11 | Meccanica lagrangiana

§51 Primo prinicipio variazionale di Hamilton

Il formalismo lagrangiano, che inizieremo a discutere a partire da questo capitolo, fornisce un metodo efficiente ed elegante per studiare il moto di sistemi composti da punti materiali che interagiscano attraverso forze conservative e siano soggetti a vincoli olonomi, inclusi quelli di rigidità. Esso costituisce un approccio alternativo (ed equivalente) a quello newtoniano, in cui le equazioni del moto si ottengono imponendo il secondo principio della dinamica, i.e. richiedendo che il prodotto della massa per l'accelerazione di un punto sia uguale alla forza che agisce sul punto stesso. Come vedremo, le stesse equazioni del moto possono essere ottenute partendo da un principio variazionale.

Consideriamo un sistema che sia descritto dalle coordinate $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Supponiamo per il momento che lo spazio delle configurazioni, i.e. il dominio di variabilità delle coordinate q, sia $\mathbb{R}^n$ o un suo sottoinsieme; vedremo al §52 come modificare la discussione nel caso in cui il moto si svolga su una varietà su cui non sia possibile utilizzare un sistema di coordinate definito globalmente. In generale la configurazione del sistema varia nel tempo, quindi le coordinate q dipendono dal tempo t attraverso una legge $t \mapsto q(t)$ da determinare, in funzione delle forze che agiscono sul sistema e dei vincoli a cui esso è sottoposto. Trovare come $q(t)$ dipende da t è per l'appunto il problema che si deve risolvere, una volta che siano noti i vincoli e le forze esterne. Chiameremo *coordinate generalizzate* le variabili $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ e *velocità generalizzate* le loro derivate rispetto al tempo $\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t)$.

Siano P_1 e P_2 due punti nello spazio delle configurazioni individuati dalle coordinate $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$, e sia $[t_1, t_2]$ un intervallo di tempo. Indichiamo con

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2) \tag{51.1}$$

l'insieme delle curve $t \mapsto q(t)$ che verificano le seguenti proprietà:

- sono di classe C^1 in $[t_1, t_2]$;
- verificano le condizioni al contorno $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t_2) = q^{(2)}$.

Chiameremo *spazio delle traiettorie* l'insieme (51.1) e *traiettorie* i suoi elementi.

Osservazione 51.1 Il nome di traiettorie dato agli elementi di $\mathcal{M}$ non deve trarre in inganno: non si tratta di traiettorie di un sistema dinamico, ma semplicemente di curve (al momento non è ancora stata introdotta alcuna dinamica). Una situazione analoga si è incontrata quando sono state introdotte le traiettorie virtuali (cfr. l'osservazione 36.14 del capitolo 9).

Definiamo anche $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(t_1; t_2)$ lo spazio delle curve $t \mapsto h(t)$ che hanno la stessa regolarità degli elementi di $\mathcal{M}$ e verificano le condizioni al contorno $h(t_1) = h(t_2) = 0$. Chiameremo *deformazioni* gli elementi di $\mathcal{M}_0$ e *spazio delle deformazioni* lo spazio $\mathcal{M}_0$ (cfr. la figura 11.1).

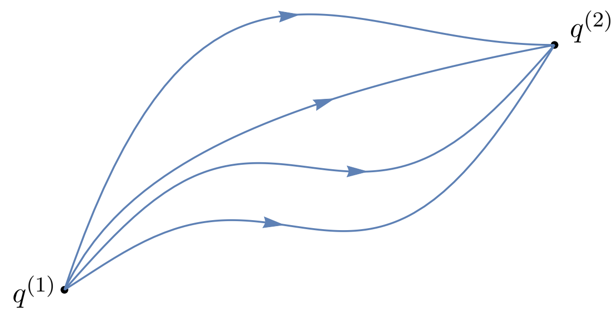

Figura 11.1: Traiettorie dello spazio $\mathcal{M}$ che collegano due punti fissati $q^{(1)}$ e $q^{(2)}$ con tempo di percorrenza fissato $t_2 - t_1$; tutte le curve di $\mathcal{M}$ differiscono tra loro per deformazioni dello spazio $\mathcal{M}_0$.

