13 Simmetrie e costanti del moto

§62 Teorema di Noether

Si è visto nel §59 che l'esistenza di una variabile ciclica permette di ricondurre lo studio di un sistema lagrangiano allo studio di un sistema ridotto, i.e. di un sistema che ha un grado di libertà in meno.

È quindi di grande importanza sapere sotto quali condizioni è possibile trovare un sistema di coordinate in cui una di esse sia ciclica. Si mostrerà che la riduzione a un sistema con un numero di gradi di libertà inferiore è possibile quando il sistema ammette un gruppo di simmetrie, i.e. un gruppo di trasformazioni (differenziabili invertibili) a un parametro che lasciano invariante la lagrangiana (tali nozioni verranno definite rigorosamente nel corso della trattazione).

Individuare le simmetrie che caratterizzano il sistema fornisce anche indicazioni sul sistema di coordinate da usare perché una di esse sia ciclica (cfr. l'osservazione 62.20 più avanti).

Definizione 62.1 (Gruppo a un parametro di diffeomorfismi) *Chiamiamo* gruppo a un parametro di diffeomorfismi *definiti sullo spazio delle configurazioni l'insieme di trasformazioni differenziabili invertibili dello spazio delle configurazioni in sé che dipendano in maniera differenziabile da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Indicheremo con $\mathcal{G}$ tale gruppo e con $g(\alpha)$ i suoi elementi. L'elemento neutro (identità) è $g(0)$ e la legge di composizione è data da $g(\beta) \circ g(\alpha) = g(\alpha + \beta)$.*

Consideriamo un sistema lagrangiano $(\Sigma, \mathcal{L})$. Lo spazio delle configurazioni, localmente, è sempre identificabile con $\mathbb{R}^n$, mediante un'opportuna scelta di coordinate: in tale sistema di coordinate, ogni elemento $g(\alpha) \in \mathcal{G}$ risulta essere una trasformazione di coordinate da $\mathbb{R}^n$ in sé, differenziabile e invertibile, con inversa differenziabile, che indicheremo con

$$q \mapsto Q(q, \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{62.1}$$

Diremo allora che la (62.1) definisce un *gruppo a un parametro di trasformazioni differenziabili* che rappresenta il gruppo $\mathcal{G}$. Nel seguito si lavorerà sempre in $\mathbb{R}^n$: questo non sarà restrittivo perché l'analisi che verrà fatta sarà locale.

Lemma 62.2 *Il gruppo di diffeomorfismi $\mathcal{G}$ rappresentato dalle* (62.1)*, con $Q(q,\alpha)$ di classe C^1 in q e in α, è associato in modo biunivoco a un campo vettoriale autonomo ξ di classe C^1.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{G}$ un gruppo a un parametro di diffeomorfismi e sia la (62.1) il gruppo di trasformazioni che lo rappresenta in un sistema di coordinate q. Per le proprietà di gruppo risulta

$$Q(q,\alpha+\beta) = Q(Q(q,\alpha),\beta), \tag{62.2}$$

così che la derivata

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Q(Q(q,\alpha),\varepsilon) - Q(q,\alpha)}{\varepsilon} \tag{62.3}$$

dipende da q solo attraverso la funzione Q. Quindi la (62.2) descrive il flusso di un sistema dinamico autonomo

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha} = f(Q), \qquad Q(q,0) = q, \tag{62.4}$$

dove $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe C^1 sotto le ipotesi di regolarità su $Q(q,\alpha)$.

