata dalla forza vincolare.]

Esercizio 8 Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = \alpha x - x^3$ in $\mathbb{R}$. Si dimostri che per $\alpha = 0$ si ha una biforcazione a forcone supercritica. [*Soluzione.* I punti di equilibrio sono $x = 0$, per ogni valore di α, e $x = \pm\sqrt{\alpha}$, se $\alpha > 0$: $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile per $\alpha \le 0$ e instabile per $\alpha > 0$, mentre $x = \pm\sqrt{\alpha}$ sono punti di equilibrio stabile quando esistono.]

Esercizio 9 Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = \alpha x + x^3$ in $\mathbb{R}$. Si dimostri che per $\alpha = 0$ si ha una biforcazione a forcone subcritica. [*Soluzione.* I punti di equilibrio sono $x = 0$, per ogni valore di α, e $x = \pm\sqrt{-\alpha}$, se $\alpha < 0$: $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile per $\alpha < 0$ e instabile per $\alpha > 0$, mentre $x = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono punti di equilibrio instabili quando esistono.]

Esercizio 10 Si dimostri che se A è una matrice definita positiva tutti i suoi elementi diagonali A_{ii} sono strettamente positivi. [*Soluzione.* Sia A una matrice $n \times n$ definita positiva: si deve avere allora $\langle x, Ax \rangle > 0$ per ogni $x \ne 0$. Prendendo $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_j = \delta_{ij}$ si trova $\langle x, Ax \rangle = A_{ii}$, quindi $A_{ii} > 0$.]

Esercizio 11 Si deduca la (59.5) dall'analisi del §31.

Esercizio 12 Si dimostri che l'*energia potenziale gravitazionale sulla superficie della Terra* di un punto materiale di massa m è della forma $U = mgy$, se y è la coordinata del punto lungo l'asse verticale e g è l'accelerazione di gravità. [*Soluzione.* Si scelga un sistema di riferimento $Oxyz$ in cui l'asse y sia l'asse verticale. La forza che agisce sul punto P di coordinate (x, y, z) è allora $\boldsymbol{f}_{\rm gr} = (0, -mg, 0)$ (cfr. l'osservazione 32.11). Definendo $V_{\rm gr}$ tale che

$$\boldsymbol{f}_{\rm gr} = -\left(\frac{\partial V_{\rm gr}}{\partial x}, \frac{\partial V_{\rm gr}}{\partial y}, \frac{\partial V_{\rm gr}}{\partial z}\right),$$

si trova $V_{\rm gr} = mgy$. La forza $\boldsymbol{f}_{\rm gr}$ è comunemente chiamata *forza di gravità* o *forza peso* (cfr. di nuovo l'osservazione 32.11).]

Esercizio 13 Siano P_1 e P_2 due punti materiali collegati da una molla con costante elastica k e lunghezza a riposo nulla (o trascurabile). Con questo si intende che la forza d'interazione tra i punti è una forza elastica, cioè proporzionale alla distanza tra i due punti, con costante di proporzionalità k, attrattiva e diretta lungo la retta che congiunge i due punti. Si dimostri che l'*energia potenziale elastica* corrispondente è data da

$$V_{\rm el} = \frac{1}{2}k|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^2 = \frac{1}{2}k\Big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\Big),$$

se $\boldsymbol{q}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sono le coordinate dei punti P_1 e P_2, rispettivamente. [*Soluzione.* La forza $\boldsymbol{f}_1$ che agisce sul punto P_1 è diretta lungo la retta congiungente i due punti, nel verso dal punto P_2 al punto P_1, essendo una forza attrattiva. È una forza lineare: il suo modulo è proporzionale alla distanza $|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$ tra i due punti, con costante di proporzionalità k. La forza che agisce sul punto P_2 è data da $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{f}_1$, per il principio di azione e reazione. Quindi si ha

$$\boldsymbol{f}_1 = -k\,(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) = -k(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2), \qquad \boldsymbol{f}_2 = k\,(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)\,.$$

Richiedendo che sia

$$\boldsymbol{f}_1 = -\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial \boldsymbol{q}_1} := -\left(\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial x_1}, \frac{\partial V_{\rm el}}{\partial y_1}, \frac{\partial V_{\rm el}}{\partial z_1}\right),$$

si ottiene il risultato.]

Esercizio 14 Si discuta come cambia la discussione dell'esercizio 13 nel caso in cui la molla abbia lunghezza a riposo $d_0 > 0$. [*Soluzione.* Le forze $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ che agiscono sui punti P_1 e P_2 sono dirette ancora lungo la retta congiungente i due punti, i.e. lungo il versore $(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)/|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$; inoltre sono attrattive quando la distanza tra i punti è maggiore di d_0 e repulsive altrimenti. D'altra parte, poiché le forze sono lineari, si ha $|\boldsymbol{f}_1| = |\boldsymbol{f}_2| = k\,||\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2| - d_0|$, quindi, imponendo di nuovo,

$$\boldsymbol{f}_1 = -\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial \boldsymbol{q}_1}, \qquad \boldsymbol{f}_2 = -\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial \boldsymbol{q}_2},$$

si trova

$$V_{\rm el} = \frac{1}{2}k\,(|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2| - d_0)^2\,.$$

Ovviamente per $d_0 = 0$ ritroviamo l'espressione dell'esercizio 13.]

Esercizio 15 Si dimostri che nel caso (4) dell'esempio del §60 l'energia potenziale è data dalla (60.16). [*Suggerimento.* Si ragiona come nell'esercizio 7.]

Esercizio 16 Si dimostri che nel caso (2) dell'esempio del §61 l'energia potenziale è data dalla (61.7). [*Soluzione.* Si ragiona come per l'esercizio 7.]

Esercizio 17 Si deduca la (61.16) a partire dall'energia potenziale (61.13).

Esercizio 18 Si dimostri che le forze apparenti non contribuiscono alla (61.17). [*Soluzione.* Segue direttamente dalla discussione dell'esercizio 7, notando che se $\boldsymbol{Q}$ individua il punto P_0 allora i vettori $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}, \dot{\boldsymbol{Q}}$ sono paralleli e ricordando che il prodotto vettoriale di vettori paralleli è nullo.]

Esercizio 19 Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema lagrangiano dell'esercizio 59 del capitolo 11.

Esercizio 20 Due punti materiali P_1 e P_2 interagiscono attraverso una forza centrale (cfr. il §31.1) la cui intensità è proporzionale a $(d(P_1,P_2))^b$, $b \neq -1$, dove $d(P_1,P_2)$ è la distanza tra i due punti. Si calcoli l'energia potenziale del sistema. [*Soluzione.* Siano $\boldsymbol{q}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ le coordinate dei punti P_1 e P_2. La forza che agisca sul punto P_1 è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1 &= a\,|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^b \frac{\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|} \\ &= a\left((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right)^{(b-1)/2} (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)\,, \end{aligned}$$

dove la costante di proporzionalità a è positiva se la forza è repulsiva e negativa se la forza è attrativa, mentre la forza che agisce sul punto P_2 è data da $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{f}_1$. Definendo $V = V(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)$ in modo che $\boldsymbol{f}_1 = -\partial V/\partial \boldsymbol{q}_1$ e $\boldsymbol{f}_2 = -\partial V/\partial \boldsymbol{q}_2$, si trova

$$V(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = -\frac{a}{b+1}|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^{b+1} = -\frac{a}{b+1}\left((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right)^{(b+1)/2}.$$

In particolare, se $a = -k$, con $k > 0$, e $b = -2$, abbiamo

$$V(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = -\frac{k}{|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|} = -\frac{k}{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}},$$

che è l'*energia potenziale gravitazionale* studiata al §32.]

Esercizio 21 Con le notazioni dell'esercizio 20 si discuta il caso $b = -1$.

Esercizio 22 Un sistema meccanico è costituito da tre punti P_1, P_2 e P_3, di massa $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. I punti P_1 e P_2 sono vincolati a muoversi lungo una retta orizzontale (che si può identificare con l'asse x), mentre il punto P_3 si muove lungo una retta verticale (che si può identificare con l'asse y). Tra i punti P_1 e P_2 agiscono due forze conservative repulsive, di modulo, rispettivamente, $\alpha\, d^{-2}(P_1,P_2)$ e $\beta\, d^4(P_1,P_2)$, se $d(P_1,P_2)$ è la distanza tra i punti P_1 e P_2 e α, β sono costanti positive. Il punto P_3 è collegato ai punti P_1 e P_2 tramite due molle, entambe di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sia g l'accelerazione di gravità (cfr. la figura 12.12).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate x_1, x_2, y tali che $P_1 = (x_1, 0)$, $P_2 = (x_2, 0)$ e $P_3 = (0, y)$.

(2) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di α, β, k, g.
(3) Si discuta in particolare il caso in cui sia $\alpha = \beta = 1$ e $k = 5$, e si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza della configurazione di equilibrio stabile risultante.

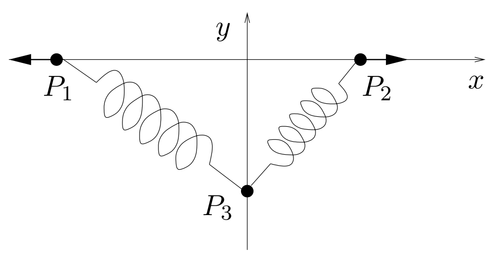

Figura 12.12: Sistema discusso nell'esercizio 22.

[*Suggerimento.* L'energia potenziale relativa alle due forze repulsive si può determinare utilizzando l'esercizio 20 oppure, imponendo fin dall'inizio il vincolo che i punti P_1 e P_2 si muovono lungo l'asse x, ragionando come segue. Siano x_1 e x_2 le coordinate dei punti P_1 e P_2, rispettivamente. Se $x_1 > x_2$ le forze repulsive che agiscono sul punto P_1 sono date da

$$f_1 = \frac{\alpha}{(x_1 - x_2)^2} + \beta \, (x_1 - x_2)^4 \, ,$$

dove si è tenuto conto che la forza è positiva perché punta dal punto P_2 al punto P_1, così che, se scriviamo $f_1 = -\partial V_{\rm rep}/\partial x_1$, troviamo

$$V_{\rm rep} = V_{\rm rep}(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{x_1 - x_2} - \frac{1}{5}\beta \, (x_1 - x_2)^5 \, .$$

Analogamente, se $x_1 < x_2$, si trova

$$f_1 = -\frac{\alpha}{(x_1 - x_2)^2} - \beta \, (x_1 - x_2)^4 \qquad \Longrightarrow \qquad V_{\rm rep}(x_1, x_2) = -\frac{\alpha}{x_1 - x_2} + \frac{1}{5}\beta \, (x_1 - x_2)^5 \, .$$

Possiamo scrivere l'energia potenziale come un'unica espressione nella forma

$$V_{\rm rep}(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{|x_1 - x_2|} - \frac{1}{5}\beta \, |x_1 - x_2|^5 \, ,$$

valida sia per $x_1 > x_2$ sia per $x_1 < x_2$; si noti che la funzione $V_{\rm rep}(x_1, x_2)$ è C^∞ per ogni $x_1 \neq x_2$.]