Lemma 51.2 $\mathcal{M}_0$ *è uno spazio vettoriale, mentre* $\mathcal{M}$ *è uno spazio affine.*

Dimostrazione. Basta applicare le definizioni di spazio vettoriale e la definizione di spazio affine (cfr. l'esercizio 1), notando che se $t \mapsto q(t)$ e $t \mapsto q'(t)$ sono due traiettorie in $\mathcal{M}$ allora $t \mapsto h(t) := q(t) - q'(t)$ è un elemento di $\mathcal{M}_0$. ∎

Definizione 51.3 (Lagrangiana) *Dato un sistema descritto dalla coordinate generalizzate* $q = q(t)$*, definiamo* lagrangiana *una funzione* $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ *che dipenda dalle coordinate* q*, dalle velocità generalizzate* $\dot{q}$ *e dal tempo* t*. Le coordinate generalizzate* q *sono chiamate anche* coordinate lagrangiane

Osservazione 51.4 In base alla definizione data, la funzione $\mathcal{L}$ può essere una qualsiasi funzione definita in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (più in generale, come vedremo al §52, $\mathcal{L}$ è una funzione definita sul fibrato tangente dello spazio delle configurazioni, e solo la sua forma esplicita dipende dal sistema di coordinate scelto). In principio, l'espressione $\mathcal{L}(q, y, t)$ ha senso anche quando la variabile y non coincide con $\dot{q}$. Tuttavia, noi siamo interessati al caso in cui si associ la lagrangiana a una traiettoria nello spazio $\mathcal{M}$, quindi al caso in cui si abbia $y = \dot{q}$.

Osservazione 51.5 Data una traiettoria $t \mapsto q(t)$, il valore di $\dot{q}(t)$ è determinato in ogni istante. La Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ è tuttavia vista come una funzione di $2n + 1$ variabili (cfr. l'osservazione precedente): si considerano $q(t)$ e $\dot{q}(t)$ come variabili indipendenti. Così per esempio, $\partial \mathcal{L}/\partial q_i$ è la derivata parziale di $\mathcal{L}$ rispetto alla variabile q_i e viene calcolata mantenendo tutte le altre variabili (inclusa $\dot{q}_i$) fissate. Analogamente la derivata parziale $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i$ va calcolata mantenendo costanti tutte le variabili che non siano $\dot{q}_i$, quindi q_i compresa: $[\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i](q,\dot{q},t) = [\partial \mathcal{L}/\partial y_i](q,y,t)|_{y=\dot{q}}$.

Dato un sistema meccanico conservativo, descritto dalle coordinate q, risultano definite un'energia cinetica $T(q,\dot{q},t)$ e un'energia potenziale $V(q,t)$. La funzione

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - V(q,t) \tag{51.2}$$

costituirà la *lagrangiana associata al sistema meccanico conservativo*. Fra le infinite lagrangiane che si possono considerare in relazione a un sistema meccanico conservativo la funzione (51.2) costituisce, per così dire, la lagrangiana "naturale". Infatti, come vedremo, a partire da tale lagrangiana si possono ricavare le equazioni del moto. Per questo, quando si vuole descrivere un sistema meccanica conservativo nell'ambito del formalismo lagrangiano, si assume tacitamente che la corrispondente lagrangiana sia la funzione (51.2).

Definizione 51.6 (Funzionale d'azione) *Data un sistema con lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$, definiamo* funzionale d'azione *l'integrale $I\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dato da*

$$I(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t), \tag{51.3}$$

dove γ è la traiettoria $t \mapsto q(t)$.

Per $h \in \mathcal{M}_0$ definiamo

$$\|h\| := \max_{t_1 \le t \le t_2} |h(t)| + \max_{t_1 \le t \le t_2} |\dot{h}(t)|, \tag{51.4}$$

dove $|\cdot|$ denota la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$.

Lemma 51.7 *Lo spazio vettoriale $\mathcal{M}_0$ è uno spazio normato, dotato della norma* (51.4).