Viceversa, sia ξ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$, rappresentato dalle funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ nelle coordinate q. Sia $Q(q,\alpha)$ la soluzione delle equazioni (62.4). Se f è di classe C^1, tale soluzione esiste ed è unica per ogni $q \in \mathbb{R}^n$, per il teorema di esistenza e unicità (teorema 11.27), e dipende in modo differenziabile da q e α, per il teorema di dipendenza differenziabile dai dati iniziali (teorema 12.8). Poiché inoltre il campo vettoriale dipende da Q ma non esplicitamente da α, il sistema dinamico (62.4) è autonomo e quindi vale la proprietà di composizione (62.2). Ne concludiamo che le trasformazioni $g(\alpha)$ formano un gruppo, con legge di composizione $g(\beta)\circ g(\alpha) = g(\alpha+\beta)$. ∎

Osservazione 62.3 Se consideriamo un sistema definito su una varietà differenziabile Σ, il campo vettoriale in un punto $x \in \Sigma$ costituisce un elemento dello spazio tangente in x a Σ, i.e. di $T_x\Sigma$. La definizione di f non dipende dalle coordinate scelte (cfr. l'esercizio 1). Fissato il sistema di coordinate q, $f(q)$ è la funzione che rappresenta il campo vettoriale ξ.

Osservazione 62.4 Per le proprietà di gruppo di $g(\alpha)$, possiamo definire il campo vettoriale ξ attraverso la (62.4), calcolando la derivata ad $\alpha = 0$, i.e.

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left. f(Q)\right|_{\alpha=0} = f(q), \tag{62.5}$$

invece che ad $\alpha = \bar\alpha$ generico. Infatti, se scriviamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\bar\alpha} = f(Q(q,\bar\alpha)), \tag{62.6}$$

abbiamo

$$f(Q(q,\bar\alpha)) = \left. f(Q(Q(q,\bar\alpha),\alpha-\bar\alpha))\right|_{\alpha=\bar\alpha} = \left. f(Q(Q(q,\bar\alpha),\alpha')\right|_{\alpha'=0},$$

e, allo stesso modo,

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\bar\alpha} = \left.\frac{\mathrm{d}Q(Q(q,\bar\alpha),\alpha-\bar\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=\bar\alpha} = \left.\frac{\mathrm{d}Q(Q(q,\bar\alpha),\alpha')}{\mathrm{d}\alpha'}\right|_{\alpha'=0},$$

e quindi otteniamo

$$\left.\frac{\mathrm{d}Q(q',\alpha')}{\mathrm{d}\alpha'}\right|_{\alpha'=0} = f(q'), \qquad q' = Q(q,\bar\alpha).$$

Quindi imporre la (62.6) per ogni q e per ogni $\bar\alpha$ equivale a imporre la (62.5) per ogni q.

Definizione 62.5 (Sollevamento di un gruppo di diffeomorfismi) *Data un gruppo di diffeomorfismi $\mathcal{G}$ su una varietà differenziabile Σ, sia $q \mapsto Q(q,\alpha)$ la trasformazione di coordinate che lo rappresenta. Consideriamo la trasformazione definita sul fibrato tangente*

$$q \mapsto Q(q,\alpha), \tag{62.7a}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau} \mapsto \frac{\mathrm{d}Q(q,\alpha)}{\mathrm{d}\tau} = J(Q(q,\alpha),q)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}, \tag{62.7b}$$

se $\tau \mapsto q(\tau)$ è la parametrizzazione di una curva su Σ e $J(Q(q,\alpha),q)$ è la matrice jacobiana della trasformazione $q \mapsto Q(q,\alpha)$. Chiameremo la (62.7) sollevamento *della trasformazione* (62.1)*. Si definisce* sollevamento del gruppo di diffeomorfismi $\mathcal{G}$ *il gruppo che è rappresentato dalla* (62.7) *nel sistema di coordinate q.*

Osservazione 62.6 La seconda trasformazione in (62.7) è la legge di trasformazione dei vettori tangenti alla varietà. Se $\tau \mapsto q(\tau)$ è una traiettoria (quindi con $\tau = t$ interpretato come tempo), essa rappresenta la legge di trasformazione delle velocità.

