[*Soluzione.* Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|[\partial R/\partial q](q) < \varepsilon |q - q_0|^{m-1}$ per ogni q tale che $|q - q_0| < \delta$. Si ha quindi, per $|q - q_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |R(q)| &= |R(q) - R(q_0)| = \left| \int_0^1 \mathrm{d}t \left\langle \frac{\partial R}{\partial q}(q_0 + t(q - q_0)), q - q_0 \right\rangle \right| \\ &\leq \int_0^1 \mathrm{d}t \left| \frac{\partial R}{\partial q}(q_0 + t(q - q_0)) \right| |q - q_0| \leq \varepsilon |q - q_0|^{m-1} |q - q_0| = \varepsilon |q - q_0|^m, \end{aligned}$$

poiché $|q + t(q - q_0)| \leq |q - q_0|$ $\forall t \in [0, 1]$. Da qui segue l'asserto.]

Esercizio 7 Si dimostri che, se un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi in un piano π che ruoti con velocità $\omega(t)$ intorno a un asse fisso, l'effetto delle forze apparenti si può descrivere in termini di un'*energia potenziale centrifuga*

$$V_{\mathrm{cf}}(x, y) = -\frac{1}{2} m \omega^2(t)\, x^2,$$

dove (x, y) sono le coordinate del punto P nel piano π. Si discuta in particolare il caso in cui $\omega(t) = \omega$ sia costante. [*Soluzione.* Il sistema solidale con il piano rotante è un sistema non inerziale, quindi bisogna tener conto delle forze apparenti (cfr. il teorema 35.3 del capitolo 8). La forza che agisce su un punto P del piano, di massa m e coordinate $\boldsymbol{Q} = (x, y, 0)$, è data da

$$\boldsymbol{F} - 2m\, [\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{Q}}] - m\, [\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{Q}] - m\, [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]]\,,$$

dove $\boldsymbol{F}$ è la forza attiva espressa nel sistema solidale e $\boldsymbol{\Omega}$ è il vettore velocità angolare. Sia la forza $-m[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{Q}]$ che la forza di Coriolis $-2m[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\boldsymbol{Q}}]$ sono ortogonali al piano rotante, quindi non agiscono sul moto; tendono ad allontanare il punto P dal piano π e sono pertanto controbilanciate dalla forza vincolare. La forza centrifuga $-m\, [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{Q}]]$, espressa nelle coordinate del sistema rotante ha componente $m\omega^2 x$ lungo l'asse x e componente nulla lungo l'asse y. Quindi se si definisce V_{cf} come nel testo dell'esercizio, si può interpretare la forza centrifuga come la forza corrispondente all'*energia potenziale centrifuga* V_{cf}. In particolare, se ω è costante, anche $\boldsymbol{\Omega}$ è costante (è un vettore diretto lungo l'asse verticale e di modulo costante ω), quindi $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{0}$, e solo la forza di Coriolis deve essere compensata dalla forza vincolare.]

Esercizio 8 Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = \alpha x - x^3$ in $\mathbb{R}$. Si dimostri che per $\alpha = 0$ si ha una biforcazione a forcone supercritica. [*Soluzione.* I punti di equilibrio sono $x = 0$, per ogni valore di α, e $x = \pm\sqrt{\alpha}$, se $\alpha > 0$: $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile per $\alpha \leq 0$ e instabile per $\alpha > 0$, mentre $x = \pm\sqrt{\alpha}$ sono punti di equilibrio stabile quando esistono.]

Esercizio 9 Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = \alpha x + x^3$ in $\mathbb{R}$. Si dimostri che per $\alpha = 0$ si ha una biforcazione a forcone subcritica. [*Soluzione.* I punti di equilibrio sono $x = 0$, per ogni valore di α, e $x = \pm\sqrt{-\alpha}$, se $\alpha < 0$: $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile per $\alpha < 0$ e instabile per $\alpha > 0$, mentre $x = \pm\sqrt{-\alpha}$ sono punti di equilibrio instabili quando esistono.]