Esercizio 23 Si consideri un sistema rigido continuo $(\mathcal{C}, \rho)$, dove $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ e $\rho(\boldsymbol{x})$ è la densità di massa. Su ogni elemento infinitesimo di coordinate $\boldsymbol{x}$ e di massa ${\rm d}m(\boldsymbol{x}) := \rho(\boldsymbol{x})\,{\rm d}\boldsymbol{x}$ del sistema interagisce una forza conservativa $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = {\rm d}m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$, per qualche funzione $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Si determini l'energia potenziale del sistema. In particolare si discuta il caso in cui il sistema rigido sia omogeneo. [*Soluzione.* Per ogni punto elemento infinitesimo si può definire una *densità di energia potenziale* $u(\boldsymbol{x})$ scrivendo

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}).$$

L'energia potenziale del sistema rigido è allora data da

$$V = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \rho(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}).$$

Se il sistema rigido $(\mathcal{C}, \rho)$ è omogeneo allora $\rho(\boldsymbol{x})$ è costante e quindi $\rho(\boldsymbol{x}) = m/|\mathcal{C}|$, se m e $|\mathcal{C}|$ sono, rispettivamente, la massa e il volume del sistema.

Esercizio 24 Un sistema meccanico è costituito da tre punti P_1, P_2 e Q, di masse, rispettivamente, $m_1 = m_2 = m$ e $m_3 = 2m$, vincolati su un piano verticale π. I due punti P_1 e P_2 si muovono lungo un asse orizzontale (che si può identificare con l'asse x) e sono entambi collegati a Q tramite due sbarre rettilinee di lunghezza L e massa trascurabile. Il punto P_1 è collegato a un punto fisso O dell'asse lungo cui scorre tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sia g l'accelerazione di gravità (cfr. la figura 12.13).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'ascissa x del punto Q lungo l'asse orizzontale e l'angolo θ che la retta passante per i punti P_1 e Q forma con tale asse.
(2) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Per $k = 0$ si discuta qualitativamente il moto.
(4) Sempre per $k = 0$, partendo dalla configurazione iniziale

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0, \qquad \theta(0) = 0, \qquad \dot{\theta}(0) = 0,$$

si descriva qualitativamente il moto e si determini la forza vincolare nel punto Q in funzione del tempo, in particolare quando tale punto si trova a quota $L/\sqrt{2}$ al di sotto dell'asse x.
(5) Si discuta come si modifica la trattazione se entrambe le sbarre hanno massa M e sono omogenee.

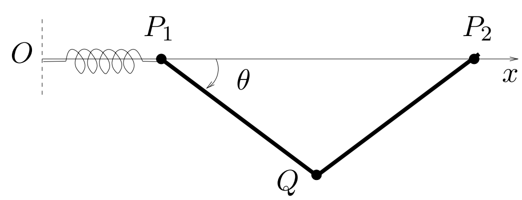

Figura 12.13: Sistema discusso nell'esercizio 24.

[*Suggerimento.* Se x_1 e x_2 indicano le coordinate lungo l'asse x dei punti P_1 e P_2, rispettivamente, risulta $x_1 = x - L\cos\theta$ e $x_2 = x \pm L\cos\theta$, se θ è calcolato come in figura 12.13; inoltre l'ordinata del punto Q vale $y = -L\sin\theta$. I due casi per x_2 vanno discussi separatamente: una volta fissati i dati iniziali, le scelta del segno $\pm$ è determinata in modo univoco. Consideriamo esplicitamente il caso $x_2 = x + L\cos\theta$ (nel caso $x_2 = x - L\cos\theta$ si ragiona in modo analogo). Nel caso in cui le sbarre abbiano massa trascurabile, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V, \qquad T = m\big(2\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2\big), \qquad V = k\left(\frac{x^2}{2} + \frac{L^2\cos^2\theta}{2} - Lx\cos\theta\right) - 2mgL\sin\theta,$$

così che le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} 4m\ddot{x} = -kx + kL\cos\theta, \\ 2mL^2\ddot{\theta} = 2mgL\cos\theta - kLx\sin\theta + kL^2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Si hanno configurazioni di equilibrio per $\cos\theta = 0$ e $x = L\cos\theta = 0$, quindi per $\theta = \pm\pi/2$ e $x = 0$. Calcolando la matrice hessiana, si trova che $(x,\theta) = (0,\pi/2)$ è stabile, mentre $(x,\theta) = (0,-\pi/2)$ è instabile. Per $k = 0$ (i.e. in assenza di molla), si trova $\ddot{x} = 0$ e $L\ddot{\theta} = g\cos\theta$, quindi il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme, mentre l'equazione per la variabile θ descrive un moto unidimensionale di un punto di massa $m = 1$ ed energia potenziale $V = \alpha\sin\theta$, con $\alpha := g/L$; nel sistema del centro di massa, il sistema descrive un moto simile a quello di un pendolo semplice. Sempre per $k = 0$, considerando il moto che parte dalla configurazione al punto (4), la forza vincolare che agisce sul punto Q è data da

$$R^{(Q)} = (2m\ddot{x} - f_x^{(Q)}, 2m\ddot{y} - f_y^{(Q)}),$$

dove $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = L\dot{\theta}^2\sin\theta - L\cos\theta\ddot{\theta}$, $f_x^{(Q)} = 0$ e $f_y^{(Q)} = -2mg$, così che

$$R^{(Q)} = \left(0, 2m\left(L\dot{\theta}^2\sin\theta + g\cos^2\theta + g\right)\right) = \left(0, 2mg\left(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta + 1\right)\right),$$

dove si è usato che l'energia totale per il moto della variabile θ è $E(\theta,\dot{\theta}) = 0$ in corrispondenza dei dei dati iniziali scelti. In particolare, quando Q si trova a quota $L/\sqrt{2}$, si ha $\theta = \pi/4$ e quindi la forza vincolare è $R^{(Q)} = (0,0)$. Se le due sbarre hanno massa M, l'energia cinetica delle sbarre può essere calcolata utilizzando il teorema di König (teorema 39.2); il centro di massa C_1 della sbarra che connette i punti P_1 e Q ha coordinate $C_1 = (x - (L/2)\cos\theta, -(L/2)\sin\theta)$, quindi l'energia cinetica della sbarra è

$$T_1 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + L\sin\theta\,\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2,$$

dove il momento d'inerzia $I_1 = ML^2/12$ è calcolato in §45.1. L'energia potenziale gravitazionale si può calcolare procedendo come indicato nell'esercizio 23: si ha

$$V_1 = -\int_0^L \mathrm{d}u\,\frac{M}{L}gu\,\sin\theta = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta,$$

dove si è tenuto conto che la densità di massa M/L è costante, essendo la sbarra omogenea. Allo stesso modo si tratta la sbarra che connette i punti P_2 e Q. In conclusione la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = (2m+M)\,\dot{x}^2 + \left(m + \frac{M}{3}\right)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k\,(x - L\cos\theta)^2 + (2m+M)\,gL\sin\theta$$

e può essere discussa analogamente al caso $M = 0$.]

Esercizio 25 Un sistema meccanico è costituito da una sbarra omogenea di massa m, di lunghezza ℓ e di sezione trascurabile. Un estremo della sbarra è incernierato in un punto Q di un asta, anch'essa di sezione trascurabile, che ruota con velocità angolare $\omega(t)$; in pratica la sbarra è vincolata a muoversi in un piano che ruota con velocità angolare $\omega(t)$ intorno all'asse verticale. Sia g l'accelerazione di gravità (cfr. la figura 12.14).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Se $\omega(t) = \omega$ è costante, si verifichi che, nel sistema di riferimento solidale con il piano π che ruota intorno all'asta verticale con velocità angolare ω, il sistema ammette configurazioni di equilibrio relativo e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri ω, g, ℓ, m.

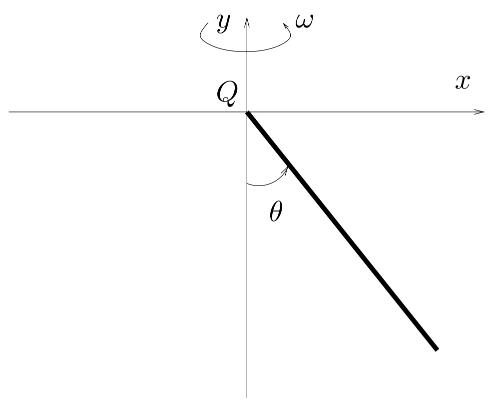

Figura 12.14: Sistema discusso nell'esercizio 25.

[*Suggerimento.* Fissiamo un sistema di coordinate $Oxyz$, in cui l'asse $\boldsymbol{e}_y$ sia diretto lungo la verticale e gli assi $\boldsymbol{e}_x$ e $\boldsymbol{e}_z$ siano ad esso ortogonali; siano θ l'angolo che la sbarra forma con l'asse $\boldsymbol{e}_y$ e φ l'angolo che la sua proiezione sul piano xz forma, per esempio con l'asse $\boldsymbol{e}_x$. Per calcolare l'energia cinetica della sbarra possiamo procedere in due modi:

1. Dividiamo la sbarra in elementi lineari infinitesimi di massa $\mathrm{d}m(\boldsymbol{x}) = \rho\,\mathrm{d}u$, con densità di massa $\rho = m/\ell$ e $u \in [0,\ell]$. Ogni elemento ha coordinate $\boldsymbol{x} = (u\sin\theta\cos\varphi, -u\cos\theta, u\sin\theta\sin\varphi)$. L'energia cinetica della sbarra si ottiene integrando sugli elementi infinitesimi, i.e.
$$T = \int_0^\ell \mathrm{d}m(\boldsymbol{x})\,|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = \frac{m}{\ell}\int_0^\ell \mathrm{d}u\,u^2\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) = \frac{1}{6}m\ell^2\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right).$$

2. In alternativa, possiamo applicare il teorem di König. Sia
$$\boldsymbol{x}_0 = \left(\frac{\ell}{2}\sin\theta\cos\varphi, -\frac{\ell}{2}\cos\theta, \frac{\ell}{2}\sin\theta\sin\varphi\right)$$
la coordinata del centro di massa della sbarra. L'energia cinetica del centro di massa è
$$T' = \frac{1}{2}m|\dot{\boldsymbol{x}}_0|^2 = \frac{1}{8}m\ell^2\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right).$$
La sbarra sta ruotando di un angolo φ intorno all'asse $\boldsymbol{e}_y$ e di un angolo θ intorno a un asse ortogonale all'asse della sbarra, per esempio $\boldsymbol{e}_2$. La velocità angolare è la somma delle due velocità angolari (cfr. il lemma 34.25):
$$\boldsymbol{\omega} = \dot\theta\boldsymbol{e}_2 + \dot\varphi\boldsymbol{e}_y = \dot\theta\boldsymbol{e}_2 + \dot\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \dot\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_3,$$
dove si è usato che $\boldsymbol{e}_y = \sin\theta\boldsymbol{e}_1 + \cos\theta\boldsymbol{e}_3$ (cfr. la figura 8.13 del capitolo 8, con l'asse $\boldsymbol{e}_2$ sostituito dall'asse $\boldsymbol{e}_3$). Se scriviamo $\boldsymbol{\omega} = \Omega_1\boldsymbol{e}_1 + \Omega_2\boldsymbol{e}_2 + \Omega_3\boldsymbol{e}_3$, otteniamo
$$T'' = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) = \frac{1}{2}I_1\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) = \frac{m}{24}\ell\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right),$$

poiché $I_1 = I_2 = m\ell^2/12$ e $I_3 = 0$ (cfr. il §45.1). L'energia cinetica totale è la somma di $T' + T''$: si verifica immediatamente che $T' + T'' = T$, dove T è la funzione trovata con il procedimento 1.

