

§63 Gruppi di simmetrie che dipendono da più parametri

Nel §62 si sono discusse le implicazioni dell'esistenza di un gruppo di simmetrie per un sistema lagrangiano. Ci si può chiedere se, nel caso in cui il sistema ammetta M gruppi di simmetrie, sia possibile ridursi a un sistema lagrangiano che abbia $n - M$ gradi di libertà. In generale la risposta è negativa. Vedremo che perché la riduzione sia possibile occorre che i gruppi "commutino tra loro", i.e. che, se $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_M$ sono i gruppi a un parametro, si abbia

$$g_i(\alpha) \circ g_j(\beta) = g_j(\beta) \circ g_i(\alpha) \quad \forall g_i \in \mathcal{G}_i, \quad \forall g_j \in \mathcal{G}_j, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (63.1)$$

Se la proprietà (63.1) non è soddisfatta, quello che si può dire in generale è che esistono M costanti del moto tra loro funzionalmente indipendenti tali che il moto si svolge su una superficie di codimensione M del fibrato tangente e se il sistema è autonomo (così che si conserva anche l'energia) su una superficie di codimensione $M + 1$. In tale caso tuttavia il sistema ridotto non è in generale un sistema lagrangiano – i.e. le equazioni del moto non sono le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti a una qualche lagrangiana – con un numero di gradi di libertà inferiore. Infatti per passare da un sistema lagrangiano dato a un sistema lagrangiano con un grado in libertà in meno, applicando il teorema 59.4, bisogna utilizzare il fatto che una variabile è ciclica. Se le (63.1) non sono soddisfatte, è allora senz'altro possibile fissare un sistema di coordinate in cui una di esse sia ciclica (per il teorema 62.19). Ma, a questo punto, se le trasformazioni corrispondenti ai gruppi a un parametro non verificano la (63.1), nel sistema di coordinate fissato, non ci potranno essere altre variabili cicliche e non sarà possibile riapplicare il teorema 59.4 una seconda volta.

Lemma 63.1 *Data una varietà differenziabile Σ e dati due campi vettoriali ξ, ζ definiti su Σ , se ∂_ξ e ∂_ζ indicano le derivazioni associate, rispettivamente, ai due campi vettoriali, allora l'operazione*

$$\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi \quad (63.2)$$

è una derivazione definita sulle funzioni due volte differenziabili.

Dimostrazione. Poiché la (63.2) è ovviamente lineare, è sufficiente dimostrare che soddisfa la regola di Leibniz.

Siano A e B due funzioni due volte differenziabili su Σ . Si ha allora

$$\partial_\xi \partial_\zeta (AB) = \partial_\xi (B \partial_\zeta A + A \partial_\zeta B) = (\partial_\xi B) (\partial_\zeta A) + B (\partial_\xi \partial_\zeta A) + (\partial_\xi A) (\partial_\zeta B) + A (\partial_\xi \partial_\zeta B),$$

e analogamente si calcola $\partial_\zeta \partial_\xi (AB)$. Sottraendo l'una dall'altra le due espressioni trovate si vede che i termini $(\partial_\xi B) (\partial_\zeta A)$ e $(\partial_\xi A) (\partial_\zeta B)$ si cancellano e si trova quindi

$$(\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi) (AB) = A (\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi) B + B (\partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi) A,$$

che conclude la dimostrazione. ■

Definizione 63.2 (PRODOTTO DI LIE) Sia Σ una varietà differenziabile e siano ξ, ζ due campi vettoriali definiti su Σ . Siano ∂_ξ e ∂_ζ le due derivazioni associate, rispettivamente, a ξ e ζ . Si definisce prodotto di Lie dei due campi vettoriali ξ e ζ il campo vettoriale associato alla derivazione (63.2). Scriveremo

$$\partial_{[\xi, \zeta]} = \partial_\xi \partial_\zeta - \partial_\zeta \partial_\xi, \quad (63.3)$$

i.e. il prodotto di Lie dei due campi ξ, ζ sarà indicato con il simbolo $[\xi, \zeta]$.

Lemma 63.3 Il prodotto di Lie gode delle seguenti proprietà:

- (1) è antisimmetrico: $[\xi_1, \xi_2] = -[\xi_2, \xi_1]$;
- (2) è lineare: $[(\xi_1 + \xi_2), \xi_3] = [\xi_1, \xi_3] + [\xi_2, \xi_3]$;
- (3) soddisfa l'identità di Jacobi: $[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0$.

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla (63.3) (cfr. anche gli esercizi 10, 11 e 12). ■

Lemma 63.4 Fissato un sistema di coordinate locali su una varietà differenziabile Σ tale che i due campi ξ e ζ definiti su Σ siano rappresentati dalle funzioni, rispettivamente, $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ e $\{g_k(q)\}_{k=1}^n$, allora le funzioni

$$\left\{ \sum_{h=1}^n \left(f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right) \right\}_{k=1}^n \quad (63.4)$$

rappresenteranno il campo vettoriale $[\xi, \zeta]$.