Esercizio 10 Si dimostri che se A è una matrice definita positiva tutti i suoi elementi diagonali A_{ii} sono strettamente positivi. [*Soluzione.* Sia A una matrice $n \times n$ definita positiva: si deve avere allora $\langle x, Ax \rangle > 0$ per ogni $x \neq 0$. Prendendo $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $x_j = \delta_{ij}$ si trova $\langle x, Ax \rangle = A_{ii}$, quindi $A_{ii} > 0$.]

Esercizio 11 Si deduca la (59.5) dall'analisi del §31.

Esercizio 12 Si dimostri che l'*energia potenziale gravitazionale sulla superficie della Terra* di un punto materiale di massa m è della forma $U = mgy$, se y è la coordinata del punto lungo l'asse verticale e g è l'accelerazione di gravità. [*Soluzione.* Si scelga un sistema di riferimento $Oxyz$ in cui l'asse y sia l'asse verticale. La forza che agisce sul punto P di coordinate (x, y, z) è allora $\boldsymbol{f}_{\rm gr} = (0, -mg, 0)$ (cfr. l'osservazione 32.11). Definendo $V_{\rm gr}$ tale che

$$\boldsymbol{f}_{\rm gr} = -\left(\frac{\partial V_{\rm gr}}{\partial x}, \frac{\partial V_{\rm gr}}{\partial y}, \frac{\partial V_{\rm gr}}{\partial z} \right),$$

si trova $V_{\rm gr} = mgy$. La forza $\boldsymbol{f}_{\rm gr}$ è comunemente chiamata *forza di gravità* o *forza peso* (cfr. di nuovo l'osservazione 32.11).]

Esercizio 13 Siano P_1 e P_2 due punti materiali collegati da una molla con costante elastica k e lunghezza a riposo nulla (o trascurabile). Con questo si intende che la forza d'interazione tra i punti è una forza elastica, cioè proporzionale alla distanza tra i due punti, con costante di proporzionalità k, attrattiva e diretta lungo la retta che congiunge i due punti. Si dimostri che l'*energia potenziale elastica* corrispondente è data da

$$V_{\rm el} = \frac{1}{2} k |\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^2 = \frac{1}{2} k \Big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \Big),$$

se $\boldsymbol{q}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\boldsymbol{q}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sono le coordinate dei punti P_1 e P_2, rispettivamente. [*Soluzione.* La forza $\boldsymbol{f}_1$ che agisce sul punto P_1 è diretta lungo la retta congiungente i due punti, nel verso dal punto P_2 al punto P_1, essendo una forza attrattiva. È una forza lineare: il suo modulo è proporzionale alla distanza $|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$ tra i due punti, con costante di proporzionalità k. La forza che agisce sul punto P_2 è data da $\boldsymbol{f}_2 = -\boldsymbol{f}_1$, per il principio di azione e reazione. Quindi si ha

$$\boldsymbol{f}_1 = -k (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2) = -k(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2), \qquad \boldsymbol{f}_2 = k (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2).$$

Richiedendo che sia

$$\boldsymbol{f}_1 = -\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial \boldsymbol{q}_1} := -\left(\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial x_1}, \frac{\partial V_{\rm el}}{\partial y_1}, \frac{\partial V_{\rm el}}{\partial z_1} \right),$$

si ottiene il risultato.]

Esercizio 14 Si discuta come cambia la discussione dell'esercizio 13 nel caso in cui la molla abbia lunghezza a riposo $d_0 > 0$. [*Soluzione.* Le forze $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ che agiscono sui punti P_1 e P_2 sono dirette ancora lungo la retta congiungente i due punti, i.e. lungo il versore $(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2)/|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$; inoltre sono attrattive quando la distanza tra i punti è maggiore di d_0 e repulsive altrimenti. D'altra parte, poiché le forze sono lineari, si ha $|\boldsymbol{f}_1| = |\boldsymbol{f}_2| = k \, ||\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2| - d_0|$, quindi, imponendo di nuovo,

$$\boldsymbol{f}_1 = -\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial \boldsymbol{q}_1}, \qquad \boldsymbol{f}_2 = -\frac{\partial V_{\rm el}}{\partial \boldsymbol{q}_2},$$

si trova

$$V_{\rm el} = \frac{1}{2} k \left(|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2| - d_0 \right)^2.$$

Ovviamente per $d_0 = 0$ ritroviamo l'espressione dell'esercizio 13.]