L'energia potenziale gravitazionale è data da

$$V_{\rm gr} = -\int_0^\ell {\rm d}u\, \frac{m}{\ell} gu \cos\theta = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta.$$

In conclusione, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6} m\ell^2 \left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + mg\frac{\ell}{2}\cos\theta,$$

dove $\dot\varphi = \omega(t)$; se $\omega(t) = \omega$, con ω costante, si ha $\varphi = \omega t$. Per individuare le configurazioni di equilibrio relativo ci dobbiamo mettere in un sistema di riferimento in cui il piano rotante è fisso; in tale sistema l'energia cinetica, calcolata sempre tramite il teorema di König, è

$$T_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot\theta^2 = \frac{1}{6} m\ell^2\dot\theta^2,$$

mentre l'energia potenziale è data da $V_0 = V_{\rm gr} + V_{\rm cfr}$, dove $V_{\rm gr}$ è l'energia potenziale calcolata precedentemente e $V_{\rm cf}$, l'energia potenziale centrifuga dovuta alla rotazione del piano, è

$$V_{\rm cf} = -\frac{1}{2}\int_0^\ell {\rm d}u\, \frac{m}{\ell}\omega^2\, u^2 \sin^2\theta = -\frac{1}{6} m\ell^2\omega^2 \sin\theta^2.$$

Si noti che $\mathcal{L}_0 = T_0 + V_{\rm gr} + V_{\rm cf} = \mathcal{L}$, dove $\mathcal{L}$ è la lagrangiana calcolata precedentemente nel sistema fisso. Questo comporta che le equazioni del moto per la variabile θ sono le stesse, in entrambi i sistemi di riferimento (come era lecito attendersi *a priori*): quello che cambia è che il contributo dovuto alla rotazione del piano appare come un termine cinetico nel sistema fisso e come un contributo centrifugo (quindi dovuto a una forza apparente) nel sistema di riferimento mobile. Nel sistema di riferimento mobile l'energia potenziale è

$$V_0 = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{1}{6} m\ell^2\omega^2\sin\theta^2.$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono richiedendo

$$V_0'(\theta) = \frac{1}{2} mg\ell\sin\theta - \frac{1}{3} m\ell^2\omega^2 \sin\theta\cos\theta = \left(\frac{1}{2} mg\ell - \frac{1}{3} m\ell^2\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0,$$

che è soddisfatta per $\sin\theta = 0$ o per θ tale che $\cos\theta = \alpha := 3g/2\ell\omega^2$. Si hanno due configurazioni di equilibrio, $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, che esistono per ogni valore dei parametri, e due configurazioni, $\theta = \pm\theta_0$, dove $\theta_0 = \arccos\alpha$, che esistono solo se $\alpha < 1$. Poiché $V_0''(\pi) < 0$ e $V_0''(0) = m\ell^2\omega^2(\alpha - 1)/3$, la configurazione π è sempre instabile, mentre 0 è stabile se $\alpha > 1$ e instabile se $\alpha < 1$. Le configurazioni $\pm\theta_0$, quando esistono ($\alpha < 1$) sono stabili, poiché $V_0''(\pm\theta_0) = m\ell^2\omega^2(1 - \alpha^2)/3$. Per $\alpha = 1$, la configurazione $\theta = 0$ è stabile, poiché è un punto di minimo della funzione $V_0(\theta)$.]

Esercizio 26 Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, vincolati a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano (x, y), su profili di equazione, rispettivamente, $y = 1$ e $y = x^2$; sia g l'accelerazione di gravità. I due punti sono inoltre collegati da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (cfr. la figura 12.15).

(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(3) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile (se esiste), per i seguenti valori dei parametri: $2k = g = 1$.

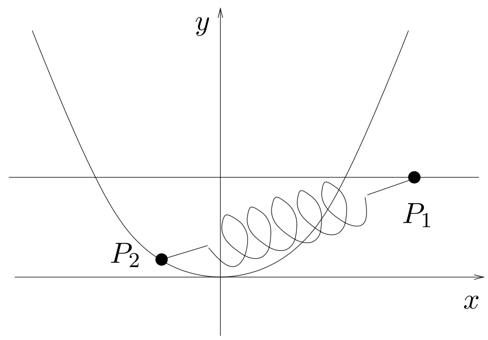

Figura 12.15: Sistema discusso nell'esercizio 26.

[*Suggerimento.* Si usino come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 e x_2 dei due punti P_1 e P_2, rispettivamente, così che $P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, 1)$ e $P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, x_2^2)$. A meno di termini costanti, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V, \qquad T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + (1 + 4x_2^2)\dot{x}_2^2\right), \qquad V = gx_2^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^4 - x_2^2 - 2x_1x_2\right).$$

Sia $\alpha := g/k$. Se $\alpha \geq 1$, si ha una sola configurazione di equilibrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$, che è stabile (il caso $\alpha = 1$ va discusso a parte notando che $V \geq 0$ in tal caso e $V = 0$ se e solo se $x_1 = x_2 = 0$), mentre se $\alpha < 1$, oltre alla configurazione di equilibrio $(x_1, x_2) = (0, 0)$, che diventa instabile, si hanno anche le due configurazioni $(x_1, x_2) = \pm(\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1-\alpha})$, che sono stabili; si ha quindi in $\alpha = 1$ una biforcazione a forcone supercritica (cfr. l'esempio 58.16). Se $f^{(1)} = (f_x^{(1)}, f_y^{(1)})$ è la forza che agisce sul punto P_1 e $R^{(1)} = (R_x^{(1)}, R_y^{(1)})$ è la forza vincolare sul punto P_1, si ha

$$\ddot{x}_1 = f_x^{(1)} + R_x^{(1)}, \qquad \ddot{x}_2 = f_x^{(2)} + R_x^{(2)}.$$

La forza $f^{(1)}$ è data da

$$f_x^{(1)} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1}, \qquad f_y^{(2)} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial y_1},$$

dove

$$\bar{V} = gy_1 + gy_2 + \frac{1}{2}k\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)$$

è l'energia potenziale del sistema quando si ignorano i vincoli. In corrispondenza della configurazione di equilibrio si ha $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0$, quindi per il punto (3), tenendo conto che la configurazione di equlibrio stabile è $(0, 0)$ poiché $\alpha = 2$, si trova

$$R_x^{(1)} = k(x_1 - x_2) = 0, \qquad R_y^{(1)} = k(y_1 - y_2) + gy_1 = k + g = \frac{3}{2},$$

poiché $y_1 = 1$ e $x_1 = x_2 = y_2 = 0$.]

Esercizio 27 Un sistema meccanico è costituito da due punti P_1 e P_2, di massa $m_1 = m_2 = 1$ e vincolati a muoversi lungo una guida posta in un piano verticale π. Introducendo in π un sistema di coordinate (x, y), la guida risulta definita dall'equazione $y = x^2$ e i due punti P_1 e $_2$ sono individuati dalle coordinate (x_1, x_1^2) e (x_2, x_2^2) rispettivamente. Sul sistema agisce la forza peso; sia g l'accelerazione di gravità. Inoltre il piano π ruota intorno all'asse verticale $x = 0$ con velocità angolare uniforme ω. Si studino le tre seguenti configurazioni.

- Il punto P_2 è fisso nell'origine e il punto P_1 è mobile e collegato all'asse verticale $x = 0$ da una molla di costante elastica k.
- Il punto P_2 è fisso nell'origine e il punto P_1 è mobile e collegato all'asse orizzontale $y = 0$ da una molla di costante elastica k.
- I punti P_1 e P_2 sono mobili e collegati tra loro da una molla di costante elastica k (cfr. la figura 12.16).

(1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange, nei tre casi sopra considerati.
(2) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare della velocità angolare ω, nei tre casi sopra considerati.

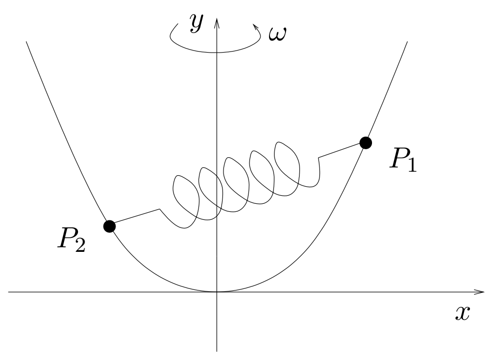

Figura 12.16: Terza configurazione del sistema discusso nell'esercizio 27.