Dimostrazione. Sia A una funzione due volte differenziabile; si ha allora

$$\partial_\xi \partial_\zeta A = \sum_{k=1}^n f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} (\partial_\zeta A) = \sum_{k=1}^n f_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{h=1}^n g_h(q) \frac{\partial A}{\partial q_h} \right), \quad (63.5)$$

e, analogamente,

$$\partial_\zeta \partial_\xi A = \sum_{k=1}^n g_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} (\partial_\xi A) = \sum_{k=1}^n g_k(q) \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{h=1}^n f_h(q) \frac{\partial A}{\partial q_h} \right), \quad (63.6)$$

da cui, utilizzando la definizione 63.2 di $[\xi, \zeta]$, segue la (63.4). ■

Osservazione 63.5 Sebbene il campo vettoriale $[\xi, \zeta]$ sia stato definito utilizzando funzioni di classe C^2 , di fatto risulta definito come derivazione su funzioni di classe C^1 , i.e.

$$\partial_{[\xi, \zeta]} A = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n \left(f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right) \frac{\partial A}{\partial q_k}. \quad (63.7)$$

Definizione 63.6 (COMMUTAZIONE DI CAMPI VETTORIALI) *Dati due campi vettoriali ξ, ζ definiti su una varietà regolare Σ , diremo che essi commutano se il loro prodotto di Lie è nullo, i.e. se $[\xi, \zeta] = 0$.*

Teorema 63.7 *Data un varietà differenziabile Σ di dimensione n e dati M campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_M , con $M \leq n$, definiti su Σ e di classe C^1 , la condizione*

$$[\xi_i, \xi_j] = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, M, \quad (63.8)$$

è soddisfatta se e solo se i gruppi a un parametro di diffeomorfismi associati soddisfano le relazioni

$$g_i(\alpha_i) \circ g_j(\alpha_j) = g_j(\alpha_j) \circ g_i(\alpha_i) \quad \forall \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad (63.9)$$

per ogni $i, j = 1, \dots, M$.

Dimostrazione. Siano $q \mapsto Q_i(q, \alpha_i)$ le trasformazioni di coordinate che rappresentano localmente i diffeomorfismi $g_i(\alpha_i)$ e siano $\{f_{ik}(q)\}_{k=1}^n$ le funzioni che rappresentano localmente i campi vettoriali ξ_i associati a tali diffeomorfismi. Le relazioni (63.9), nel sistema di coordinate q , diventano

$$Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j) \quad \forall \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{R}. \quad (63.10)$$

Vogliamo dimostrare che le (63.10) sono soddisfatte se e solo se valgono le relazioni (63.8).

Le (63.8) implicano, per il lemma 63.4,

$$\sum_{h=1}^n \left(f_{ih} \frac{\partial f_{jk}}{\partial q_h} - f_{jh} \frac{\partial f_{ik}}{\partial q_h} \right) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, M, \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad (63.11)$$

che possiamo riscrivere, in modo più compatto,

$$\left\langle f_i, \frac{\partial f_j}{\partial q} \right\rangle - \left\langle f_j, \frac{\partial f_i}{\partial q} \right\rangle = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, M. \quad (63.12)$$

Per semplicità, supponiamo inizialmente che i diffeomorfismi siano di classe C^2 . Allora, per ogni $i, j = 1, \dots, M$, si ha allora, per $\alpha_i, \alpha_j \rightarrow 0$ (cfr. l'esercizio 13),

$$\begin{aligned} Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) &= q + f_i(q) \alpha_i \\ &+ f_j(q) \alpha_j + \left\langle f_j(q), \frac{\partial f_i}{\partial q}(q) \right\rangle \alpha_i \alpha_j \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i}(q) \alpha_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial f_j}{\partial \alpha_j}(q) \alpha_j^2 + N_i(\alpha_i, \alpha_j), \end{aligned} \quad (63.13)$$

dove $N_i(\alpha_i, \alpha_j)$ è tale che

$$\lim_{\alpha_i, \alpha_j \rightarrow 0} \frac{N_i(\alpha_i, \alpha_j)}{\alpha_i^2 + \alpha_j^2} = 0, \quad (63.14)$$

e un'analogia espressione vale per $Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j)$, con i ruoli di i e j scambiati tra loro. In conclusione risulta

$$\begin{aligned} & Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) - Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j) \\ &= \left(\left\langle f_j(q), \frac{\partial f_i}{\partial q}(q) \right\rangle - \left\langle f_i(q), \frac{\partial f_j}{\partial q}(q) \right\rangle \right) \alpha_i \alpha_j + N_i(\alpha_i, \alpha_j) - N_j(\alpha_i, \alpha_j), \end{aligned} \quad (63.15)$$

dove $N_j(\alpha_i, \alpha_j)$ soddisfa la stessa proprietà (63.14) di $N_i(\alpha_i, \alpha_j)$. Dobbiamo allora far vedere che, in virtù della (63.15), si ha

$$Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) - Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j) = 0 \quad (63.16)$$

se e solo vale la (63.12).