Dimostrazione. È immediato verificare che (51.4) soddisfa le proprietà di una norma (cfr. la definizione 1.31), i.e. (1) $\|h\| \ge 0$ $\forall h \in \mathcal{M}_0$ e $\|h\| = 0$ se e solo se $h = 0$; (2) $\|\lambda h\| = |\lambda|\,\|h\|$ $\forall h \in \mathcal{M}_0$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; (3) $\|h_1 + h_2\| \le \|h_1\| + \|h_2\|$ $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{M}_0$. ∎

Lemma 51.8 *Data una lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$ di classe C^1, il funzionale d'azione* (51.3) *è di classe C^1 e il suo differenziale in γ è dato da*

$$\begin{aligned} DI(\gamma;h) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}(q(t),\dot{q}(t),t)\, h_k(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(q(t),\dot{q}(t),t)\, \dot{h}_k(t) \right) \qquad (51.5) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t),t), h(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t),t), \dot{h}(t) \right\rangle \right), \end{aligned}$$

dove γ è la traiettoria $t \mapsto q(t)$, $h \in \mathcal{M}_0$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sotto le ipotesi fatte sulla funzione $\mathcal{L}$, possiamo scrivere, per $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \mathcal{L}(q+\xi, \dot{q}+\eta, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \xi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \eta \right\rangle \right| \le (|\xi| + |\eta|)\, R(\xi, \eta, t),$$

dove R è, uniformemente in $t \in [t_1, t_2]$, una funzione positiva infinitesima nei suoi argomenti, i.e. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|\xi| + |\eta| < \delta$ allora $R(\xi, \eta, t) < \varepsilon$. Per $\gamma \in \mathcal{M}$ e $h \in \mathcal{M}_0$, si ha

$$\begin{aligned} &\left| I(\gamma + h) - I(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big), h(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big), \dot{h}(t) \right\rangle \right) \right| \\ &\qquad \le \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(|h(t)| + |\dot{h}(t)| \right) R(h(t), \dot{h}(t), t) \le |t_2 - t_1|\, \|h\| \sup_{t_1 \le t \le t_2} R(h(t), \dot{h}(t), t), \end{aligned}$$

e, per $\|h\| < \delta$, risulta

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\|h\|} \left| I(\gamma + h) - I(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big), h(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big), \dot{h}(t) \right\rangle \right) \right| \\ &\qquad \le \varepsilon\, |t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

così che esiste il limite, per $\|h\| \to 0$, del membro di sinistra ed è uguale a zero. Quindi $I(\gamma)$ è differenziabile e il suo differenziale è dato dal funzionale lineare da $\mathcal{M}_0$ in $\mathbb{R}$ definito dalla (51.5). Si verifica immediatamente che il differenziale $DI(\gamma; h)$ è continuo in γ (la regolarità del funzionale $I(\gamma; h)$ in γ è data dalla regolarità della lagrangiana nelle sue variabili). Ne segue che I è di classe C^1. ■

Lemma 51.9 *Sia $p \ge 0$. Sia $\zeta(t)$ una funzione continua in $[t_1, t_2]$. Se per ogni funzione $g(t)$ di classe C^p in $[t_1, t_2]$ tale che $g(t_1) = g(t_2) = 0$ vale l'identità*

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \zeta(t)\, g(t) = 0, \tag{51.6}$$

allora la funzione $\zeta(t)$ è identicamente nulla in $[t_1, t_2]$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $t_0 \in (t_1, t_2)$ tale che $\zeta(t_0) \neq 0$; per definitezza supponiamo che risulti $\zeta(t_0) = c > 0$. Per continuità esiste un intervallo $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset [t_1, t_2]$, con $\delta > 0$, tale che $\zeta(t) > c/2$ per ogni $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Sia g una funzione continua, positiva, non nulla e con supporto strettamente contenuto in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Si ha allora

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \zeta(t)\, g(t) > \frac{c}{2} \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} \mathrm{d}t\, g(t) > 0,$$

contro l'ipotesi (51.6). Quindi $\zeta(t)$ deve essere nulla nell'aperto (t_1, t_2) e, per continuità, è nulla nell'intervallo chiuso $[t_1, t_2]$. ■

Osservazione 51.10 Nel lemma 51.9 è sufficiente la condizione che le funzioni g siano continue in $[t_1, t_2]$; tuttavia, nella dimostrazione del teorema 51.12 più avanti, servirà la formulazione data nel lemma 51.9 con $p = 1$.

Definizione 51.11 (Equazioni di Eulero-Lagrange) *Sia $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ una lagrangiana di classe C^2. Chiameremo* equazioni di Eulero-Lagrange *le equazioni*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{51.7}$$

dove $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$.

