16 Meccanica hamiltoniana

§71 Sistemi hamiltoniani

A partire da questo capitolo studieremo il formalismo hamiltoniano. Nella formulazione lagrangiana le equazioni del moto rappresentano un sistema di n equazioni differenziali del secondo ordine nelle n variabili di posizione, se n è il numero di gradi di libertà del sistema dinamico corrispondente. Nella formulazione hamiltoniana il sistema dinamico è descritto da una funzione (hamiltoniana) che dipende dalle posizioni e dai momenti coniugati: le equazioni del moto si ottengono allora in termini delle derivate parziali dell'hamiltoniana e assumono in modo naturale la forma di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in $2n$ variabili. Il formalismo hamiltoniano costituisce un metodo alternativo a quello lagrangiano per lo studio dei sistemi meccanici conservativi, così come il formalismo lagrangiano lo costituiva rispetto a quello newtoniano. Uno dei maggiori motivi di interesse nel formalismo hamiltoniano risiede negli sviluppi teorici che ha reso possibile, quali per esempio la meccanica statistica e la meccanica quantistica, in cui il linguaggio di base si richiama alla meccanica hamiltoniana. Restando nell'ambito della meccanica classica, una delle applicazioni principali, che vedremo più avanti, è costituita dalla teoria delle perturbazioni.

Ricordiamo (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 11) che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa se $f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in [0,1]$. Diremo che f è *strettamente convessa* se si ha $f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, con il segno stretto, se $x_1 \neq x_2$.

Una funzione convessa è continua (cfr. l'esercizio 1), ma non necessariamente è anche differenziabile. Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 è convessa se e solo se $f''(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ ed è strettamente convessa se $f''(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (cfr. l'esercizio 3).

Definizione 71.1 (Trasformata di Legendre) *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. La funzione*

$$g(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(xy - f(x)\right) \tag{71.1}$$

è chiamata la trasformata di Legendre *della funzione f.*

Osservazione 71.2 Se f è di classe C^2, in (71.1) l'estremo superiore, se finito, è anche un massimo e viene raggiunto in corrispondenza del punto $x = x(y)$ tale che $f'(x(y)) = y$. Possiamo allora scrivere, in alternativa alla (71.1),

$$g(y) = y\,x(y) - f(x(y)), \qquad f'(x(y)) = y, \tag{71.2}$$

La trasformata di Legendre ha una chiara interpretazione grafica: $x(y)$ rappresenta il punto in cui la tangente alla funzione $f(x)$ ha pendenza y (cfr. la figura 16.1).

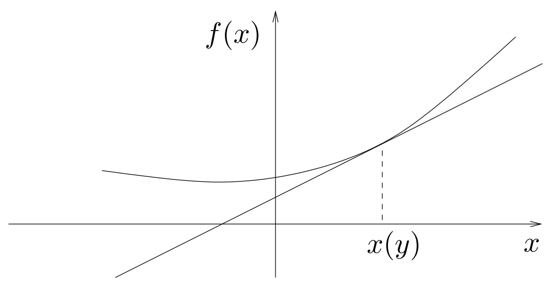

Figura 16.1: Interpretazione grafica della trasformata di Legendre di una funzione convessa di classe C^2. La retta di pendenza y è tangente al grafico della funzione f nel punto $x(y)$, così che $f'(x(y)) = y$.

Più in generale possiamo definire la trasformata di Legendre di una funzione convessa $f : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo (finito o infinito), ponendo

$$g(y) := \sup_{x\in I} (xy - f(x)) . \tag{71.3}$$

La trasformata di Legendre di una funzione convessa, quale definita in (71.3), può assumere valore $+\infty$ in qualche punto (cfr. l'esempio 71.3 e l'esercizio 6 più avanti). Tuttavia, se definiamo

$$J := \{y \in \mathbb{R} : g(y) < +\infty\},$$

la funzione $g\colon J \to \mathbb{R}$ risulta essere ben definita.

Esempio 71.3 Se $f(x) = ax$, $a > 0$ (non strettamente convessa), si ha (cfr. l'esercizio 4)

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y = a, \\ +\infty, & y \neq a. \end{cases} \tag{71.4}$$

Esempio 71.4 Se $f(x) = ax^2/2$, $a > 0$ (strettamente convessa), allora la sua trasformata di Legendre è definita in $\mathbb{R}$ e si ha $g(y) = y^2/2a$ (cfr. l'esercizio 5).

Se f è una funzione strettamente convessa di classe C^2, allora il valore x tale che $f'(x) = y$ è unico (poiché $f''(x) > 0$ quindi $f'(x)$ è strettamente crescente). Inoltre la sua trasformata di Legendre g è a sua volta una funzione strettamente convessa di classe C^2. Infatti risulta $g'(y) = (f')^{-1}(y)$ (cfr. l'esercizio 9), così che, per la regola di derivazione della funzione inversa, $g''(y) = 1/f''(x(y))$ (cfr. l'esercizio 10). Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha quindi $g''(y) > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ per cui g è definita.

