Definizione 71.18 (Campo vettoriale hamiltoniano) *Si definisce* campo vettoriale hamiltoniano *associato all'hamiltoniana $\mathcal{H}$ il campo vettoriale*

$$f_{\mathcal{H}} := E\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right), \tag{71.15}$$

dove $z = (q,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $\partial/\partial z = (\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_{2n})$.

Osservazione 71.19 Dato un campo vettoriale $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, si definisce *divergenza* di f la funzione

$$\operatorname{div} f(x) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}(x).$$

È facile vedere che il campo vettoriale (71.15) è un campo vettoriale a divergenza nulla, i.e.

$$\operatorname{div} f_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} E_{kj}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z_k \partial z_j} = 0,$$

dove si è utilizzato il fatto che E è antisimmetrica (i.e. $E_{ik} = -E_{ki}$).

Definizione 71.20 (Trasformazione che conserva il volume) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Dato un insieme $D \subset \Omega$ chiamiamo*

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D \mathrm{d}x$$

il volume *dell'insieme D. Diremo che una trasformazione $\varphi\colon \Omega \to \Omega$ che dipende dal parametro continuo t è una* trasformazione che conserva il volume *se per ogni sottoinsieme $D \subset \Omega$, indicando con*

$$D(t) = \varphi(t, D) = \bigcup_{x\in D} \varphi(t,x) \tag{71.16}$$

l'insieme ottenuto facendo evolvere i punti di $D = D(0)$ al tempo t, si ha

$$\mathrm{Vol}(D(t)) = \mathrm{Vol}(D) \tag{71.17}$$

per ogni t. per cui il flusso è definito.

Teorema 71.21 (Teorema di Liouville) *Il flusso hamiltoniano conserva il volume.*

Dimostrazione. Dimostreremo più in generale che, dato un campo vettoriale $\dot{x} = f(x)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se f è a divergenza nulla (i.e. tale che $\operatorname{div} f = 0$), allora il flusso corrispondente conserva il volume.

Sia $D \subset \Omega$ un insieme dello spazio delle fasi e sia $D(t)$ l'insieme ottenuto facendo evolvere D al tempo t (cf. la (71.16)). Vogliamo quindi dimostrare che vale la (71.17).

Possiamo scrivere, utilizzando la *formula del cambiamento di coordinate per integrali multipli* (cfr. la nota bibliografica del capitolo 10),

$$\mathrm{Vol}(D(t)) = \int_{D(t)} \mathrm{d}x = \int_{\varphi(-t,D(t))} \mathrm{d}x \left| \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \right| = \int_{D} \mathrm{d}x \left| \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \right|, \tag{71.18}$$

dove $\partial\varphi(t,x)/\partial x$ è la matrice jacobiana della trasformazione $x \mapsto \varphi(t,x)$. Quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Vol}(D(t)) \Big|_{t=\bar{t}} = \int_D \mathrm{d}x \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \Big|_{t=\bar{t}}.$$

Per la regola di derivazione della funzione composta e per la proprietà dei determinanti $\det AB = \det A \det B$ (cfr. pag.11 del capitolo 1), si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \Big|_{t=\bar{t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial \varphi(\bar{t},x)} \Big|_{t=\bar{t}} \det \frac{\partial \varphi(\bar{t},x)}{\partial x}.$$

Utilizzando la proprietà di gruppo $\varphi(t+\bar{t},x) = \varphi(t,\varphi(\bar{t},x))$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial \varphi(\bar{t},x)} \Big|_{t=\bar{t}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t-\bar{t},\varphi(\bar{t},x))}{\partial \varphi(\bar{t},x)} \Big|_{t=\bar{t}} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t-\bar{t},y)}{\partial y} \Big|_{t=\bar{t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,y)}{\partial y} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

dove $y = \varphi(\bar{t},x)$, così che è sufficiente dimostrare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} \Big|_{t=0} = 0, \qquad \forall x \in \Omega, \tag{71.19}$$

per dedurre la legge di conservazione del volume. In (71.19) possiamo sviluppare

$$\varphi(t,x) = x + f(x)\,t + O(t^2),$$

avendo tenuto conto che $\mathrm{d}\varphi(t,x)/\mathrm{d}t|_{t=0} = f(\varphi(0,x)) = f(x)$, in modo da ottenere