Teorema 51.12 *Sia $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ una lagrangiana di classe C^2. Una traiettoria $t \mapsto q(t)$ di classe C^2 rende stazionario il funzionale d'azione* (51.3) *se e solo se $q(t)$ soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange* (51.7).

Dimostrazione. Una traiettoria γ data da $t \mapsto q(t)$ rende stazionario il funzionale d'azione (51.3) se e solo se $DI(\gamma; h) = 0$ per ogni $h \in \mathcal{M}_0$, i.e. se e solo se

$$DI(\gamma; h) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, h_k(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, \dot{h}_k(t) \right) = 0, \tag{51.8}$$

per ogni $h \in \mathcal{M}_0$. Per ipotesi $[\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_k](q, \dot{q}, t)$ è di classe C^1 in $\dot{q}$. Se $t \mapsto q(t)$ è una traiettoria di classe C^2 che rende stazionario $I(\gamma)$, allora $\dot{q}$ è di classe C^1 in t e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(q(t), \dot{q}(t), t) \tag{51.9}$$

è differenziabile in t. Integrando per parti il termine lineare in $\dot{h}(t)$ in (51.8) e ricordando che risulta $h(t_1) = h(t_2) = 0$ (così che i termini di bordo si annullano), si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) h_k = 0, \tag{51.10}$$

dove $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$. In particolare se si fissa $i \in \{1, \ldots, n\}$ e si prende $h \in \mathcal{M}_0$ tale che $h_k(t) = 0$ $\forall t \in [t_1, t_2]$ per ogni $k \neq i$, per il lemma 51.9 e per l'osservazione 51.10, si ottiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{51.11}$$

Ripetendo l'argomento per $i = 1, \ldots, n$, si vede che valgono le equazioni (51.7) per $t \in [t_1, t_2]$.

Viceversa, se $q(t)$ è una soluzione di classe C^2 delle equazioni di Eulero-Lagrange (51.11), per $i = 1, \ldots, n$, allora la (51.10) è soddisfatta per ogni deformazione $h \in \mathcal{M}_0(t_1; t_2)$. Ne concludiamo che la traiettoria $t \mapsto q(t)$ è un punto stazionario del funzionale d'azione. ■

Osservazione 51.13 Le condizioni di regolarità di $\mathcal{L}$ nella definizione 51.11 e nel teorema 51.12 potrebbero essere indebolite, richiedendo che la funzione $\mathcal{L}(q, \eta, t)$ sia di classe C^2 nelle variabili η e di classe C^1 nelle restanti variabili. Infatti quello che realmente occorre è che la funzione (51.9) sia di classe C^1 nelle sue variabili. Tuttavia, perché il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni sia applicabile, occorre che $\mathcal{L}(q, \eta, t)$ sia di classe C^2 anche nelle variabili q; inoltre nei problemi che si incontrano comunemente si ha spesso una regolarità della lagrangiana molto superiore (spesso C^∞) a quella minima che serve per poter applicare i risultati enunciati nel presente capitolo, quindi non è essenziale ai fini pratici insistere troppo sulle condizioni di regolarità ottimali.

Teorema 51.14 *Sia la* (51.2) *la lagrangiana associata a un sistema meccanico di* N *punti materiali nello spazio euclideo tridimensionale che interagiscano attraverso forze conservative. Le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono equivalenti alle equazioni di Newton.*

Dimostrazione. Lo spazio delle configurazioni del sistema è $\mathbb{R}^{3N}$, quindi è rappresentabile mediante un unico sistema di coordinate (globale), per esempio utilizzando le coordinate cartesiane $q = x$ dei punti materiali rispetto a una terna di assi cartesiani prefissata. Notando che, in tale sistema di coordinate, si ha

$$T(x, \dot{x}, t) := T(\dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_i \left(\dot{x}_k^{(i)} \right)^2, \qquad V(x, t) := V(x), \tag{51.12}$$

abbiamo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k^{(i)}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k^{(i)}} = m_i \dot{x}_k^{(i)}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(i)}} = -\frac{\partial V}{\partial x_k^{(i)}} := f_k^{(i)},$$

e possiamo quindi scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange nella forma

$$m_i \ddot{x}_k^{(i)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k^{(i)}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(n)}} = f_k^{(i)},$$

che sono appunto le equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali sottosposti alle forze conservative f. ■