Un campo vettoriale ξ su una varietà Σ è identificabile con una *derivazione* ∂_ξ (cioè un'applicazione lineare che soddisfi la regola di Leibniz) definita sullo spazio delle funzioni differenziabili su Σ. Se $\mathcal{U}$ è un intorno di un punto $x \in \Sigma$ in cui sia definito il sistema di coordinate q, allora il campo vettoriale è individuato da n funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$, tale che $f(q) = (f_1(q),\dots,f_n(q))$ è la rappresentazione di ξ nel sistema di coordinate fissato.

La derivazione associata è allora data da (cfr. l'esercizio 2)

$$\partial_\xi A(q) = \sum_{k=1}^n f_k(q)\,\frac{\partial A}{\partial q_k}, \tag{62.8}$$

per ogni funzione differenziabile $A\colon \Sigma \to \mathbb{R}$.

La (62.4) implica, per la (62.8), che

$$\partial_\xi A(q) = \left.\frac{\mathrm{d}A(Q(q,\alpha))}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}, \tag{62.9}$$

dove $q \mapsto Q(q, \alpha)$ è il gruppo a un parametro di trasformazioni associato al campo vettoriale ξ. Se ξ è individuato dalle funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$, con $f_k(q) = \delta_{ik}$ per qualche i, scriveremo $\partial_\xi = \partial_{q_i}$ e identificheremo il campo vettoriale con la derivazione ∂_{q_i}.

Definizione 62.7 *La derivazione definita dalla* (62.8) *prende il nome di* derivata di Lie *associata al campo vettoriale* ξ.

Osservazione 62.8 Dato un campo vettoriale ξ su una varietà Σ e una funzione A differenziabile definita su Σ, per definizione di differenziale e tenendo conto che $dq_k(\xi) = f_k(q)$, nel sistema di coordinate q, si ha

$$dA(\xi) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_k} dq_k(\xi) = \partial_\xi A, \tag{62.10}$$

se ∂_ξ è la derivazione definita da (62.8)

Data una varietà Σ, sia $T_x\Sigma$ lo spazio tangente in x a Σ. Se q è un sistema di coordinate locali per Σ (in un intorno di x in Σ) e η è un sistema di coordinate per $T_x\Sigma$, possiamo allora utilizzare (q, η) come sistema di coordinate locali per il fibrato tangente $T\Sigma$.

Definizione 62.9 (Momento associato a un campo vettoriale) *Sia Σ una varietà e sia $\mathcal{L}$ una lagrangiana definita su $T\Sigma$. In un sistema di coordinate locali (q, η) per $T\Sigma$, definiremo* momento associato al campo vettoriale ξ dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ *la funzione*

$$\pi_\xi^{\mathcal{L}}(q, \eta) := \sum_{k=1}^n f_k(q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k}(q, \eta), \tag{62.11}$$

da $T\Sigma$ in $\mathbb{R}$. Diremo che $\pi_\xi^{\mathcal{L}}(q, \dot{q})$ è un momento conservato *se è una costante del moto.*

Lemma 62.10 *Data una varietà Σ, fissata una lagrangiana $\mathcal{L}$ di classe C^2 su $T\Sigma$ tale che*

$$\det\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta_i \partial \eta_j}\right) \neq 0, \tag{62.12}$$

a ogni campo vettoriale ξ su Σ è associato in modo biunivoco un momento π di classe C^1.

Dimostrazione. Dato un campo vettoriale ξ, il suo momento associato $\pi = \pi_\xi^{\mathcal{L}}$ si ottiene dalla (62.11). Viceversa, dato un momento $\pi = \pi^{\mathcal{L}}$ della forma

$$\pi^{\mathcal{L}}(q, \eta) := \sum_{k=1}^n f_k(q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_k}(q, \eta), \tag{62.13}$$

la condizione (62.12) permette di associare a esso in maniera univoca un campo vettoriale $\xi = \xi_\pi^{\mathcal{L}}$. Infatti se la (62.12) è soddisfatta allora $\pi^{\mathcal{L}}$ dipende esplicitamente da η e la relazione