[*Suggerimento.* Nel primo caso la molla unisce il punto P_1 a un punto Q di massa nulla che si muove lungo l'asse y in modo tale che si abbia $Q = (0, y_1)$, se $P = (x_1, y_1)$, con $y_1 = x_1^2$: in altre parole il punto Q è sempre alla stessa quota del punto P_1. Si noti che tale situazione si può immaginare ottenuta a partire da un punto di massa $m_0 > 0$ che si muova lungo l'asse y, nel limite $m_0 \to 0$. Infatti, se $Q = (0, y_0)$, la corrispondente lagrangiana è della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_0 y_0^2 + \frac{1}{2} k \left(x_1^2 + (y_0 - y_1)^2 \right) + \mathcal{L}'$$

dove il primo termine descrive l'energia cinetica del punto Q, il secondo tiene descrive l'energia potenziale elastica dovuta alla molla che unisce i punti P_1 e Q, mentre il termine $\mathcal{L}'$ tiene conto degli altri conributi che non dipendono da y_0 né da $\dot{y}_0$. Scrivendo le equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene

$$m_0 \ddot{y}_0 = -k(y_0 - y_1),$$

così che, nel limite $m_0 \to 0$, si ha $y_0 = y_1$ identicamente. Analogamente, nel secondo caso, si ha $Q = (x_1, 0)$, se x_1 è l'ascissa del punto P_1. In conclusione, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\big(1 + 4x_1^2\big) - gx_1^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

nel primo caso e

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\big(1 + 4x_1^2\big) - gx_1^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^4$$

nel secondo. Per quanto riguarda le configurazioni di equilibrio, si ha la seguente situazione. Nel primo caso, se $k-\omega^2+2g = 0$ non si hanno configurazioni di equilibrio, altrimenti si ha la sola configurazione di equilibrio $x_1 = 0$, che è stabile se $k - \omega^2 + 2g > 0$ e instabile se $k - \omega^2 + 2g < 0$. Nel secondo caso, l'energia potenziale è

$$V(x_1) = \alpha x_1^4 - \beta x_1^2, \qquad \alpha := \frac{k}{2}, \qquad \beta := \frac{\omega^2}{2} - g,$$

così che se $\beta < 0$ si ha la sola configurazione di equilibrio $x_1 = 0$, che è stabile, mentre se $\beta > 0$, oltre a $x_1 = 0$ (che diventa instabile), si hanno le due configurazioni di equilibrio $x_1 = \pm\sqrt{\beta/2\alpha}$, che sono stabili. Si noti che in $\beta = 0$ si ha una biforcazione a forcone superctitica (cfr. l'esempio 58.16). Infine nel terzo caso, la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2\big(1 + 4x_1^2\big) + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2\big(1 + 4x_2^2\big) + \Big(\frac{\omega^2}{2} - g\Big)\big(x_1^2 + x_2^2\big) - \frac{k}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2\right),$$

che è più conveniente da studiare dopo aver effettuato il cambio di variabili $s := x_1 + x_2$ e $d := x_1 - x_2$. In termini delle nuove variabili, la lagrangiana diventa $\mathcal{L} = T - V$, dove

$$T = \Big(\frac{1}{4} + s^2 + d^2\Big)\dot{s}^2 + \Big(\frac{1}{4} + 4s^2 + 4d^2\Big)\dot{d}^2 + 4sd\dot{s}\dot{d}, \quad V = \alpha s^2 d^2 + (\alpha - 2\beta)\, d^2 - 2\beta s^2,$$

con α e β definiti come sopra. Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai valori (s, d) tali che

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 2\big(\alpha d^2 - 2\beta\big)s = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial s} = 2\big(\alpha s^2 + \alpha - 2\beta\big)d = 0.$$

Se $\alpha > 2\beta$, l'unica configurazione di equilibrio è $(s, d) = (0, 0)$; se invece $\alpha = 2\beta$, oltre a $(0, 0)$ ci sono le due configurazioni $(0, \pm1)$; infine se $\alpha < 2\beta$, oltre a $(0, 0)$, ci sono anche quattro ulteriori configurazioni $(s, d) = (\pm s_0, \pm d_0)$, dove $s_0 := \sqrt{(2\beta - \alpha)/\alpha}$ e $d_0 := \sqrt{2\beta/\alpha}$. La stabilità delle configurazioni di equilibrio si determina studiando la matrice hessiana

$$\mathcal{H}(s, d) = \begin{pmatrix} 2(\alpha d^2 - 2\beta) & 4\alpha ds \\ 4\alpha sd & 2(\alpha s^2 + \alpha - 2\beta) \end{pmatrix}.$$

La configurazione $(0, 0)$ è stabile se e solo se $\beta < 0$, i.e. $\omega^2 < 2g$; il caso $\beta = 0$ va discusso a parte: l'energia potenziale è $V = \alpha s^2 d^2 + \alpha d^2$, così che l'intera retta $d = 0$ risulta costituita da punti di equilibrio instabili. Le due configurazioni $(0, \pm1)$, che esistono per $\alpha = 2\beta$, sono instabili; infatti in tal caso l'energia potenziale diventa $V = \alpha s^2(d^2 - 1)$, così che $(s, d) = (0, \pm1)$ sono punti di sella. Le altre quattro configurazioni, che esistono solo per $\alpha < 2\beta$, sono anch'essi tutti instabili, come si verifica immediatamente notando che, in tal caso, si ha $\det \mathcal{H}(\pm s_0, \pm d_0) = -32\beta(2\beta - \alpha) < 0$.]

Esercizio 28 Un sistema meccanico appartenente a un piano verticale π è costituito da un disco omogeneo di raggio r e massa m, vincolato a rotolare senza strisciare all'interno di una circonferenza di raggio R tale che $\ell := R - r > 0$. Il centro C del disco è connesso tramite una molla elastica con costante di richiamo k e di lunghezza a riposo nulla a un punto fisso P, posto sulla verticale passante per il centro O della circonferenza, a distanza d da esso. Sia g l'accelerazione di gravità. Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo θ che OC forma con la verticale per O (cfr. la figura 12.17).
(1) Si scrivano la lagrangiana che descrive il sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si determini quale valore d_0 deve assumere d, in funzione dei parametri del sistema, perché il disco rotoli senza strisciare come se fosse libero (cioè come se su esso non agisse nessuna forza attiva).
Si supponga ora che sia $d = d_0/2$.
(3) Si studi il moto nel piano $(\theta, \dot\theta)$ e si discuta per quali dati iniziali si hanno traiettorie periodiche.
(4) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
(5) Se il piano verticale π ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale passante per O, mettendosi nel sistema di riferimento solidale con il piano π si determinino le nuove configurazioni di equilibrio (relativo) e se ne discuta la stabilità al variare del valore di ω.
(6) Si determinino le forze vincolari che agiscono sul centro C del disco in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile trovata al punto precedente per $\omega^2 = g/\ell$.

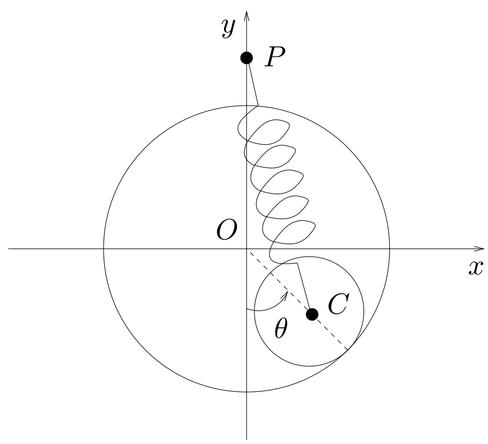

Figura 12.17: Sistema discusso nell'esercizio 28.

[*Suggerimento.* Si tenga conto della discussione dell'esempio 53.8 per imporre il vincolo di rotolamento senza strisciamento. Le energie potenziali gravitazionale e centrifuga del disco si calcolano procedendo come indicato nell'esercizio 23. Nel caso in cui il piano ruoti si trova quindi $\mathcal{L} = T - V$, dove

$$T = \frac{3}{4} m\ell^2\dot\theta^2, \qquad V = kd\ell\cos\theta - mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\theta,$$

mentre l'ultimo termine in V è assente nel caso in cui il piano sia fermo ($\omega = 0$). In particolare per $\omega = 0$ l'energia potenziale è nulla se $d = d_0 := mg/k$. Per $\omega = 0$ e $d = d_0/2$ il sistema si comporta come il pendolo (senza attrito) descritto al §24. Se $\omega \neq 0$ e $d = d_0/2$, l'energia potenziale è

$$V = -\frac{1}{2}mg\ell\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin^2\theta.$$

Se $\alpha := g/2\omega^2\ell$, le configurazioni di equilibrio si ottengono richiedendo che θ sia tale che $\sin\theta = 0$ oppure, se $\alpha < 1$, $\cos\theta = \alpha$: la configurazione d'equilibrio $\theta = 0$ è stabile se $\alpha \leq 1$ e instabile altrimenti, la configurazione d'equilibrio $\theta = \pi$ è sempre instabile e, se $\alpha < 1$, esistono anche le configurazioni di equilibrio stabili $\theta = \pm\theta_0$, con $\theta_0 := \arccos\alpha$; in $\alpha =$ si ha pertanto una biforcazione a forcone supercritica. Se $\omega^2 = g/\ell$, come al punto (3), si ha $\alpha = 1/2$, quindi le configurazioni di equilibrio stabili sono $\pm\theta_0$. Si consideri una delle due configurazioni, per esempio $\theta = \theta_0$, così che $\theta_0 = \arccos 1/2 = \pi/3$ e $\sin\theta_0 = \sqrt{3}/2$. Le coordinate cartesiane del centro C sono $C = (\ell\sin\theta_0, -\ell\cos\theta_0) = (\sqrt{3}\ell/2, -\ell/2)$. Per determinare le forze vincolari $R = (R_x, R_y)$ che agiscono su C si calcolano innanzitutto le forse attive $f = (f_x, f_y)$, partendo dall'espressione per l'energia potenziale in assenza di vincoli

$$V = \frac{1}{2}k\left(x^2 + (y-d)^2\right) + mgy - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Si trova $f_x = -kx + m\omega^2 x$ e $f_y = -k(y-d) - mg$. Poiché si ha $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ in corrispondenza di una configurazione di equilibrio, si ottiene $R_x = m\ddot{x} - f_x = \left(k - m\omega^2\right)x$ e $R_y = m\ddot{y} - f_y = k\,(y-d) + mg$. Sostituendo i valori $d = mg/2k$ e $\omega^2 = g/\ell$, si ottiene $R_x = 3\,(k\ell - mg)\,/2$ e $R_y = (mg - k\ell)\,/2$.]

Esercizio 29 Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un punto materiale P di massa $m = 1$, vincolato a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano (x, y), lungo una guida descritta dall'equazione $y = x^2$. Il piano verticale ruota intorno all'asse verticale y con velocità angolare costante ω. Il punto P è sottoposto alla forza di gravità ed è collegato all'estremo di una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, che ha l'altro estremo fissato nell'origine. Sia g l'accelerazione di gravità (cfr. la figura 12.18).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si trovino le configurazioni di equilibrio in un sistema di riferimento solidale con il piano rotante.
(3) Se ne discuta la stabilità.
(4) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile (se esiste) per i valori dei parametri $\omega = \sqrt{11}$, $g = 1$ e $k = 1$.