Principio 51.15 (Primo principio variazionale di Hamilton) *Le traiettorie di un sistema meccanico conservativo sono i punti stazionari del funzionale d'azione.*

Osservazione 51.16 Le traiettorie che si ottengono dal primo principio variazionale di Hamilton sono soluzioni di un *problema con condizioni al contorno* per un sistema di equazioni differenziali, dal momento che le soluzioni vengono cercate in uno spazio di funzioni che hanno valori assegnati agli estremi di un dato intervallo di tempo. Si tratta quindi di un problema diverso dal problema di Cauchy (per lo stesso sistema di equazioni) in cui sono prescritti i valori di $q(t)$ e $\dot{q}(t)$ all'istante iniziale. Non varranno quindi in generale i risultati di esistenza e unicità noti per il problema di Cauchy. In particolare possono esistere problemi al contorno che non hanno soluzioni (corrispondentemente il funzionale d'azione non ha punti stazionari) e altri che hanno più (anche infinite) soluzioni.

Esempio 51.17 Si considerino le equazioni dell'oscillatore armonico

$$\ddot{x} = -x, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{51.13}$$

e sia $(x(0), \dot{x}(0)) = (\bar{x}, \bar{y})$ un dato iniziale. Purché non sia $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ ogni soluzione di (51.13) è periodica con periodo 2π (ed è data da da $x(t) = \bar{x}\cos t + \bar{y}\sin t$). Il problema con condizioni al contorno

$$x(0) = x(\tau) = a, \qquad \tau \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad 0 \neq a \in \mathbb{R}, \tag{51.14}$$

per le equazioni (51.13) può non ammettere soluzione (cfr. l'esercizio 6), mentre il problema

$$x(0) = a, \qquad x(2\pi) = b, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \tag{51.15}$$

se $a = b \neq 0$ ha infinite soluzioni – che corrispondono agli infiniti problemi di Cauchy che si ottengono fissando la velocità $\bar{y}$ all'istante iniziale – e non ammette invece soluzioni se $a \neq b$.

Osservazione 51.18 Il teorema 51.12 mostra che per un sistema meccanico conservativo di N punti materiali in $\mathbb{R}^3$ il primo principio variazionale di Hamilton è equivalente ad assumere le equazioni di Newton, in accordo con il secondo principio della dinamica (cfr. l'osservazione 17.30). L'assunzione del principio variazionale di Hamilton significa che un sistema può essere individuato attraverso l'assegnazione della lagrangiana. Le equazioni del moto si ottengono allora a partire da essa, e sono appunto le equazioni di Eulero-Lagrange. Ovviamente, dal punto di vista fisico, come per il secondo principio della dinamica, la validità del principio risiederà nell'accordo con i dati sperimentali.

Come sottolineato nell'osservazione 51.16, il primo principio variazionale di Hamilton afferma non che il funzionale d'azione ha punti stazionari, ma, piuttosto, che se esistono punti stazionari allora essi corrispondono alle traiettorie del sistema. In generale dimostrare l'esistenza di punti stazionari per il funzionale d'azione è molto complesso. Quello che si riesce a dimostrare è che, nelle ipotesi che

- la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \eta, t)$ sia sufficientemente regolare nei suoi argomenti,
- la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \eta, t)$ soddisfi un'opportuna condizione di positività nelle variabili η,
- l'ampiezza dell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ sia abbastanza piccolo,

se il funzionale d'azione ammette un punto stazionario γ nello spazio (51.1), allora γ deve essere un minimo (cfr. il teorema 51.19 più avanti). Per questo motivo il primo prinicipio variazionale di Hamilton è talora chiamato, impropriamente, *principio di minima azione*. Sotto analoghe condizioni si può dimostrare che il problema al contorno ha almeno una soluzione. Si noti che nell'esempio 51.17, quando il problema (51.14) non ammette soluzioni, la condizione che $|t_2 - t_1|$ sia piccolo non è soddisfatta.