$$\frac{\partial \pi^{\mathcal{L}}}{\partial \eta_h}(q,\eta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(q)\, \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \eta_k \partial \eta_h}(q,\eta) := \sum_{k=1}^{n} D_{hk}(q,\eta)\, f_k(q) \tag{62.14}$$

può essere invertita in

$$f_k(q) = \sum_{h=1}^{n} \left(D^{-1}(q,\eta)\right)_{kh} \frac{\partial \pi^{\mathcal{L}}}{\partial \eta_h}(q,\eta), \tag{62.15}$$

che dunque permette di determinare le componenti $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ del campo vettoriale $\xi = \xi_\pi^{\mathcal{L}}$. ■

Osservazione 62.11 Il campo vettoriale ξ associa a ogni $x \in \Sigma$ un elemento di $T_x\Sigma$ (cfr. l'osservazione 62.3) Il momento (62.11) non dipende dal sistema di coordinate (cfr. l'esercizio 3). Fissato un sistema di coordinate (locali) q in Σ, il campo vettoriale ξ è rappresentato dal vettore di componenti $(f_1(q), \ldots, f_n(q))$. La (62.11) definisce quindi un funzionale lineare sullo spazio tangente $T_x\Sigma$, dunque un elemento di $T_x^*\Sigma$, spazio duale dello spazio tangente, che prende il nome di *spazio cotangente*.

Esempio 62.12 Sia $\mathcal{L}$ la lagrangiana di un sistema meccanico conservativo. Se ξ è il campo vettoriale associato alle traslazioni rigide in una direzione prefissata nello spazio euclideo tridimensionale, il momento associato a ξ da $\mathcal{L}$ è la componente della quantità di moto del sistema in quella direzione (cfr. l'esercizio 5).

Esempio 62.13 Sia $\mathcal{L}$ la lagrangiana di un sistema meccanico conservativo. Se ξ è il campo vettoriale associato alle rotazioni rigide intorno a un asse prefissato nello spazio euclideo tridimensionale, il momento associato a ξ da $\mathcal{L}$ è la componente del momento angolare del sistema nella direzione dell'asse (cfr. l'esercizio 7).

Definizione 62.14 (MOMENTO CONIUGATO) *Dato un sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}$, chiameremo* momento coniugato *alla coordinata q_k il momento associato da $\mathcal{L}$ al campo vettoriale ξ_k, dove ξ_k è il campo vettoriale di componenti δ_{ki}, i.e.*

$$\pi_{\xi_k}^{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \tag{62.16}$$

e scriveremo $p_k = \pi_{\xi_k}^{\mathcal{L}}$.

Lemma 62.15 *Dato un sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ che soddisfi la* (62.12)*, per ogni momento si può scegliere un sistema di coordinate tale che esso possa essere scritto nella forma*

$$p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n}, \tag{62.17}$$

i.e. ogni momento associato a un campo vettoriale ξ dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ può essere scritto come momento coniugato di una delle variabili, pur di scegliere un opportuno sistema di coordinate.

Dimostrazione. Dato un campo vettoriale ξ, rappresentato dalle funzioni $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ nel sistema di coordinate q, per il teorema della scatola di flusso (teorema 20.4) possiamo costruire un sistema di coordinate y in cui il campo vettoriale prende la forma $\{\delta_{kn}\}_{k=1}^n$. L'asserto segue dunque dalla definizione 62.9 e dalla definizione 62.14. ■

Definizione 62.16 (Invarianza della lagrangiana) *Dato un sistema lagrangiano e dato un gruppo a un parametro di trasformazioni di coordinate* (62.1)*, diremo che* $\mathcal{L}$ *è* invariante *sotto l'azione del gruppo, ovvero che il gruppo lascia invariante la lagrangiana* $\mathcal{L}$*, se*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \mathcal{L}(Q(q, \alpha), \dot{Q}(q, \alpha), t) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{62.18}$$

dove $\dot{Q}(q, \alpha)$ *è data dalla* (62.7) *con* $\tau = t$*.*

Osservazione 62.17 Dire che la lagrangiana $\mathcal{L}$ è invariante sotto l'azione del gruppo $\mathcal{G}$ significa che la funzione $(q, \dot{q}) \mapsto \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ è invariante sotto l'azione del sollevamento di $\mathcal{G}$ (cfr. la definizione 62.5).