Se la (63.16) è soddisfatta allora, in particolare, il coefficiente di $\alpha_i \alpha_j$ in (63.15) deve essere identicamente nullo e quindi ne segue la (63.12).

Viceversa, supponiamo che valga la (63.12) e mostriamo che allora deve valere la (63.16). Se prendiamo $k \in \mathbb{N}$ e definiamo le trasformazioni

$$F := Q_i(\cdot, \alpha_i/k), \quad G := Q_j(\cdot, \alpha_j/k),$$

per le proprietà di gruppo si ha

$$Q_i(q, \alpha_i) = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \text{ volte}}(q), \quad Q_j(q, \alpha_j) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ volte}}(q),$$

e quindi

$$Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \text{ volte}} \circ \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ volte}}(q). \quad (63.17)$$

D'altra parte, se vale la (63.12), la (63.15) dà

$$F \circ G = G \circ F + o(1/k^2),$$

così che possiamo portare la prima G in (63.17) a sinistra in k passi commettendo un ordine $o(1/k^2)$ a ogni passo. Tenendo conto anche della dipendenza differenziabile dai dati iniziali, si trova

$$Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = G \circ \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \text{ volte}} \circ \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k-1 \text{ volte}}(q) + k o(1/k^2).$$

Possiamo poi spostare la seconda G a sinistra di tutte le F in altri k passi, di nuovo compiendo un errore $o(1/k^2)$ a ogni passo, in modo da ottenere

$$Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = G \circ G \circ \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \text{ volte}} \circ \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k-2 \text{ volte}}(q) + 2k o(1/k^2).$$

E così via fino all'ultima G , per un totale di k^2 passi: alla fine arriviamo a

$$Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = \underbrace{G \circ G \circ \dots \circ G}_{k \text{ volte}} \circ \underbrace{F \circ F \circ \dots \circ F}_{k \text{ volte}}(q) + k^2 o(1/k^2).$$

i.e. $Q_i(Q_j(q, \alpha_j), \alpha_i) = Q_j(Q_i(q, \alpha_i), \alpha_j) + k^2 o(1/k^2)$. Per l'arbitrarietà di k , possiamo passare al limite $k \rightarrow \infty$ e troviamo la (63.16).

Se i diffeomorfismi sono solo di classe C^1 si veda l'esercizio 13. ■

Teorema 63.8 (TEOREMA DI FROBENIUS) *Data un varietà differenziabile Σ di dimensione n e dati M campi vettoriali di classe C^1 linearmente indipendenti ξ_1, \dots, ξ_M , con $M \leq n$, definiti su (un intorno \mathcal{U} di) Σ , la condizione (63.8) è condizione necessaria e sufficiente perché si possa scegliere un sistema di coordinate locali $q = (q_1, \dots, q_n)$ tali che (sia possibile scegliere un intorno $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ in cui) ogni campo vettoriale ξ_i abbia derivata di Lie*

$$\partial_{\xi_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \tag{63.18}$$

per ogni $i = 1, \dots, M$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima che la condizione (63.8) è necessaria. Se esiste un sistema di coordinate in cui ogni campo vettoriale ξ_i sia nella forma (63.18) allora le funzioni che rappresentano i campi ξ_i sono date da $\{\delta_{ik}\}_{k=1}^n$ e quindi le (63.4) che rappresentano il campo $[\xi_i, \xi_j]$ sono identicamente nulle, i.e. $[\xi_i, \xi_j] = 0$, per ogni $i, j = 1, \dots, M$.

Dimostriamo ora che le condizioni (63.8) sono anche sufficienti perché valga la rappresentazione (63.18). Basta, a questo scopo, dimostrare che la condizione (63.8) implica che esiste un sistema di coordinate in cui il gruppo di trasformazioni associato a ogni campo vettoriale ξ_i sia dato da

$$q_i \mapsto q_i + \alpha, \quad q_k \mapsto q_k, \quad \forall k \neq i. \tag{63.19}$$

Infatti se la trasformazione $q \mapsto Q(q, \alpha)$ è data dalla (63.19) allora il campo vettoriale associato attraverso la (62.4) è appunto dato dalla (63.18).

Ricordiamo che M campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_M sono linearmente indipendenti se la relazione $c_1 \xi_1 + \dots + c_M \xi_M = 0$ è soddisfatta se e solo se $c_m = 0 \forall m = 1, \dots, M$.

Sia $x_0 \in \Sigma$ un punto in cui le funzioni $\{f_{ik}(q)\}_{k=1}^n$ che rappresentano i campi vettoriali, in un opportuno sistema di coordinate q , abbiano la forma

$$f_{ik}(q_0) = f_i(q_0) \delta_{ik}, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, M, \tag{63.20}$$

dove q_0 sono le coordinate di x_0 e $f_i(q_0) \neq 0$ per $i = 1, \dots, M$; l'esistenza di un sistema di coordinate in cui questo è possibile segue dall'indipendenza dei campi vettoriali (cfr. l'esercizio 14). Possiamo fissare l'origine di tale sistema di coordinate in modo che si abbia $q_0 = 0$.