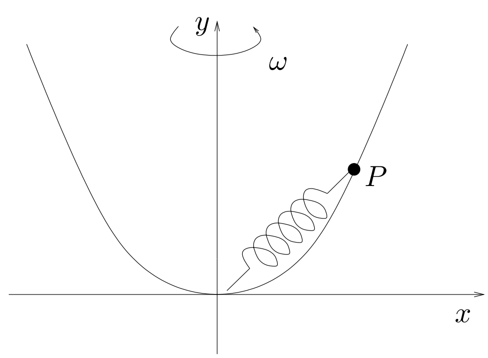

Figura 12.18: Sistema discusso nell'esercizio 29.

Esercizio 30 Si consideri il sistema lagrangiano costituito da due punti materiali P_1 e P_2, di massa rispettivamente m_1 e m_2, vincolati a muoversi in un piano verticale nel modo seguente. Il punto P_1 si

muove lungo una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio $R = 1$, e il punto P_2 si muove lungo una guida rettilinea infinita di massa nulla tangente alla circonfenza $\mathcal{C}$ in P_1. Il punto P_2 è collegato al punto P_1 e al centro C della circonferenza da due molle, entrambe di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Il sistema è sottoposto all'azione della gravità; sia g l'accelerazione di gravità (cfr. la figura 12.19).
(1) Quanti gradi di libertà ha il sistema?
(2) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(3) Si determinino le configurazioni di equilibrio nel sistema nel caso in cui sia $m_1 = 0$ e $m_2 = 1$, e se ne studi la stabilità; si discuta il comportamento asintotico nei limiti $k \to 0$ e $k \to +\infty$.
(4) Si determinino le configurazioni di equilibrio nel sistema nel caso in cui sia $m_1 = m_2 = 1$, e se ne discuta la stabilità.

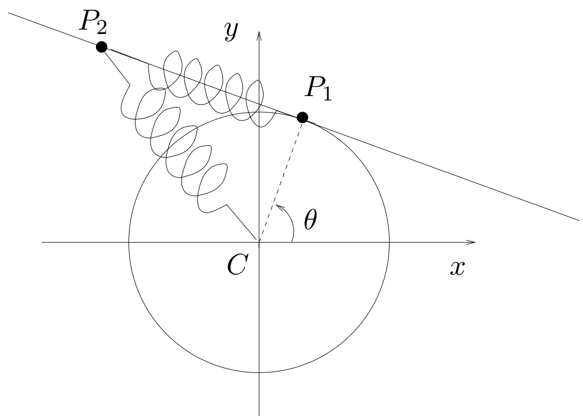

Figura 12.19: Sistema discusso nell'esercizio 30.

[*Suggerimento.* Il sistema ha due gradi di libertà: le configurazioni del sistema possono essere identificate dando l'angolo θ che il raggio vettore OP_1 forma con l'asse x e la posizione s che il punto P_2 occupa lungo la retta individuata dalla guida. Si ha infatti

$$P_1 = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad P_2 = (\cos\theta - s\sin\theta, \sin\theta + s\cos\theta),$$

dove si è tenuto conto che la guida è tangente all circonferenza nel punto di contatto P_1. L'energia cinetica e l'energia potenziale sono, rispettivamente,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\big(\dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{s}\,\dot{\theta}\big), \qquad V = ks^2 + m_1 g\sin\theta + m_2 g\big(\sin\theta + s\cos\theta\big).$$

ccosì che la lagrangiana è $\mathcal{L} = T - V$, e le equazioni di Eulero-Lagrange sono

$$\begin{cases} m_1\ddot{\theta} + m_2\ddot{\theta} + m_2 s^2\ddot{\theta} + m_2\ddot{s} + 2m_2 s\dot{s}\dot{\theta} = -\big(m_1 + m_2\big)g\cos\theta + m_2 g s\sin\theta, \\ m_2\ddot{\theta} + m_2\ddot{\theta} = -ks - m_2 g\cos\theta. \end{cases}$$

Se $m_1 = 0$ e $m_2 = 1$, si ha $V = ks^2 + g\big(\sin\theta + s\cos\theta\big)$, così che (s, θ) è una configurazione di equilibrio se verifica

$$\frac{\partial V}{\partial s} = 2ks + g\cos\theta = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = g\big(\cos\theta - s\sin\theta\big) = 0.$$

La prima equazione richiede $s = -g\cos\theta/2k$, che, introdotta nella seconda, implica $\cos\theta = 0$ oppure $\sin\theta = -\alpha$, dove $\alpha := 2k/g$. L'equazione $\cos\theta$ è soddisfatta se $\theta = \pm\pi/2$ e in tal caso si ha $s = 0$. Tenendo conto che $k, g \geq 0$, l'equazione $\sin\theta = -\alpha$ è soddisfatta per $\theta = \theta_0 := \arcsin\alpha$ o $\theta = \theta_1 := -\pi + \theta_0$, purché si abbia $\alpha \in (0,1)$; definiamo $s_0 = -g\cos\theta_0/2k$ e $s_1 = -g\cos\theta_1/2k$. Si noti che se $\alpha = 0$ si ritrova $\cos\theta = 0$ (i.e. $\theta = \pm\pi/2$) e $s = 0$; se invece $\alpha = 1$ si ha $\theta = -\pi/2$ e $s = 0$. La matrice hessiana di V è

$$\mathcal{H}(s,\theta) = \begin{pmatrix} 2k & -g\sin\theta \\ -g\sin\theta & -g\sin\theta - gs\cos\theta \end{pmatrix},$$

da cui si deduce che $(s,\theta) = (0,\pi/2)$ è sempre instabile, $(s,\theta) = (0,-\pi/2)$ è stabile se $2k > g$ e instabile se $2k < g$, e le configurazioni (s_0,θ_0) e (s_1,θ_1) sono stabili quando esistono ($2k < g$). Il caso $2k = g$ va discusso a parte. Per tali valori dei parametri, oltre a $(0,\pi/2)$ l'unica altra configurazione di equilibrio è $(0,-\pi/2)$. Ponendo $\theta = -\pi/2 + \varphi$, si ha

$$V\Big(s, -\frac{\pi}{2} + \varphi\Big) = \text{costante} + k(s^2 + \varphi^2 + 2s\varphi) - \frac{k}{3}s\varphi^3 + \ldots = \text{costante} + k(s+\varphi)^2 - \frac{k}{3}s\varphi^3 + \ldots,$$

da cui si vede che $(0,-\pi/2)$ è un punto di sella: quindi la configurazione $(0,-\pi/2)$ è instabile. Sia nel limite $k \to 0$ (che comporta $\alpha \to 0$) che nel limite $k \to +\infty$ (che comporta $\alpha \to +\infty$) gli unici punti di equilibrio sono $(0,\pi/2)$ e $(0,-\pi/2)$. Il primo è sempre instabile, mentre il secondo è stabile se $k \to +\infty$ e instabile se $k \to 0$. Il caso in cui si abbia $m_1 = m_2 = 1$ può essere discusso in modo simile notando che l'energia potenziale è $V = ks^2 + g\big(2\sin\theta + s\cos\theta\big)$ per i valori considerati delle masse.]

Esercizio 31 Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti P_1 e P_2, entrambi di massa $m = 1$, vincolati a muoversi lungo una retta orizzontale. Siano x_1 e x_2 le posizioni, rispettivamente, dei punti P_1 e P_2 lungo la retta, calcolate a partire da un punto fissato O. I punti sono soggetti alle seguenti forze: P_1 è attratto dal punto O tramite una forza elastica con costante $k = 1$; P_2 è attratto dal punto O tramite una forza elastica con costante $k = 1$; P_1 e P_2 si attraggono tramite una forza elastica con costante $k = 1$ e si respingono con una forza $\alpha\,|x_2 - x_1|^3$, con $\alpha > 0$.
(1) Si scrivano la lagrangiana e le equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si determinino le configurazioni di equilibrio.
(3) Se si fissa a $\ell > 0$ la distanza $x_1 - x_2$ tra i due punti P_1 e P_2, si scriva come si modifica la lagrangiana del sistema e si determinino le nuove configurazioni di equilibrio.
(4) Se si eliminano le due interazioni elastiche tra i punti P_1 e P_2 con il punto fissato O, si trovi la lagrangiana ridotta con il metodo di Routh e si scrivano le nuove equazioni di Eulero-Lagrange.

Esercizio 32 Si consideri il pendolo doppio dell'esercizio 51 del capitolo 11 e si studi come si modificano la lagrangiana e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange nel caso in cui il piano in cui si svolge il moto ruoti intorno a un asse verticale passante per il punto di sospensione fisso, con velocità angolare costante.

Esercizio 33 Si consideri il sistema lagrangiano ottenuto da un pendolo doppio (cfr. l'esercizio 51 del capitolo 11) attraverso la seguente modifica: la massa m_2 del secondo pendolo è collegato al punto di sospensione fisso O del primo pendolo tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e di lunghezza a riposo trascurabile (cfr. la figura 12.20).
(1) Si scriva la lagrangiana del sistema.
(2) Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(3) Si determinino le eventuali configurazioni di equilibrio nel sistema.
(4) Se ne discuta la stabilità.

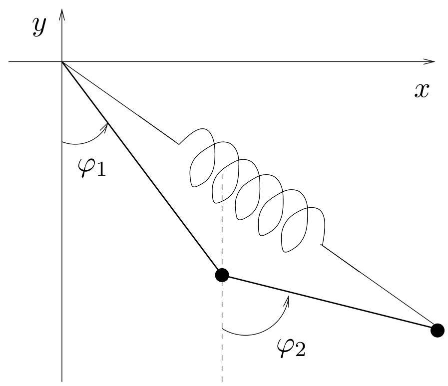

Figura 12.20: Sistema discusso nell'esercizio 33.

Esercizio 34 Si considerino i tre sistemi lagrangiani che si differenziano dal pendolo doppio dell'esercizio 51 del capitolo 11 in quanto:

1. il punto di massa m_2 è collegato al punto di massa m_1 tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e di lunghezza a riposo trascurabile (cfr. la figura 12.21);
2. il punto di massa m_1 e il punto di massa m_2 sono collegati a un punto fisso e al punto di massa m_1, rispettivamente, tramite due molle di costante elastica $k > 0$ e di lunghezza a riposo trascurabile (cfr. la figura 12.21);
3. il punto di massa m_1 e il punto di massa m_2 sono collegati a un punto fisso e al punto di massa m_1, rispettivamente, tramite due sbarre omogenee, entrambe di spessore trascurabile, di massa M_1 e lunghezza ℓ_1 la prima e di massa M_2 e lunghezza ℓ_2 la seconda.