Teorema 51.19 *Dato un sistema con lagrangiana* (51.2)*, sia* $I(\gamma)$ *il funzionale d'azione* (51.3) *definito sulle traiettorie nello spazio* (51.1)*. Supponiamo che la funzione* $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ *sia di classe* C^2 *nei suoi argomenti e che la matrice di elementi*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t) \tag{51.16}$$

sia definita positiva. Allora se $t_2 - t_1$ *è sufficientemente piccolo e se la traiettoria* $t \mapsto q(t)$ *di classe* C^2 *rende stazionario* $I(\gamma)$*, tale traiettoria, per* $t \in [t_1, t_2]$*, costituisce un punto di minimo locale per* $I(\gamma)$*.*

Dimostrazione. Consideriamo una traiettoria $t \mapsto q(t)$ che renda stazionario $I(\gamma)$, e sia $h \in \mathcal{M}_0$; al solito indichiamo con h sia l'elemento di $\mathcal{M}_0$ sia la sua rappresentazione nel sistema di coordinate scelto. Vogliamo dimostrare che $I(\gamma + h) > I(\gamma)$ $\forall h \in \mathcal{M}_0$ tale che $\|h\|$ sia sufficientemente piccolo, purché le ipotesi del teorema siano soddisfatte e t_2 sia sufficientemente vicino a t_1.

Utilizzando la formula di Lagrange per il resto di Taylor (cfr. l'esercizio 8), scriviamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(q + h, \dot{q} + \dot{h}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) & \\
+ \left\langle h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q, \dot{q}, t) \right\rangle &+ \left\langle \dot{h}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t) \right\rangle \\
+ \frac{1}{2} \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2}(\xi, \eta, t)\, h \right\rangle &+ \frac{1}{2} \left\langle \dot{h}, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^2}(\xi, \eta, t)\, \dot{h} \right\rangle + \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}}(\xi, \eta, t)\, \dot{h} \right\rangle,
\end{aligned}$$

dove (ξ, η) è un opportuno punto (che dipende da q e $\dot{q}$) e il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è in $\mathbb{R}^n$.

In virtù delle ipotesi del teorema, per $\|h\|$ sufficientemente piccolo, esistono due costanti strettamente positive c, M tali che

$$\frac{1}{2} \left\langle \dot{h}, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^2}(\xi, \eta, t)\, \dot{h} \right\rangle \geq c \, \langle \dot{h}, \dot{h} \rangle, \tag{51.17a}$$

$$\frac{1}{2} \left| \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2}(\xi, \eta, t)\, h \right\rangle \right| \leq M \, \langle h, h \rangle \,, \tag{51.17b}$$

$$\left| \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot{q}}(\xi, \eta, t)\, \dot{h} \right\rangle \right| \leq M \, |\langle h, \dot{h} \rangle|, \tag{51.17c}$$

così che otteniamo

$$
\begin{aligned}
I(\gamma+h)-I(\gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(q,\dot q,t) \right\rangle + \left\langle \dot h, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}(q,\dot q,t) \right\rangle \right. \\
&\left. +\frac{1}{2} \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q^2}(\xi,\eta,t)\, h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \dot h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q^2}(\xi,\eta,t)\, \dot h \right\rangle + \left\langle h, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q \partial \dot q}(\xi,\eta,t)\, \dot h \right\rangle \right) \\
&\ge c \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle \dot h, \dot h\rangle - M \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Big(\langle h, h\rangle + \big| \langle h, \dot h\rangle \big| \Big),
\end{aligned}
\tag{51.18}
$$

avendo tenuto conto che $DI(\gamma; h) = 0$. Per stimare il secondo integrale nell'ultima linea di (51.18) in termini del primo e dell'ampiezza dell'intervallo $[t_1, t_2]$, applichiamo la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz: nel caso che a noi interessa, per ogni coppia di funzioni f, g a quadrato integrabile in $[t_1, t]$, abbiamo (cfr. l'esercizio 13)

$$
\left| \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}\tau\, f(\tau)\, g(\tau) \right| \le \left(\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}\tau\, f^2(\tau) \right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}\tau\, g^2(\tau) \right)^{1/2} . \tag{51.19}
$$