Sia $\mathcal{U} \subset \Sigma$ un intorno di x_0 (che dovrà essere scelto così piccolo che le disequaglianze scritte sotto in x_0 valgono per continuità anche in \mathcal{U}) e sia $x \in \mathcal{U}$. Consideriamo le M funzioni

$$\begin{aligned} F_i(q, \alpha_1, \dots, \alpha_M) &= q_i + \int_0^{\alpha_1} d\alpha'_1 f_{1i}(Q_1(q, \alpha'_1)) \\ &+ \int_0^{\alpha_2} d\alpha'_2 f_{2i}(Q_2(Q_1(q, \alpha_1), \alpha'_2)) + \dots \\ &+ \int_0^{\alpha_M} d\alpha'_M f_{Mi}(Q_M(Q_{M-1}(\dots Q_1(q, \alpha_1), \dots, \alpha_{M-1}), \alpha'_M)), \quad i = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (63.21)$$

dove q sono le coordinate di x . Tenendo conto che

- (1) $F_i(q_0, 0, \dots, 0) = 0$ per $i = 1, \dots, M$ (ricordiamo che $q_0 = 0$), e
 (2) $[\partial F_i / \partial \alpha_j](q_0, 0, \dots, 0) = f_i(q_0) \delta_{ij}$, dove $f_i(q_0) \neq 0$, per $i = 1, \dots, M$,
 così che

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}(q_0, 0, \dots, 0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_M}(q_0, 0, \dots, 0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_M}{\partial \alpha_1}(q_0, 0, \dots, 0) & \dots & \frac{\partial F_M}{\partial \alpha_M}(q_0, 0, \dots, 0) \end{pmatrix} = f_1(q_0) \dots f_M(q_0) \neq 0, \quad (63.22)$$

possiamo applicare il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 4) e concludere che esistono M funzioni

$$\tilde{\alpha}_1(q), \dots, \tilde{\alpha}_M(q), \quad (63.23)$$

tali che

$$F_i(q, \tilde{\alpha}_1(q), \dots, \tilde{\alpha}_M(q)) = 0. \quad (63.24)$$

Le funzioni $F_i(q, \alpha_1, \dots, \alpha_M)$ in (63.21) rappresentano i valori delle prime M coordinate del punto che si ottiene da q applicando successivamente le M trasformazioni $q \mapsto Q_i(q, \alpha_i)$ che rappresentano i diffeomorfismi $g_i(\alpha_i)$ nelle coordinate q . In altre parole si ha

$$F_i(q, \alpha_1, \dots, \alpha_M) = Q_{Mi}(Q_{M-1}(\dots Q_1(q, \alpha_1), \dots, \alpha_{M-1}), \alpha_M).$$

L'esistenza delle funzioni (63.23) che rendono valide le identità (63.24) significa che si possono fissare i valori dei parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ in modo tale che il punto q finisca in un punto che ha componenti nulle lungo le direzioni dei primi M assi coordinati (cfr. la dimostrazione analoga nel caso del teorema della scatola di flusso nel §20).

Dal teorema 63.7 segue che, sotto l'ipotesi (63.8) sui campi vettoriali ξ_1, \dots, ξ_M , i gruppi a un parametro corrispondenti verificano le relazioni (63.9): l'ordine in cui le trasformazioni sono applicate non è importante e quindi, senza perdita di generalità, possiamo supporre

(come stiamo facendo) che sia prima applicata la trasformazione $q \mapsto Q_1(q, \alpha_1)$, poi la trasformazione $Q_1(q, \alpha_1) \mapsto Q_2(Q_1(q, \alpha_1), \alpha_2)$ e così via. In particolare le funzioni (63.23) dipendono solo da q e non dall'ordine in cui le trasformazioni sono applicate: quindi i valori $\tilde{\alpha}_1(q), \dots, \tilde{\alpha}_M(q)$ sono fissati univocamente da q e la trasformazione $q \mapsto (\tilde{\alpha}_1(q), \dots, \tilde{\alpha}_M(q))$ definisce un diffeomorfismo.

Consideriamo ora la trasformazione di coordinate

$$\psi: (q_1, \dots, q_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n) \quad (63.25)$$

definita da

$$y_i = \psi_i(q) := \tilde{\alpha}_i(q), \quad (63.26)$$

per $i = 1, \dots, M$, e

$$\begin{aligned} y_i = \psi_i(q) &:= q_i + \int_0^{\tilde{\alpha}_1(q)} d\alpha'_1 f_{1i}(Q_1(q, \alpha'_1)) \\ &+ \int_0^{\tilde{\alpha}_2(q)} d\alpha'_2 f_{2i}(Q_2(Q_1(q, \tilde{\alpha}_1(q)), \alpha'_2)) + \dots \\ &+ \int_0^{\tilde{\alpha}_M(q)} d\alpha'_M f_{Mi}(Q_M(Q_{M-1}(\dots Q_1(q, \tilde{\alpha}_1(q)), \dots, \tilde{\alpha}_{M-1}(q)), \alpha'_M)), \end{aligned} \quad (63.27)$$

per $i = M + 1, \dots, n$.