(1) Si scrivano le lagrangiane e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange dei tre sistemi.
(2) Per ciascun sistema, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

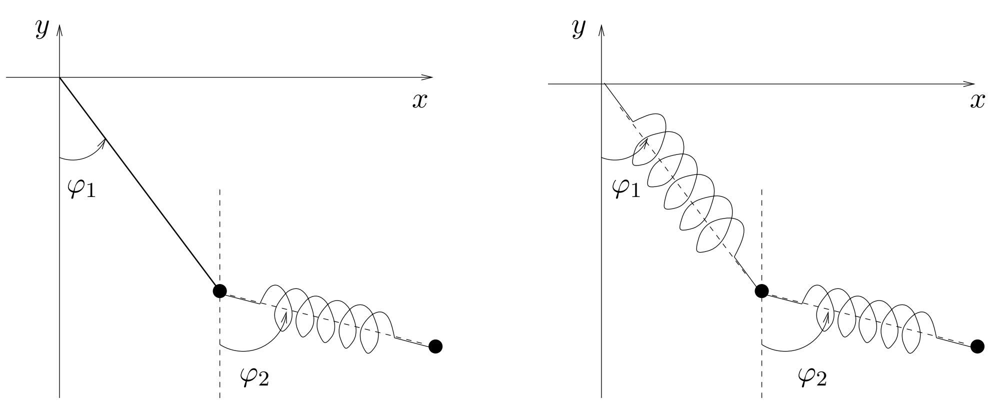

Figura 12.21: Sistemi 1 e 2 discussi nell'esercizio 34.

[*Suggerimento.* Nel caso 1 conviene usare come coordinate lagrangiane l'angolo φ_1 che il pendolo di massa m_1 forma con la verticale discendente e le coordinate cartesiane (x_2, y_2) del punto di massa m_2. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T - V$, dove

$$T = \frac{m_1}{2}\ell_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2\right), \quad V = -m_1 g\ell_1\cos\varphi_1 + m_2 g y_2 + \frac{k}{2}\left(x_2^2 + y_2^2\right) - k\ell_1 x_2\sin\varphi_1 + k\ell_1 y_2\cos\varphi_1,$$

a meno di termini costanti. Le configurazioni di equilibrio sono individuate dalle condizioni $\sin\varphi_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $k(y_2 + \ell\cos\varphi_1) + m_2 g = 0$; si hanno quindi due configurazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned}
&(Q_1) \qquad \varphi_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad y_2 = -\ell_1 - \frac{m_2 g}{k}, \\
&(Q_2) \qquad \varphi_1 = \pi, \qquad x_2 = 0, \qquad y_2 = \ell_1 - \frac{m_2 g}{k}.
\end{aligned}$$

La matrice hessiana dell'energia potenziale V è data da

$$\mathcal{H}(\varphi_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} m_1 g\ell_1\cos\varphi_1 - k\ell_1 y_2\cos\varphi_1 + k\ell_1 x_2\sin\varphi_1 & -k\ell_1\cos\varphi_1 & -k\ell_1\sin\varphi_1 \\ -k\ell_1\cos\varphi_1 & k & 0 \\ -k\ell_1\sin\varphi_1 & 0 & k \end{pmatrix},$$

così che

$$\mathcal{H}(0, 0, \mp\ell_1 - m_2 g/k) = \begin{pmatrix} \pm(m_1 + m_2)g\ell_1 + k\ell_1^2 & \mp k\ell_1 & 0 \\ \mp k\ell_1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

da cui si vede facilmente che (Q_1) e (Q_2) rappresentano rispettivamente un punto di minimo e un punto di sella per V. Ne segue che la configurazione d'equilibrio (Q_1) è stabile, mentre la configurazione (Q_2) è instabile. Nel caso 2 conviene usare coordinate cartesiane (x_1, y_1) e $x_2, y_2)$ per entrambi i punti. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T + V$, dove

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m_1}{2}\left(\dot x_1^2 + \dot y_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2\right), \\
V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{k}{2}\left(x_1^2 + y_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right),
\end{aligned}$$

è la somma di due lagrangiane indipendenti $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, dove $\mathcal{L}_1 = T_1 - V_1$ e $\mathcal{L}_2 = T_2 - V_2$, con

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\left(m_1\dot x_1^2 + m_2\dot x_2^2\right), \qquad V_1 = \frac{k}{2}\left(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\right), \\
T_2 &= \frac{1}{2}\left(m_1\dot y_1^2 + m_2\dot y_2^2\right), \qquad V_2 = g\left(m_1 y_1 + m_2 y_2\right) + \frac{k}{2}\left(2y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2\right).
\end{aligned}$$

Sia V_1 che V_2 ammettono un unico punto stazionario. Infatti, si ha

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = k(2x_1 - x_2), \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = -k(x_1 - x_2), \quad \frac{\partial V_2}{\partial y_1} = m_1 g + k(2y_1 - y_2), \quad \frac{\partial V_2}{\partial y_2} = m_2 g - k(y_1 - y_2),$$

così che si trova $(x_1, x_2) = (0, 0)$ per V_1 e $(y_1, y_2) = (-(m_1 + m_2)g/k, -(m_1 + 2m_2)g/k)$ per V_2. Poiché le matrici hessiane di V_1 e V_2 sono

$$\mathcal{H}_1(x_1, x_2) = \mathcal{H}_2(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{pmatrix},$$

entrambi i punti stazionari sono punti di minimo. Ne segue che $(0, 0, -(m_1+m_2)g/k, -(m_1+2m_2)g/k)$ è un punto di minimo per $V = V_1 + V_2$ e quindi una configurazione di equilibrio stabile per il sistema. Infine il caso 3 si discute come il pendolo doppio dell'esercizio 51 del capitolo 11, con l'unica differenza che l'energia cinetica ha un termine in più

$$T_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1\ell_1^2}{12}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{M_2\ell_2^2}{12}\dot{\varphi}_2^2\right),$$

dovuta all'energia cinetica delle due sbarre (cfr. il §45.1) e l'energia potenziale ha un termine in più

$$V_0 = -\frac{1}{2}\left(M_1\ell_1\cos\varphi_1 + M_2(\ell_1\cos\varphi_1 + \ell_2\cos\varphi_2)\right).$$

dovuta all'energia potenziale gravitazionale delle molle. In particolare si hanno quattro configurazioni di equilibrio: $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, 0)$, $(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi, 0)$, $(\varphi_1, \varphi_2) = (0, \pi)$ e $(\varphi_1, \varphi_2) = (\pi, \pi)$. La prima è stabile e le altre tre sono instabili.]

Esercizio 35 Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Sia x_0 un punto stazionario di f e sia $\mathcal{H}(x_0)$ la matrice hessiana di f in x_0. Si dimostri che

- se $\mathcal{H}(x_0)$ è definita positiva allora x_0 è un punto di minimo isolato per f,
- se $\mathcal{H}(x_0)$ è definita negativa allora x_0 un punto di massimo isolato per f.

[*Soluzione.* La matrice hessiana $\mathcal{H}(x_0)$ di f è, per definizione, la matrice di elementi $[\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j](x_0)$. Se la funzione f è di classe C^2 la matrice $\mathcal{H}(x_0)$ è simmetrica, per il teorema di Schwarz (cfr. l'esercizio 17 del capitolo 3), e ha di conseguenza n autovalori reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e n autovettori ortogonali $v_1, \ldots, v_n$ (cfr. gli esercizi 39 e 40 del capitolo 1). Nella base degli autovettori, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, si può scrivere $x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$, e quindi, in tale base, $\langle x, \mathcal{H}(x_0)x\rangle = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$. Se $\mathcal{H}(x_0)$ è definita positiva, si ha $\lambda_i > 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$ (cfr. anche l'esercizio 10 del capitolo 4). Sia $c := \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Si ha $c > 0$, da cui segue che $\langle x, \mathcal{H}(x_0)x\rangle \geq c(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = c|x|^2$. Poiché f è di classe C^2 e $\nabla f(x_0) = 0$ (poiché x_0 è un punto stazionario), si ha, scrivendo $\Delta x := x - x_0$,

$$f(x) = f(x_0) + \langle\Delta x, \mathcal{H}(x_0)\Delta x\rangle + o(|\Delta x|^2) \quad \Longrightarrow \quad f(x) - f(x_0) \geq c|\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2) \geq \frac{c}{2}|\Delta x|^2$$

per x sufficientemente vicino a x_0. Ne segue che esiste un intorno $B(x_0)$ di x_0 tale che $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$: quindi x_0 è un punto di minimo isolato. Il caso in cui $\mathcal{H}(x_0)$ sia definita negativa si tratta in modo analogo notando che in tal caso si ha $\langle x, \mathcal{H}(x_0)x\rangle \leq C|x|^2$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, dove $C = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} < 0$.]

Esercizio 36 Sia V l'energia potenziale di un sistema meccanico. Sia q_0 una configurazione di equilibrio. Si dimostri che se gli autovalori della matrice hessiana di V calcolata in q_0 sono tutti strettamente positivi, allora q_0 è una configurazione di equilibrio stabile. [*Soluzione.* Sia $\mathcal{H}(q_0)$ la matrice hessiana di V in q_0. Se gli autovalori di $\mathcal{H}(q_0)$ sono strettamente positivi allora $\mathcal{H}(q_0)$ è definita positiva (cfr. l'esercizio 10 del capitolo 4). Ne concludiamo che q_0 è un punto di minimo isolato (cfr. l'esercizio 35) e quindi, per il teorema 58.6, q_0 è una configurazione di equilibrio stabile.]

Esercizio 37 Si consideri il sistema lagrangiano costituito da tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa $m = 1$, vincolati a muoversi in un piano orizzontale (x, y); il punto P_1 si muove lungo la retta

di equazione $y = 0$, il punto P_2 lungo la retta di equazione $y = 1 + x$ e il punto P_3 lungo la retta di equazione $y = 1 - x$. I tre punti sono inoltre collegati tra loro da tre molle di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (cfr. la figura 12.22).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si determinino le eventuali configurazioni di equilibrio nel sistema e se ne discuta la stabilità.
(3) Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1 in corrispondenza di una configurazione di equilibrio stabile (se esiste).
(4) Si supponga ora che il piano (x, y) sia verticale: si discuta come cambia lo scenario tenendo conto della forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità).

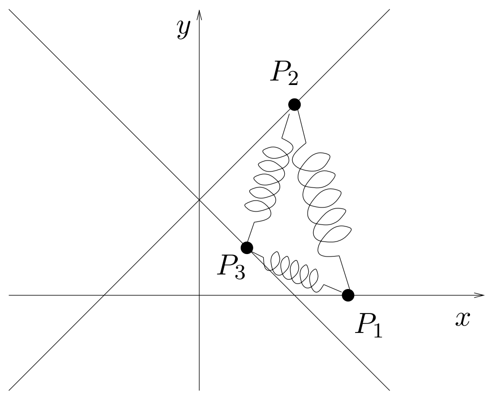

Figura 12.22: Sistema discusso nell'esercizio 37.