Pertanto, tenendo conto che

$$
h(t) = \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, \dot h(t'),
$$

poiché $h \in \mathcal{M}_0$, e quindi $h(t_1) = 0$, in (51.19) stimiamo

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle h, h\rangle &\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Big(\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, \dot h_k(t') \cdot 1 \Big)^2 \le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, (t-t_1) \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, \dot h_k^2(t') \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t' \dot h_k^2(t') \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, (t_2 - t_1) \le \frac{(t_2-t_1)^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle \dot h, \dot h\rangle,
\end{aligned}
\tag{51.20}
$$

utilizzando la (51.19), con $f = \dot h_k$ e $g = 1$, e, analogamente,

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \big| \langle h, \dot h\rangle \big| &\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, |h_k|\, |\dot h_k| \le \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, h_k^2(t) \right)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot h_k^2(t) \right)^{1/2} \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot h_k^2(t) \right)^{1/2} \left(\frac{(t_2-t_1)^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \dot h_k^2(t) \right)^{1/2} \le \sqrt{\frac{(t_2-t_1)^2}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \langle \dot h, \dot h\rangle,
\end{aligned}
$$

utilizzando la (51.19) prima con $f = h_k$ e $g = \dot h_k$, poi di nuovo con $f = \dot h_k$ e $g = 1$.

Le (51.20), introdotte nella (51.18), dànno, per $t_2 - t_1 < \sqrt{2}$,

$$
I(\gamma+h) - I(\gamma) \ge \big(c - \sqrt{2} M (t_2 - t_1) \big) \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \langle \dot h, \dot h\rangle, \tag{51.21}
$$

da cui concludiamo che $I(\gamma+h) > I(\gamma)$ purché $\|h\|$ sia sufficientemente piccolo e t_2 sia scelto così vicino a t_1 da soddisfare la diseguaglianza $t_2 - t_1 < \min\{\sqrt{2}, c/\sqrt{2}M\}$. La traiettoria corrispondente è quindi un punto di minimo per il funzionale d'azione per $t \in [t_1, t_2]$. ■

Osservazione 51.20 L'ipotesi sulla matrice (51.16) del teorema 51.19 è soddisfatta nel caso di un sistema meccanico conservativo di N punti materiali, descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L} = T - V$, con T e U date dalle (51.12).

Osservazione 51.21 Data una lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, a cui siano associate le equazioni di Eulero-Lagrange (51.7), se consideriamo una nuova lagrangiana

$$\mathcal{L}'(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A(q, t), \tag{51.22}$$

per qualche funzione A, allora $\mathcal{L}'$ ammette le stesse equazioni di Eulero-Lagrange. Infatti i funzionali d'azione I e I', corrispondenti alle due lagrangiane $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$, differiscono per il termine

$$\widetilde{A}(t_2) - \widetilde{A}(t_1) \qquad \widetilde{A}(t) := A(q(t), t), \tag{51.23}$$

che non dipende dalla traiettoria γ, così che $DI(\gamma; h) = DI'(\gamma; h)$ per ogni h, e quindi le due lagrangiane, per il teorema 51.12, ammettono le stesse equazioni di Eulero-Lagrange. Si dice allora che lagrangiana di un sistema è definita "a meno di una derivata totale", con ciò intendendo la *derivata totale*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A}{\partial q_k}(q(t), t)\, \dot{q}_k(t) + \frac{\partial A}{\partial t}(q(t), t)$$

di una funzione arbitraria A delle coordinate e del tempo.

Esempio 51.22 Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema lagrangiano $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L})$, con

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 - 2q_1q_2, \tag{51.24}$$

e se ne trovi la soluzione; si trovi inoltre una costante del moto. Si mostri altesì che, data una funzione $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^3, una lagrangiana lineare nelle velocità della forma

$$\mathcal{L} = \langle F(q), \dot{q}\rangle - V(q), \qquad F(q) = \nabla G(q), \tag{51.25}$$

tale da violare la condizione che la matrice di elementi (51.16) sia non singolare, è priva di interesse fisico.

Discussione dell'esempio. Nel caso della lagrangiana (51.24), si trova $\dot{q}_1 = 2q_1$ e $\dot{q}_2 = -2q_2$, che, integrate, dànno $q_1(t) = \mathrm{e}^{2t}q_1(0)$ e $q_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}q_2(0)$. Si verifica facilmente che $H(q_1, q_2) := q_1q_2$ è una costate del moto.

Nel caso della lagrangiana (51.25), poiché $\langle F(q), \dot{q}\rangle = \langle \nabla G(q), \dot{q}\rangle = \mathrm{d}G/\mathrm{d}t$, la lagrangiana $\mathcal{L}$ è equivalente alla lagrangiana $\mathcal{L}' = -V(q)$, così che le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere soddisfatte solo se $V(q)$ è costante e diventano banali.