Per costruzione le $\psi_i(q)$ in (63.27) definiscono le ultime $n - M$ coordinate del punto che si ottiene da q applicando successivamente le M trasformazioni $q \mapsto Q_i(q, \alpha_i)$, che rappresentano i diffeomorfismi $g_i(\alpha_i)$ nelle coordinate q , per $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i(q)$ (per costruzione le prime M coordinate sono nulle). Quindi si ha

$$\psi_i(q) = Q_{Mi}(Q_{M-1}(\dots Q_1(q, \tilde{\alpha}_1(q)), \dots, \tilde{\alpha}_{M-1}(q)), \tilde{\alpha}_M(q)),$$

per $i = M + 1, \dots, n$.

Si verifica innanzitutto (cfr. l'esercizio 15) che

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}(q_0) = \delta_{ij}, \quad i = M + 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad (63.28)$$

mentre, per $i, j = 1, \dots, M$, si ha (cfr. l'esercizio 16)

$$0 = \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}(q_0) = \delta_{ij} + \sum_{k=1}^M f_{ki}(q_0) \frac{\partial \tilde{\alpha}_k}{\partial q_j}(q_0) = \delta_{ij} + f_i(q_0) \frac{\partial \tilde{\alpha}_i}{\partial q_j}(q_0), \quad (63.29)$$

così che, utilizzando le (63.20) e (63.22), otteniamo

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_M}(q_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_M}{\partial q_1}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_M}{\partial q_M}(q_0) \end{pmatrix} &:= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\alpha}_1}{\partial q_1}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \tilde{\alpha}_1}{\partial q_M}(q_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{\alpha}_M}{\partial q_1}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \tilde{\alpha}_M}{\partial q_M}(q_0) \end{pmatrix} \\ &= (-1)^M \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ f_1(q_0) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & f_M(q_0) \end{pmatrix} \neq 0. \end{aligned} \quad (63.30)$$

Se consideriamo la matrice jacobiana

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}(q_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial q_1}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_M}(q_0) & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_{M+1}}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial q_n}(q_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_M}{\partial q_1}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_M}{\partial q_M}(q_0) & \frac{\partial \psi_M}{\partial q_{M+1}}(q_0) & \cdots & \frac{\partial \psi_M}{\partial q_n}(q_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

della trasformazione data dalle (63.26) e (63.27), il suo determinante sarà dato dalla (63.30) e quindi sarà non nullo. Inoltre, poiché le funzioni (63.23) hanno la stessa regolarità dei campi vettoriali, la trasformazione (63.26) non solo è non singolare ma ha anche la stessa regolarità dei campi vettoriali.

Si verifica facilmente (cfr. l'esercizio 17), a partire, dalle definizioni di $\tilde{\alpha}_i$ e di y_i , che, per ogni $i = 1, \dots, M$ e per ogni $k = 1, \dots, n$, risulta

$$\frac{dy_i}{d\alpha_i} = \frac{d\tilde{\alpha}_i}{d\alpha_i} = -1, \quad \frac{dy_k}{d\alpha_i} = 0, \quad \forall k \neq i, \quad (63.31)$$

così che, nelle coordinate $y' = -y$, il gruppo di trasformazioni associate al campo vettoriale ξ_i assume le forma

$$y'_i \mapsto y'_i + \alpha_i, \quad y'_k \mapsto y'_k, \quad k \neq i, \quad (63.32)$$

che quindi dimostra l'asserto. ■

Osservazione 63.9 Il teorema 63.8 implica che, se i campi ξ_1, \dots, ξ_M commutano, allora è possibile utilizzare i parametri dei sottogruppi di trasformazioni associati ai campi vettoriali come coordinate indipendenti, almeno in un intorno abbastanza piccolo \mathcal{U}' .

Osservazione 63.10 Il teorema di Frobenius può essere visto come una generalizzazione del teorema della scatola di flusso (teorema 20.4) al caso in cui si abbiano più campi vettoriali.

Definizione 63.11 (SOLLEVAMENTO DI UN CAMPO VETTORIALE) *Dato un campo vettoriale ξ definito su una varietà differenziabile Σ , sia $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ la sua rappresentazione in un sistema di coordinate q . Se (q, η) sono le coordinate utilizzate per descrivere localmente il fibrato tangente $T\Sigma$, si definisce sollevamento del campo vettoriale ξ il campo vettoriale $T\xi$, definito su $T\Sigma$, rappresentato dalle funzioni*

$$\left\{ f_k(q), \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h} \eta_h \right\}_{k=1}^n. \quad (63.33)$$

Osservazione 63.12 La definizione 63.11 ha la seguente motivazione. Sia $(q, \eta) \mapsto A(q, \eta)$ una funzione differenziabile definita su $T\Sigma$. Se $Q(q, \alpha)$ è la soluzione del sistema di equazioni

$$\frac{dQ_k}{d\alpha} = f_k(Q), \quad k = 1, \dots, n, \quad (63.34)$$

individuato dal campo vettoriale ξ , ricordiamo che i vettori tangenti η si trasformano secondo la (62.7), i.e.