[*Suggerimento.* I punti hanno coordinate $P_1 = (x_1, 0)$, $P_2 = (x_2, 1 + x_2)$ e $P_3 = (x_3, 1 - x_3)$. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T - V$, dove l'energia cinetica T e l'energia potenziale V sono, rispettivamente,

$$T = \frac{1}{2}\big(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_3^2\big), \qquad V = k\big(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2 - x_3\big).$$

Le equazioni di Eulero-Larange sono

$$\ddot{x}_1 = -k(2x_1 - x_2 - x_3), \qquad 2\ddot{x}_2 = -k(4x_2 - x_1 + 1), \qquad 2\ddot{x}_3 = -k(4x_3 - x_1 - 1).$$

Le configurazioni di equilibrio corrispondono ai valori (x_1, x_2, x_3) tali che

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k\big(2x_1 - x_2 - x_3\big) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k\big(4x_2 - x_1 + 1\big) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_3} = k\big(4x_3 - x_1 - 1\big) = 0.$$

Dalle ultime due equazioni si ricava $x_2 = (x_1 - 1)/4$ e $x_3 = (x_1 + 1)/4$, che, inserite nella prima, implicano $x_1 = 0$: si ha una sola configurazione di equilibrio, data da

$$(Q) \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = -1/4, \qquad x_3 = 1/4.$$

La matrice hessiana di V è

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 4k & 0 \\ -k & 0 & 4k \end{pmatrix},$$

che è indipendente da x_1, x_2, x_3; si verifica facilmente che i suoi autovalori, 4 e $3 \pm \sqrt{3}$, sono tutti e tre strettamente positivi: ne segue (cfr. l'esercizio 36) che (Q) è una configurazione di equilibrio stabile. Per calcolare le forze vincolari, si devono innanzitutto calcolare le forze attive. Per far questo, si deve considerare l'energia potenziale in assenza di vincoli,

$$V_0 = \frac{k}{2}\big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\big),$$

dove (x_i, y_i) sono le coordinate cartesiane del punto P_i, $i = 1, 2, 3$. La forza attiva $f^{(1)}$ che agisce su P_1 ha componenti

$$f_x^{(1)} = -\frac{\partial V_0}{\partial x_1} = -k\big(2x_1 - x_2 - x_3\big), \qquad f_y^{(1)} = -\frac{\partial V_0}{\partial y_1} = -k\big(2y_1 - y_2 - y_3\big),$$

che, nella configurazione (Q), tenendo conto che si ha $y_1 = 0$, $y_2 = 1 + x_2$ e $y_3 = 1 - x_3$ quando si impone il vincolo, dànno $f_x^{(1)} = 0$ e $f_y^{(1)} = 2k$. La forza vincolare che agisce su P_1 è $R^{(1)} = (R_x^{(1)}, R_y^{(1)})$, dove $R_x^{(1)} = \ddot{x}_1 - f_x^{(1)} = 0$ e $R_y^{(2)} = \ddot{y}_1 - f_y^{(1)} = -2k$, dove si è tenuto conto che $\ddot{x}_1 = \ddot{y}_1 = 0$ essendo (Q) una configurazione di equilibrio. Infine, se il piano (x, y) è verticale, il sistema risente anche della forza di gravità. L'energia cinetica non cambia, mentre l'energia potenziale diventa

$$V = k\big(x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2 - x_3\big) + g\big(x_2 - x_3\big).$$

Le equazioni per individuare le configurazioni di equilibrio diventano

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = k\big(2x_1 - x_2 - x_3\big) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k\big(4x_2 - x_1 + 1\big) + g = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_3} = k\big(4x_3 - x_1 - 1\big) - g = 0.$$

Si trova di nuovo una sola configurazione di equilibrio:

$$(Q') \qquad x_1 = 0, x_2 = -\frac{k+g}{4k}, \qquad x_3 = \frac{k+g}{4k}.$$

La matrice hessiana è la stessa del caso precedente: la nuova configurazione è di nuovo stabile.]

Esercizio 38 Due dischi omogenei, entrambi di massa Me raggio r, rotolano senza strisciare lungo una guida posta su un piano orizzontale, mantenendosi sempre ortogonali al piano. I centri di massa dei due dischi sono collegati tra loro tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, e sono inoltre collegati entrambi a un punto materiale P di massa m tramite due aste omogenee identiche di lunghezza L e massa trascurabile. Sul sistema agisce la forza di gravità: sia g l'accelerazione di gravità. Si scelga un sistema di riferimento in cui il piano abbia equazione $z = 0$ e la guida abbia equazione $y = z = 0$ (cfr. la figura 12.23).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si determinino le eventuali configurazioni di equilibrio nel sistema e se ne discuta la stabilità.
(3) Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P.
(4) Si discuta come cambia la lagrangiana nel caso in cui le aste abbiano entrambe massa non nulla μ.
(5) Si determinino le configurazioni di equilibrio nel caso in cui si abbia $\mu \neq 0$.
(6) Si supponga ora che si abbia $\mu = 0$ e il piano ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante: si discuta l'esistenza e la stabilità di eventuali configurazioni di equilibrio relativo.

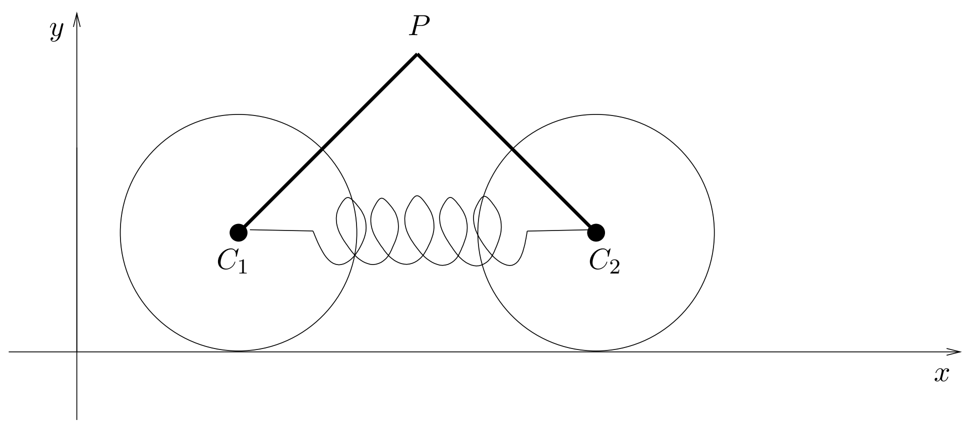

Figura 12.23: Sistema discusso nell'esercizio 38.

[*Suggerimento.* Siano C_1 e C_2 i centri dei due dischi. Come coordinate lagrangiane si possono usare l'ascissa x del punto P e l'angolo θ che l'asta che collega i punti C_1 e P forma con un asse prefissato, per esempio l'asse x. I punti P, C_1 e C_2 hanno allora coordinate cartesiane

$$P = (x, r + L\sin\theta), \qquad C_1 = (x - L\cos\theta, r), \qquad C_2 = (x + L\cos\theta, r).$$

L'energia cinetica e l'energia potenziale, dovuta alla molle e alla forza di gravità che agisce sul punto P, sono, rispettivamente,

$$T = \frac{3}{2}M\big(\dot{x}^2 + L^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2\big) + \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + L^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\big), \qquad V = mgL\sin\theta + 2kL^2\cos^2\theta,$$

dove si è tenuto conto che $I_3 = Mr^2/2$ è il momento d'inerzia di ciascun disco rispetto al proprio asse (cfr. il §45.3) e che, dal momento che i dischi rotolano senza strisciare, se φ_1 e φ_2 indicano gli angoli di rotazione, rispettivamente, del disco di centro C_1 e di quello di centro C_2 rispetto a una direzione prefissata, si ha $r\dot{\varphi}_1 = \dot{x} + L\sin\theta\,\dot{\theta}$ e $r\dot{\varphi}_2 = \dot{x} - L\sin\theta\,\dot{\theta}$; i termini costanti di V sono stati scartati. La lagrangiana è $\mathcal{L} = T - V$, e le equazioni di Eulero Lagrange sono

$$\begin{cases} 3M\ddot{x} + m\ddot{x} = 0, \\ 3ML^2(\sin^2\theta\,\ddot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2) + mL^2(\cos^2\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2) + mgL\cos\theta - 4kL^2\sin\theta\cos\theta = 0. \end{cases}$$

I punti stazionari di V si ottengono richiedendo $\cos\theta = 0$ oppure, se $\alpha < 1$, se $\sin\theta = \alpha := mg/4kL$. Quindi le configurazioni di equilibrio sono: $\theta = \pi/2$, che è stabile se $\alpha < 1$ e instabile se $\alpha > 1$; $\theta = -\pi/2$, che è stabile per ogni valore di $\alpha > 0$; $\theta = \theta_0$ e $\theta = \pi - \theta_0$, dove $\theta_0 := \arcsin\alpha$, che sono instabili quando esistono. Il caso $\alpha = 1$ va trattato a parte: scrivendo $\theta = \pi/2 + \varphi$, si ha

$$\begin{aligned} V &= 4kL^2\Big(\sin(\pi/2+\varphi) + \frac{1}{2}\cos(\pi/2+\varphi)\Big) = 4kL^2\Big(\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big) \\ &= 4kL^2\Big(1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{6}\varphi^4 + o(\varphi^4)\Big) = 4kL^2\Big(1 - \frac{1}{8}\varphi^4 + o(\varphi^4)\Big), \end{aligned}$$

da cui concludiamo che $\theta = \pi/2$ è un punto di massimo e quindi costituisce una configurazione di equilibrio instabile. Si noti che in $\alpha = 1$ si ha una biforcazione a forcone subcritica (cfr. la terminologia introdotta nell'esempio 58.16). Per calcolare la forza vincolare R che agisce sul punto P, consideriamo l'energia potenziale in assenza di vincoli. Se $P = (x_0, y_0)$, $C_1 = (x_1, y_1)$ e $C_2 = (x_2, y_2)$ indicano le coordinate cartesiane dei punti P, C_1 e C_2 in generale, si ha $V = mgy_0 + \ldots$, dove i termini che non sono stati scritti esplicitamente non dipendono dalle coordinate (x_0, y_0). La forza attiva che agisce su P è quindi $f = (0, -mg)$. In termini delle coordinate lagrangiane si ha $x_0 = x$ e $y_0 = r + L\sin\theta$, così che $\ddot{x}_0 = \ddot{x} = 0$ e $\ddot{y}_0 = -L\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + L\cos\theta\,\ddot{\theta}$, dove $\ddot{\theta}$ può essere scritta in termini di θ e $\dot{\theta}$ utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\ddot{\theta} = \big(3ML^2\sin^2\theta + mL^2\cos^2\theta\big)^{-1}\big((3M-m)L^2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta + 4kL^2\sin\theta\cos\theta\big).$$