Definizione 62.18 (Gruppo di simmetrie) *Se* $\mathcal{L}$ *è invariante sotto l'azione di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi* $\mathcal{G}$*, diremo che* $\mathcal{G}$ *è un gruppo di simmetrie per* $\mathcal{L}$*.*

Teorema 62.19 (Teorema di Noether) *Dato un sistema lagrangiano di classe* C^2*, le tre seguenti affermazioni sono equivalenti.*
(1) È possibile scegliere un sistema di coordinate in modo tale che una di esse sia ciclica.
(2) Esiste un momento conservato.
(3) La lagrangiana è invariante sotto l'azione di un gruppo a un parametro di diffeomorfismi.

Dimostrazione. Dimostreremo le implicazioni (1) → (2) → (3) → (1).

Supponiamo valga l'affermazione (1). Sia q il sistema di coordinate in cui una di esse sia ciclica; possiamo supporre, eventualmente rinumerando le variabili, che sia ciclica q_n. Quindi, per le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} = 0, \tag{62.19}$$

e quindi è conservato il momento coniugato alla variabile q_n, i.e. il momento $p_n = \pi^{\mathcal{L}}_{\xi_n}$ (cfr. la definizione 62.14).

Supponiamo che valga l'affermazione (2). Dal lemma 62.15 segue che nel sistema di coordinate in cui il momento conservato è il momento coniugato alla coordinata q_n, tale coordinata è una variabile ciclica. Quindi la lagrangiana è invariante per il gruppo di trasformazioni

$$q_k \mapsto q_k, \qquad k = 1, \ldots, n-1, \qquad q_n \mapsto q_n + \alpha, \tag{62.20}$$

che dunque implica l'affermazione (3).

Supponiamo che valga l'affermazione (3). Siano $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ le funzioni che rappresentano il campo vettoriale associato al gruppo a un parametro di trasformazioni, nel sistema di coordinate q; per costruzione la trasformazione $q \mapsto Q(q,\alpha)$ è soluzione del sistema di equazioni

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\alpha} = f_k(Q), \qquad Q(q,0) = q. \tag{62.21}$$

Per il teorema della scatola di flusso (teorema 20.4), possiamo scegliere un sistema di coordinate y tali che il sistema (62.21) prenda la forma

$$\frac{\partial y_k}{\partial \alpha} = 0, \qquad k = 1,\dots,n-1, \tag{62.22a}$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial \alpha} = 1, \tag{62.22b}$$

le cui soluzioni sono

$$y_k(\alpha) = y_k(0), \qquad k = 1,\dots,n-1, \qquad y_n(\alpha) = y_n(0) + \alpha, \tag{62.23}$$

Indichiamo con $\tilde{\mathcal{L}}$ la lagrangiana nelle nuove coordinate, i.e. $\tilde{\mathcal{L}}(y,\dot{y},t) = \mathcal{L}(q,\dot{q},t)$. Poiché

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}\alpha} = \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{y}}, \frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}\alpha} \right\rangle = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y_n}\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y_n}$$

e per ipotesi $\mathrm{d}\tilde{\mathcal{L}}/\mathrm{d}\alpha = 0$, segue dalla (62.23) che deve essere