$$\eta_k \mapsto \tilde{\eta}_k := \sum_{h=1}^n \frac{\partial Q_k}{\partial q_h} \eta_h, \quad (63.35)$$

e quindi

$$\frac{d\tilde{\eta}_k}{d\alpha} = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dQ_k}{d\alpha} = \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k(Q)}{\partial Q_h} \frac{\partial Q_h}{\partial q_j} \eta_j = \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_k(Q)}{\partial Q_h} \tilde{\eta}_h. \quad (63.36)$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{dQ_k(q)}{d\alpha} \frac{\partial A}{\partial q_k} + \frac{d\tilde{\eta}_k}{d\alpha} \frac{\partial A}{\partial \eta_k} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=1}^n f_k(q) \frac{\partial A}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \frac{d\tilde{\eta}_k}{d\alpha} \frac{\partial A}{\partial \eta_k} \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{k=1}^n f_k(q) \frac{\partial A}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{h=1}^n \frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h} \eta_h \right) \frac{\partial A}{\partial \eta_k} = \partial_{T\xi} A, \end{aligned} \quad (63.37)$$

dove abbiamo utilizzato la (63.36). La (63.37) giustifica quindi la definizione 63.11.

Lemma 63.13 *Dati due campi vettoriali ξ e ζ su una varietà differenziabile Σ , siano $T\xi$ e $T\zeta$ i loro sollevati. Allora risulta*

$$[T\xi, T\zeta] = T[\xi, \zeta], \quad (63.38)$$

se $[\xi, \zeta]$ è il prodotto di Lie dei due campi e $[T\xi, T\zeta]$ è il prodotto di Lie dei loro sollevati.

Dimostrazione. Fissato un sistema di coordinate $z = (q, \eta)$ in $T\Sigma$, i campi vettoriali $T\xi$ e $T\zeta$ hanno componenti

$$\{F_k(q, \eta)\}_{k=1}^{2n} = \left\{ f_k(q), \sum_{h=1}^n \frac{\partial f_k(q)}{\partial q_h} \eta_h \right\}_{k=1}^n, \quad \{G_k(q, \eta)\}_{k=1}^{2n} = \left\{ g_k(q), \sum_{h=1}^n \frac{\partial g_k(q)}{\partial q_h} \eta_h \right\}_{k=1}^n,$$

se $\{f_k(q)\}_{k=1}^n$ e $\{g_k(q)\}_{k=1}^n$ sono le componenti dei campi vettoriali ξ e ζ , rispettivamente. Per il lemma 63.4 le componenti del campo vettoriale $[T\xi, T\zeta]$ sono

$$\left\{ \sum_{h=1}^{2N} \left(F_h \frac{\partial G_k}{\partial z_h} - G_h \frac{\partial F_k}{\partial z_h} \right) \right\}_{k=1}^{2n}. \quad (63.39)$$

D'altra parte, in base alla definizione 63.11, il sollevamento di $[\xi, \zeta]$ ha componenti

$$\left\{ \sum_{h=1}^n \left(f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right), \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{h=1}^n \left(f_h \frac{\partial g_k}{\partial q_h} - g_h \frac{\partial f_k}{\partial q_h} \right) \eta_k \right\}_{k=1}^n. \quad (63.40)$$

È allora facile vedere che i due campi vettoriali $[T\xi, T\zeta]$, di componenti (63.39), e $T[\xi, \zeta]$, di componenti (63.40) coincidono. Questo è ovvio per le prime n componenti, e si verifica con un rapido conto per le restanti n componenti. ■

Corollario 63.14 *Dati due campi vettoriali ξ e ζ su una varietà differenziabile Σ , siano $T\xi$ e $T\zeta$ i loro sollevati. Si ha allora $[T\xi, T\zeta] = 0$ se e solo se $[\xi, \zeta] = 0$.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dall'identità (63.38). ■

Teorema 63.15 (TEOREMA DI NOETHER) *Dato un sistema lagrangiano di classe C^2 , è possibile trovare un sistema di coordinate tale che M di esse siano cicliche se e solo se esistono M gruppi a un parametro di diffeomorfismi dello spazio delle configurazioni in sé, $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_M$, indipendenti tra loro e tali da lasciare invariante la lagrangiana, che soddisfino le relazioni (63.9) per ogni $i, j = 1, \dots, M$. In tal caso i parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ dei gruppi $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_M$ possono essere usati come coordinate.*

Dimostrazione. Per il teorema 63.7, le relazioni (63.9) sono equivalenti alle (63.8), e per il teorema 63.8 sono quindi soddisfatte se e solo se esiste un opportuno sistema di coordinate locali in cui i campi vettoriali sono rappresentati dalle (63.18). Questo vuol dire che le trasformazioni associate, in tale sistema di coordinate, sono date da

$$q_i \mapsto q_i + \alpha_i, \quad q_k \mapsto q_k, \quad \forall k \neq i, \quad (63.41)$$

per $i = 1, \dots, M$, e soddisfano banalmente le regole di commutazione (63.9).