In conclusione la forza vincolare è $R = (m\ddot{x}_0 - f_x, m\ddot{y}_0 - f_y) = (0, -L\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + L\cos\theta\,\ddot{\theta} + mg)$. Se le aste hanno entrambe massa μ, indichiamo con

$$Q_1 = \Big(x - \frac{L}{2}\cos\theta, r + \frac{L}{2}\sin\theta\Big), \qquad Q_1 = \Big(x + \frac{L}{2}\cos\theta, r + \frac{L}{2}\sin\theta\Big)$$

le coordinate cartesiane dei rispettivi centri di massa. L'energia cinetica delle due aste si calcola con il teorema di König, e si trova

$$T' = \mu\Big(\dot{x}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2\Big) + I_3\dot{\theta}^2,$$

dove $I_3' = \mu L^2/12$ è il momento d'inerzia di ciascuna delle due aste rispetto a un asse ortogonale passante per il suo centro di massa (cfr. il §45.1), così che l'energia cinetica totale è

$$T = \frac{3}{2}M\big(\dot{x}^2 + L^2\sin^\theta\,\dot{\theta}^2\big) + \frac{1}{2}m\big(\dot{x}^2 + L^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\big) + \frac{1}{3}\mu\big(3\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2\big).$$

L'energia potenziale, tenendo conto anche dell'energia potenziale gravitazionale delle due aste, diventa

$$V = mgL\sin\theta + 2kL^2\cos^2\theta + \mu gL\sin\theta,$$

al solito trascurando i contributi costanti. Lo studio delle configurazioni di equilibrio e della loro stabilità si conduce come nel caso precedente, con la semplice sostituzione $m \mapsto m + \mu$. Se invece si ha $\mu = 0$ ma il piano verticale ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω, l'energia cinetica è la stessa trovata inizialmente per $\mu = 0$, mentre l'energia potenziale ha un contributo addizionale dovuto alla forza centrifuga che agisce sui due dischi e sul punto P. I due dischi hanno densità di massa $\rho = M/\pi r^2$. Per il primo disco, tenendo conto che l'elemento infinitesimo di massa $\mathrm{d}m(x) = \rho\, r'\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r'$ ha coordinate $(x - L\cos\theta + r'\cos\varphi, r + r'\sin\varphi)$, dove $r' \in [0, r]$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$, si ha (cfr. l'esercizio 23)

$$V_{\rm cf}^1 = -\frac{1}{2}\frac{M}{\pi r^2}\int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r'\omega^2\,(x - L\cos\theta + r'\cos\varphi)^2 = \text{costante} - \frac{1}{2}M\omega^2\big(x - L\cos\theta\big)^2.$$

Analogamente per il secondo disco si trova

$$V_{\rm cf}^2 = \text{costante} - \frac{1}{2}M\omega^2\big(x + L\cos\theta\big)^2,$$

così che, tenendo conto anche dell'energia centrifuga del punto P, l'energia potenziale totale è

$$V = mgL\sin\theta + 2kL^2\cos^2\theta - M\omega^2x^2 - M\omega^2L^2\cos^2\theta - \frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

avendo di nuovo ignorato i termini costanti. Le configurazioni di equilibrio (θ, x) si trovano richiedendo

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgL\cos\theta - 2L^2\big(2k - M\omega^2\big)\sin\theta\cos\theta = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\,(2M+m)\,\omega^2 x = 0.$$

Quindi ha $x = 0$, mentre θ deve soddisfare o l'equazione $\cos\theta = 0$ oppure $\sin\theta = \beta$, dove $\beta := mg/2L(2k - M\omega^2)$, purché $2k \neq M\omega^2$ e $|\beta| < 1$. Le configurazioni di equilibrio (x, θ) sono quindi $(0, \pi/2)$, $(0, -\pi/2)$, $(0, \theta_0)$ e $(0, \pi - \theta_0)$, dove $\theta_0 := \arcsin\beta$. Si noti che V è la somma di due funzioni, di cui una dipende solo da θ e una solo da x; la funzione che dipende solo da x ha in $x = 0$ un massimo: questo basta per dedurre che la configurazione di equilibrio è instabile (cfr. l'osservazione 58.14).]

Esercizio 39 Si consideri il sistema lagrangiano costituito da un disco omogeneo D, di massa $M = 1$ e raggio $r = 1$, e da un punto materiale P, di massa $m = 1$. Il punto e il disco sono entrambi vincolati a muoversi in un piano verticale, che identificheremo con il piano (x, y), in modo tale che il disco rotoli senza strisciare lungo l'asse x e il punto scorra lungo l'asse y. Il centro O del disco è collegato con il punto P tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sia g l'accelerazione di gravità (cfr. la figura 12.24).
(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
(2) Si determinino le eventuali configurazioni di equilibrio nel sistema e se ne discuta la stabilità.
(3) Si supponga ora che il piano (x, y) ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω: si discuta come cambiano le equazioni del moto.
(4) Sotto le ipotesi del punto (3) si determinino le eventuali nuove configurazioni di equilibrio.

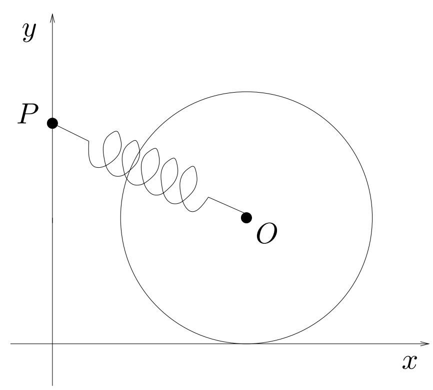

Figura 12.24: Sistema discusso nell'esercizio 39.

Esercizio 40 Si consideri il sistema lagrangiano che differisce da quello dell'esercizio 39 in quanto
(1) il disco rotola senza strisciare lungo una circonferenza di raggio $R > 1$ e centro $C = (0, R)$;
(2) il disco rotola senza strisciare lungo una guida di equazione $y = \alpha x^2$, con $\alpha \in (0, 1/2)$
In entrambi i casi si risponda alle stesse domande dell'esercizio 39 nel caso in cui il piano non ruoti. [*Suggerimento.* Nel caso (1) si ragiona come nel caso del cilindro dell'esempio 53.8: se θ denota l'angolo di cui ruota il disco e φ è l'angolo che la linea che unisce il centro del disco al centro C della circonferenza forma con la verticale discendente, la velocità v_O del centro di massa è legata alla variazione di θ e alla

variazione di φ dalla relazione $v_O = r\dot{\theta} = (R-r)\dot{\varphi}$, dove $r=1$. Nel caso (2) il centro di massa O del disco ha coordinate $q_O = (x - r\sin\varphi, \alpha x^2 + r\cos\varphi)$, dove $r=1$, x è l'ascissa del punto di contatto del disco con la guida e l'angolo φ è tale che $\tan\varphi = 2\alpha x$; utilizzando le identità trigonometriche

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}},$$

si trova

$$q_O = \left(x - \frac{2\alpha x}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}}, \alpha x^2 + \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}} \right) \quad \Longrightarrow \quad \dot{q}_0 = \left(1 - \frac{2\alpha}{(1+4\alpha^2x^2)^{3/2}} \right)(1, 2\alpha x)\,\dot{x}.$$

Si tiene conto del vincolo di rotolamento senza strisciamento imponendo che la velocità del centro di massa sia uguale a $r\dot{\theta}$, dove $r=1$ e $\dot{\theta}$ è la velocità con cui il disco ruota intorno al proprio asse:

$$v_0 = a(x)\,\dot{x} = \dot{\theta}, \qquad a(x) := \left(1 - \frac{2\alpha}{(1+4\alpha^2x^2)^{3/2}} \right)\sqrt{1+4\alpha^2x^2} = \sqrt{1+4\alpha^2x^2} - \frac{2\alpha}{1+4\alpha^2x^2}.$$

Usando come coordinate lagrangiane la variabile x e l'ordinata y del punto P, si trova che

$$T = \frac{1}{2}a^2(x)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = \frac{3}{4}a^2(x)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2$$

è l'energia cinetica, mentre l'energia potenziale è data da

$$V = gy + g\left(\alpha x^2 + \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}} \right) + \frac{1}{2}k\left(\left(x - \frac{2\alpha x}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}} \right)^2 + \left(\alpha x^2 + \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}} - y \right)^2 \right).$$

Per studiare le configurazioni di equilibrio, conviene definire $u := y - \alpha x^2 - 1/(1+4\alpha^2x^2)^{1/2}$ ed esprimere V in termini di x e u; si trova $V = V_1 + V_2$, dove

$$V_1 := gu + \frac{1}{2}ku^2, \qquad V_2 := 2g\left(\alpha x^2 + \frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}} \right) + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{2\alpha x}{\sqrt{1+4\alpha^2x^2}} \right)^2.$$

Si vede subito che $u = u_0 := -g/k$ è un punto di minimo isolato per V_1. Si verifica poi che

$$V_2'(x) = \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}x}(x) = x\Big(k + 4\alpha g + \frac{4\alpha^2 k}{(1+4\alpha^2x^2)^2} - \frac{8\alpha^2 g + 4\alpha k + 8\alpha^3 k x^2}{(1+4\alpha^2x^2)^{3/2}} \Big)$$

si annulla se e solo se $x=0$ se $\alpha < 1/2$. Infatti, per $\alpha \in (0,1/2)$, si ha

$$\begin{aligned} &(1+4\alpha^2x^2)^{3/2}4\alpha g \geq 4\alpha g \geq 8\alpha^2 g, \\ &(1+4\alpha^2x^2)^2 k + 4\alpha^2 k \geq \left(4\alpha k + 8\alpha^3 k x^2\right)(1+2\alpha^2x^2) \geq \left(4\alpha k + 8\alpha^3 k x^2\right)(1+4\alpha^2x^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

dove si è usato che $1 + x/2 \geq (1+x)^{1/2}$ $\forall x \geq -1$; inoltre risulta $V_2''(0) = k(2\alpha-1)^2 + 4\alpha(1-2\alpha)g > 0$, da cui si evince che $x=0$ è un punto di minimo isolato per V_2. In conclusione $(x,u) = (0,-g/k)$, ovvero $(x,y) = (0, 1-g/k)$ in termini delle coordinate originali, è l'unica configurazione di equilibrio del sistema, ed è stabile per il teorema 58.6. Si noti che la condizione $\alpha < 1/2$ garantisce che il disco possa rotolare senza strisciare lungo la guida parabolica.]