La trasformata di Legendre è una *trasformazione involutiva* (ovvero un'*involuzione*), cioè la trasformata di Legendre della funzione (71.1) è la funzione f stessa: questo vuol dire che se $g(y)$ è definita come in (71.1) allora si ha

$$f(x) = \sup_{y \in J} (yx - g(y)) . \tag{71.5}$$

La (71.5) si verifica facilmente se f è di classe C^2 (cfr. l'esercizio 11); la dimostrazione richiede un po' di lavoro in più assumendo solo la convessità di f (cfr. l'esercizio 15).

Inoltre, poiché, come abbiamo visto, se f è di classe C^2 anche g è di classe C^2, ne concludiamo che se f è di classe C^2, allora l'estremo superiore in (71.5) è un massimo ed è raggiunto in corrispondenza di un valore $y = y(x)$ tale che $g'(y(x)) = x$.

Osservazione 71.5 La trasformata di Legendre si può definire in un contesto più generale. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Chiamiamo *dominio effettivo* di f l'insieme $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < +\infty\}$ e *epigrafico* di f l'insieme $\mathrm{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathrm{dom}(f), \alpha \geq f(x)\}$. Diremo che f è *funzione propria* se non è identicamente $+\infty$, che f è una *funzione convessa* se $\mathrm{epi}(f)$ è un insieme convesso e, infine, che f è una *funzione chiusa* se $\mathrm{epi}(f)$ è un insieme chiuso. Si può verificare (cfr. l'esercizio 13) che una funzione propria è convessa se e solo $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e ogni $t \in [0, 1]$, in accordo con la definizione usuale di funzione convessa data nell'esercizio 11 del capitolo 11. Inoltre, data una famiglia di funzioni convesse $\{f_j\}_{j \in J}$, allora $f = \sup_{j \in J} f_j$ è una funzione convessa e il suo epigrafico è l'intersezione degli epigrafici delle funzioni f_j, i.e. $\mathrm{epi}(f) = \cap_{j \in J} \mathrm{epi}(f_j)$. Data una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si definisce *coniugata* o *trasformata di Legendre* o *trasformata di Fenchel-Legendre* la funzione

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (xy - f(x)) .$$

Poiché f^* è l'estremo superiore di funzioni convesse e chiuse $y \mapsto yx - f(x)$, il suo epigrafico è un insieme convesso e chiuso, quindi la funzione $f^*(y)$ è convessa e chiusa (indipendentemente dal fatto che f lo sia o meno). Inoltre se f è propria allora f^* non assume mai valore $-\infty$ e quindi è anch'essa un funzione propria. Si definisce *seconda coniugata* di f la funzione

$$f^{**}(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} (yx - f^*(y)) .$$

Si ha $f^*(y) \geq xy - f(x)$ e quindi $xy - f^*(y) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: da qui segue immediatamente che $f^{**}(x) \leq f(x)$. Con un po' più di lavoro si può mostrare che in realtà vale il segno di uguaglianza. Infatti il *teorema di Fenchel-Moreau* afferma che, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione propria, le tre affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. f è una funzione convessa e chiusa;
2. f è l'estremo superiore puntuale di funzioni affini non più grandi di f;
3. $f^{**} = f$.

Si veda l'esercizio 12 per la definizione di funzione affine e l'esercizio 15 per la dimostrazione del teorema di Fenchel-Moreau.

In più dimensioni, dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* se l'insieme A è convesso (cfr. l'esercizio 5 del capitolo 3) e se $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in [0,1]$; la funzione f si dice *strettamente convessa* se nella diseguaglianza vale il segno stretto per $x_1 \neq x_2$.

Data una funzione convessa $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si definisce

$$g(y) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(\langle x, y\rangle - f(x)\right)$$

la sua trasformata di Legendre. Di nuovo, sotto ulteriori assunzioni sulla funzione f, più precisamente che f sia di classe C^2 e la matrice di elementi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \tag{71.6}$$

sia definita positiva, così che la funzione risulti strettamente convessa (cfr. l'esercizio 16), l'estremo superiore è in realtà un massimo. Inoltre la funzione $g(y)$ è anch'essa convessa e la sua trasformata di Legendre è la funzione $f(x)$ (cfr. l'esercizio 17). La matrice di elementi

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}$$

è l'inversa della matrice di elementi (71.6) calcolata in $x = x(y)$, dove $x = x(y)$ è il punto in cui è raggiunto l'estremo superiore nella definizione di g (cfr. l'esecizio 18).

Osservazione 71.6 I risultati discussi nell'osservazione 71.5 in $\mathbb{R}$ si possono estendere a funzioni $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (cfr. l'esercizio 17).

Definizione 71.7 (HAMILTONIANA) *Data una lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, convessa e di classe C^2, si definisce* hamiltoniana *la funzione*

$$\mathcal{H}(q, p) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} \left(\langle p, \eta\rangle - \mathcal{L}(q, \eta, t)\right), \tag{71.7}$$

i.e. la trasformata di Legendre della lagrangiana. La funzione H è convessa e di classe C^2.