In conclusione valgono le (63.9) se e solo se esiste un sistema di coordinate locali q in cui le trasformazioni che rappresentano i gruppi a un parametro sono date dalle (63.41). In tale sistema di coordinate si ha

$$\left. \frac{d\mathcal{L}}{d\alpha_i} \right|_{\alpha_i=0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \quad (63.42)$$

Supponiamo ora che i gruppi di diffeomorfismi lascino invariante la lagrangiana e soddisfino le (63.9), i.e. $d\mathcal{L}/d\alpha_i = 0$. Per la (63.42), nel sistema di coordinate q , le coordinate q_i , $i = 1, \dots, M$, sono quindi variabili cicliche. In particolare si possono utilizzare come coordinate proprio i parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_M$.

Viceversa, supponiamo che nel sistema di coordinate q le variabili q_1, \dots, q_M siano cicliche. Allora, per la (63.42), le trasformazioni (63.41) lasciano invariante la lagrangiana, e quindi, se definiamo $g_i(\alpha_i)$ le trasformazioni date dalle (63.41), seguono le (63.9). ■

Teorema 63.16 *Sia Σ una varietà differenziabile e sia $\mathcal{L}: T\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una lagrangiana definita su $T\Sigma$. Se i campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 corrispondono a gruppi di simmetrie di \mathcal{L} , allora anche il loro prodotto di Lie $[\xi_1, \xi_2]$, se non è nullo, corrisponde a un gruppo di simmetrie di \mathcal{L} .*

Dimostrazione. Se la lagrangiana \mathcal{L} è invariante sotto l'azione dei gruppi di simmetrie associati ai campi vettoriali ξ_1 e ξ_2 si ha

$$\partial_{T\xi_1} \mathcal{L} = \partial_{T\xi_2} \mathcal{L} = 0.$$

Quindi, per la definizione 63.2 di prodotto di Lie, si ha

$$\partial_{[T\xi_1, T\xi_2]} \mathcal{L} = \partial_{T\xi_1} \partial_{T\xi_2} \mathcal{L} - \partial_{T\xi_2} \partial_{T\xi_1} \mathcal{L} = 0$$

e, per il corollario 63.14,

$$\partial_{T[\xi_1, \xi_2]} \mathcal{L} = 0,$$

che mostra l'invarianza di \mathcal{L} sotto l'azione del gruppo a un parametro associato al campo vettoriale $[\xi_1, \xi_2]$. Quindi tale gruppo è ancora un gruppo di simmetrie. ■

Esempio 63.17 Siano ξ_1 e ξ_2 due campi vettoriali in \mathbb{R}^n , tali che le funzioni $\{f_{1k}(q)\}_{k=1}^n$ e $\{f_{2k}(q)\}_{k=1}^n$ che li rappresentano nel sistema di coordinate q siano lineari:

$$f_{ik}(q) = \sum_{h=1}^n A_{ikh} q_h, \quad i = 1, 2, \quad (63.43)$$

dove A_{ikh} sono gli elementi della matrice A_i , $i = 1, 2$. Allora anche il campo vettoriale $[\xi_1, \xi_2]$ è rappresentato da funzioni lineari, e la matrice corrispondente è data da (cfr. l'esercizio 18)

$$A_2 A_1 - A_1 A_2 := [A_2, A_1], \quad (63.44)$$

che definisce il commutatore delle due matrici A_2 e A_1 (cfr. pag. 10 del capitolo 1).

Esempio 63.18 Siano ξ_1 e ξ_2 i campi vettoriali associati alle rotazioni intorno a due assi cartesiani tra loro ortogonali, per esempio intorno agli assi \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 di una terna cartesiana. I due campi vettoriali sono rappresentati da funzioni della forma (63.43) (cfr. l'esercizio 19). Si verifica immediatamente che il campo vettoriale $\xi_3 = [\xi_1, \xi_2]$ è associato alle rotazioni intorno all'asse $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ (cfr. l'esercizio 21). In virtù del teorema 63.16 concludiamo che la conservazione di due componenti del momento angolare, corrispondente per il teorema 62.19 all'invarianza della lagrangiana per rotazioni intorno a due assi ortogonali (cfr. l'esempio 62.13), implica la conservazione anche della terza componente, corrispondente, di nuovo per il teorema 62.19, all'invarianza della lagrangiana per rotazioni intorno all'asse definito dal prodotto vettoriale dei due assi dati.

Osservazione 63.19 Siano $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ i gruppi a un parametro associati ai campi vettoriali ξ_1, ξ_2, ξ_3 dell'esempio 63.18: \mathcal{G}_i è il gruppo delle rotazioni intorno all'asse \mathbf{e}_i , per $i = 1, 2, 3$. La discussione dell'esempio implica che se un sistema di punti è invariante per rotazioni intorno a due assi allora necessariamente è invariante per rotazioni intorno al terzo asse. In altre parole non esistono simmetrie "intermedie" tra quella cilindrica (ovvero per rotazioni intorno a un solo asse) e quella sferica (ovvero per rotazioni intorno a qualsiasi asse).