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial y_n} = 0$$

e quindi, nel sistema di coordinate y, y_n è una variabile ciclica. ■

Osservazione 62.20 L'implicazione (2) → (3) del teorema 62.19 si può dimostrare nel modo seguente (senza invocare il teorema della scatola di flusso). Siano $\pi^{\mathcal{L}}$ il momento conservato, $\xi_\pi^{\mathcal{L}}$ il campo vettoriale associatogli dalla lagrangiana $\mathcal{L}$ e $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ la rappresentazione di tale campo vettoriale nelle coordinate q. Consideriamo il sistema di equazioni

$$\frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}\alpha} = f_k(Q), \qquad k = 1,\dots,n, \tag{62.24}$$

e sia $Q(q,\alpha)$ la soluzione con dato iniziale $Q(q,0) = q$. Poiché il campo vettoriale è differenziabile, tale soluzione è unica (per il teorema 11.27). Sia $t \mapsto q(t)$ una soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange (per opportuni dati iniziali). Poiché $\pi^{\mathcal{L}}$ è un momento conservato, si deve avere

$$\frac{\mathrm{d}\pi^{\mathcal{L}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^n f_k(q(t))\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\big(q(t),\dot{q}(t)\big) \right) = 0. \tag{62.25}$$

Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange, la regolarità di $\mathcal{L}$, il fatto che $Q(q(t),0)=q(t)$ e il fatto che α e t sono parametri indipendenti, otteniamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(q(t))\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(Q(q(t),\alpha))\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_k}\big(Q(q(t),\alpha),\dot{Q}(q(t),\alpha),t\big)\right)\Bigg|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle f,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} = \left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} + \left\langle f,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \left\langle f,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} + \left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \left\langle \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha},\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} + \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}\right),\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q},\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\alpha}\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)\right\rangle\bigg|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\alpha}\big(Q(q(t),\alpha),\dot{Q}(q(t),\alpha),t\big)\Big|_{\alpha=0},
\end{aligned}
\tag{62.26}
$$

dove abbiamo usato che $Q(q,\alpha)$ è di classe C^1 sia in q sia in α per scambiare l'ordine delle derivazioni rispetto alle due variabili. L'identità (62.26), dimostrata per $\alpha=0$, vale in realtà per ogni α, per le proprietà di gruppo della trasformazione $q\mapsto Q(q,\alpha)$. Basta ragionare come fatto nell'osservazione 62.4 (cfr. l'esercizio 8). Possiamo quindi concludere che si ha $\mathrm{d}\mathcal{L}/\mathrm{d}\alpha=0$ per ogni α, ovvero $\mathcal{L}$ è invariante sotto l'azione del gruppo a un parametro $q\mapsto Q(q,\alpha)$.

Osservazione 62.21 Dalla dimostrazione del teorema, si evince che il sistema di coordinate in cui una variabile è ciclica è tale che, in quel sistema, il gruppo agisce come una traslazione di quella variabile. In altre parole si può usare come coordinata il parametro α

Osservazione 62.22 Non tutte le costanti del moto di un sistema lagrangiano sono funzioni dei momenti conservati, i.e. esistono costanti del moto non riconducibili a simmetrie delle lagrangiana. Per esempio, se $\mathcal{L}\colon T\Sigma\to\mathbb{R}$ descrive un sistema meccanico conservativo autonomo, è costante l'energia totale $E=T+V$ del sistema, che non è tuttavia una funzione dei momenti se $V\neq 0$. La conservazione dell'energia è in realtà una conseguenza dell'invarianza della lagrangiana sotto l'azione della trasformazione $t\mapsto t+\alpha$, che non è però una trasformazione definita sullo spazio delle configurazioni. Per poter considerare la conservazione dell'energia come un caso particolare del teorema 62.19, occorre considerare lo *spazio delle configurazioni esteso*, dato da $\Sigma\times\mathbb{R}$, dove Σ è lo spazio delle configurazioni e $\mathbb{R}$ è l'asse dei tempi. Si noti però che, se si vuole estendere $\mathcal{L}$ a una funzione che dipenda anche da t e $\dot{t}$, si ottiene una lagrangiana "singolare", i.e. che non soddisfa la condizione (62.12) (cfr. l'esercizio 9).