Esempio 71.8 Data la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, A(q)\dot{q}\rangle - V(q),$$

la sua trasformata di Legendre rispetto $\dot{q}$ è data da

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, A(q)\dot{q}\rangle + V(q) = \frac{1}{2}\left\langle p, A^{-1}(q)p\right\rangle + V(q). \tag{71.8}$$

dove $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$.

Definizione 71.9 (Coordinate canoniche) *Date la coordinate q, chiameremo* momenti coniugati *le variabili p definite implicitamente in* (71.7)*. Se la lagrangiana è una funzione di classe C^2 si ha*

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}}. \tag{71.9}$$

Chiameremo coordinate canoniche *le variabili* (q,p)*.*

Osservazione 71.10 Data una varietà Σ, identificando (notazionalemente) i punti con le loro coordinate locali, se $q \in \Sigma$, si ha $(q,\dot{q}) \in T\Sigma$, dove $T\Sigma$ indica il fibrato tangente di Σ. Quindi p, definito in accordo con la (71.9), è un elemento dello spazio cotangente $T^*_q\Sigma$ (cfr. l'osservazione 62.11). Si ha allora $z = (q,p) \in T^*\Sigma$, dove (se $\sqcup$ indica l'unione disgiunta)

$$T^*\Sigma := \bigsqcup_{x\in\Sigma} T^*_x\Sigma = \bigcup_{x\in\Sigma}\{x\}\times T^*_x\Sigma$$

prende il nome di *fibrato cotangente* di Σ. Si chiama *spazio delle fasi* l'insieme di definizione delle variabili (q,p), che è dunque un sottoinsieme di $T^*\Sigma$.

Osservazione 71.11 La lagrangiana è a sua volta la trasformata di Legendre dell'hamiltoniana. In particolare si ha

$$\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}, \tag{71.10}$$

dal momento che $\mathcal{H}$ è la trasformata di Legendre di $\mathcal{L}$ rispetto alla variabile $\dot{q}$. Inoltre si vede facilmente che si ha

$$\dot{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\langle p,\dot{q}\rangle - \mathcal{H}(p,q)\right) = \left\langle \frac{\partial p}{\partial q}, \dot{q}\right\rangle - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} - \left\langle \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}, \frac{\partial p}{\partial q}\right\rangle = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}, \tag{71.11}$$

dove si è usata la (71.10). Le (71.10) e (71.11) rappresentano quindi le equazioni del moto (i.e. le equazioni di Eulero-Lagrange) espresse in termini delle variabili (q,p).

Definizione 71.12 (Equazioni hamiltoniane) *Data un'hamiltoniana* $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q,p,t)$ *di classe* C^2 *si definiscono* equazioni di Hamilton *le equazioni*

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \end{cases} \tag{71.12}$$

che costituiscono un sistema di $2n$ *equazioni differenziali del primo ordine.*

Osservazione 71.13 Si noti che l'hamiltoniana è definita a meno di una costante additiva, eventualmente dipendente dal tempo. La situazione è quindi diversa dal caso della lagrangiana, che è invece definita a meno di una derivata totale (cfr. l'osservazione 51.21).

Definizione 71.14 (Matrice simplettica standard) *Chiamiamo* matrice simplettica standard *la matrice* $2n \times 2n$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{71.13}$$

dove $0, \mathbb{1}$ *sono matrici* $n \times n$.

Osservazione 71.15 Data la matrice simplettica standard E si ha

$$E^T = -E, \qquad E^{-1} = -E, \qquad E^2 = -\mathbb{1}, \tag{71.14}$$

come è immediato verificare (cfr. l'esercizio 21); in (71.14), $\mathbb{1}$ è l'identità $2n \times 2n$. Possiamo allora riscrivere le equazioni di Hamilton (71.12) in forma più compatta come

$$\dot{z} = E \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z},$$

dove $z = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$. Si definisce *flusso hamiltoniano* (cfr. la definizione 11.10) l'insieme di tutte le traiettorie del sistema (71.12).

Definizione 71.16 (Equazioni canoniche) *Sia un sistema dinamico in* $\mathbb{R}^{2n}$ *descritto dalle equazioni* $\dot{z} = f(z)$. *Diremo che tali equazioni sono* equazioni canoniche *se esiste una funzione* $\mathcal{H}$ *di classe* C^2 *in* $\mathbb{R}^{2n}$ *tale che si abbia* $f = E\partial\mathcal{H}/\partial z$.

La definizione di hamiltoniana si estende facilmente al caso di un sistema lagrangiano definito su una varietà. In generale si parlerà di sistema hamiltoniano, in accordo con la seguente definizione.

Definizione 71.17 (Sistema hamiltoniano) *Data una varietà* Σ *e data una funzione* $\mathcal{H}\colon T^*\Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2, *si definisce* sistema hamiltoniano *la coppia* $(\Sigma, \mathcal{H})$.