Esempio 63.20 Consideriamo la quantità di moto

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{x}}^{(i)}, \quad (63.45)$$

di un sistema di N punti materiali. I campi vettoriali ξ_k , $k = 1, 2, 3$, associati alle componenti della quantità di moto sono rappresentati, nelle coordinate x , da funzioni costanti, quindi

$$[\xi_i, \xi_j] = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad (63.46)$$

e dal teorema 63.15 segue che, per ogni lagrangiana \mathcal{L} lasciata invariante dai gruppi di trasformazioni associati ai campi ξ_k , $k = 1, 2, 3$, è possibile trovare (localmente) un sistema di coordinate in cui tre di esse siano cicliche. Fisicamente tali coordinate rappresentano le coordinate del centro di massa del sistema. Dal momento che vale la (63.46) non possiamo applicare il teorema 63.16, i.e. la conservazione di due componenti della quantità di moto non implica che anche la terza debba essere conservata.

Esempio 63.21 Si dimostri che se, per un punto materiale nello spazio euclideo tridimensionale, sono conservate due componenti del momento angolare e la componente restante della quantità di moto, allora sono conservati sia il momento angolare totale sia la quantità di moto totale (cfr. l'esercizio 20).

Osservazione 63.22 Nel caso di un sistema rigido con un punto fisso, in assenza di forze esterne, si hanno quattro costanti del moto: l'energia e il momento angolare. Perciò, sebbene

a priori lo spazio delle fasi del sistema sia $SO(3) \times \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^6$, si può in realtà parametrizzare il moto in \mathbb{R}^2 : il moto si svolge su una superficie di dimensione 2. La descrizione così ottenuta corrisponde a quella geometrica secondo Poincaré che utilizza la poloide e l'erpoloide (cfr. la discussione del §48). Il sistema dinamico corrispondente, definito sulla superficie di dimensione 2, non è un sistema lagrangiano a un grado di libertà che si possa ottenere da quello di partenza mediante l'applicazione ripetuta del teorema 59.4. Infatti il gruppo delle rotazioni non contiene sottogruppi che soddisfino le condizioni (63.46), quindi non è possibile applicare il teorema 63.15; in particolare non è possibile trovare un sistema di coordinate in cui tre siano cicliche. Se questo fosse possibile la lagrangiana non dovrebbe dipendere da alcuna delle tre variabili che determinano la configurazione del sistema, e i corrispondenti momenti dovrebbero essere costanti e il moto diverrebbe banale. Questo ovviamente non succede.

Nota bibliografica Nel presente capitolo abbiamo seguito, prevalentemente, [Dell'Antonio, Cap. VIII].

Esercizi

Esercizio 1 Si dimostri che il campo vettoriale ξ definito dalla trasformazione di coordinate $q \mapsto Q(q, \alpha)$ attraverso la (62.4) non dipende dal sistema di coordinate scelto. [Soluzione. Si deve dimostrare che, se operiamo un cambiamento di coordinate $q \mapsto q'$, allora le componenti di ξ si trasformano con la legge di trasformazione dei vettori. Sia $\alpha \mapsto Q'(q', \alpha)$ la legge di trasformazione delle coordinate q' sotto l'azione del diffeomorfismo $g(\alpha)$; il campo vettoriale corrispondente è tale che

$$\frac{dQ'}{d\alpha} = f'(Q'), \quad Q'(q', 0) = q',$$

con $f'(Q') = J(Q', Q) f(Q)$, dove $J(Q', Q)$ è la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate $Q \mapsto Q'(Q)$, i.e.

$$f'_k(Q') = \sum_{h=1}^n \frac{\partial Q'_k(Q)}{\partial Q_h} f_h(Q) = \left\langle \frac{\partial Q'_k(Q)}{\partial Q}, f(Q) \right\rangle,$$

dove si è indicato con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare in \mathbb{R}^n .

Esercizio 2 Un'applicazione lineare $D: A \rightarrow A$, definita su un'algebra A , si dice *derivazione* se soddisfa la *regola di Leibniz*, cioè se $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ per ogni $a, b \in A$. Si dimostri che l'applicazione ∂_ξ definita in (62.8) è una derivazione.

Esercizio 3 Si dimostri che il momento (62.11) non dipende dal sistema di coordinate scelto. [Soluzione. Sia (q', η') un differente sistema di coordinate locali per $T\Sigma$. Se $\{f'_k(q')\}_{k=1}^n$ rappresenta il campo vettoriale nelle coordinate q' , risulta allora in tale sistema

$$\sum_{k=1}^n f'_k(q') \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'_k}(q', \eta') = \sum_{k,h,j=1}^n f_h(q) \frac{\partial q'_k}{\partial q_h} \frac{\partial \eta'_j}{\partial \eta'_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta'_j}(q, \eta),$$