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} = \mathbb{1} + A\,t + O(t^2), \qquad A_{ij} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}.$$

Si vede facilmente (cf. l'esercizio 22) che

$$\det(\mathbb{1} + tA) = 1 + \mathrm{tr}\, A\, t + O(t^2) \tag{71.20}$$

dove $\mathrm{tr}A = A_{11} + \ldots + A_{NN}$ è la traccia di A, da cui segue che

$$\det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} t + O(t^2) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = \mathrm{div}\, f,$$

che implica la (71.19) sotto l'ipotesi che il campo f sia a divergenza nulla. ■

Osservazione 71.22 Il teorema di Liouville implica, in particolare, l'assenza di cicli limite e di punti di equilibrio asintoticamente stabili per sistemi hamiltoniani.

Teorema 71.23 (Teorema del ritorno di Poincaré) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e sia $\varphi\colon \Omega \to \Omega$ una trasformazione che conserva il volume. Per ogni aperto $U \subset \Omega$ e ogni tempo $\tau > 0$ esiste $x \in U$ e $t \geq \tau$ tali che $\varphi(t,x) \in U$.*

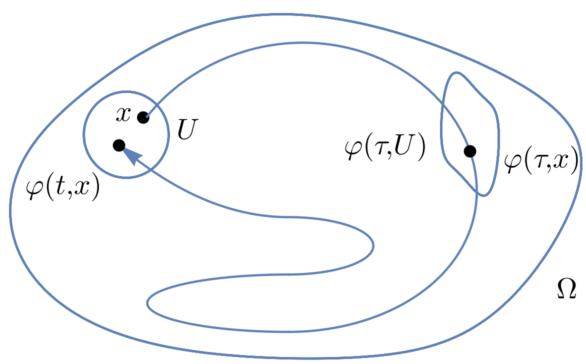

Figura 16.2: Teorema del ritorno di Poincaré.

Dimostrazione. Fissato un tempo τ consideriamo l'insieme $\varphi(\tau, U)$ (cfr. la definizione (71.16)). Se $\varphi(\tau, U) \cap U \neq \emptyset$ l'asserto è dimostrato, con $t = \tau$.

Supponiamo quindi che si abbia $\varphi(\tau, U) \cap U = \emptyset$ (cfr. la figura 16.2). Introduciamo gli insiemi $U_n = \varphi(n\tau, U)$ per $n \in \mathbb{Z}_+$; ovviamente $U_0 = U$. Supponiamo per assurdo che si abbia

$$U_n \cap U = \emptyset \qquad \forall n \geq 1. \tag{71.21}$$

Questo implica, ragionando di nuovo per assurdo,

$$U_n \cap U_m = \emptyset \qquad \forall n > m \geq 0. \tag{71.22}$$

Se $m = 0$ la (71.22) è ovvia perché coincide con la (71.21). Altrimenti, se $m > 0$, supponiamo che (71.22) non sia soddisfatta per qualche n, m. Si avrebbe allora $U_n \cap U_m \neq \emptyset$. Questo però implicherebbe $U_{n-1} \cap U_{m-1} \neq \emptyset$ (cfr. la figura 16.3): infatti se si avesse $z \in U_n \cap U_m$

e $U_{n-1} \cap U_{m-1} = \emptyset$, allora dovrebbe risultare $z = \varphi(\tau, z_n)$ e $z = \varphi(t, z_m)$, con $z_n \in U_{n-1}$ e $z_m \in U_{m-1}$, così che $z_n \neq z_m$, che violerebbe il teorema di unicità delle soluzioni. Iterando l'argomento m volte si troverebbe quindi $U_{n-m} \cap U \neq \emptyset$, contro l'ipotesi che stano facendo che gli insiemi U_n abbiano tutti intersezione nulla con U.

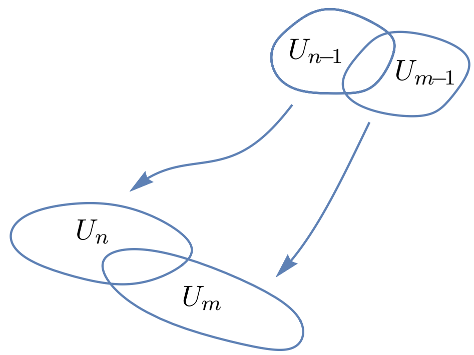

Figura 16.3: Se U_n e U_m si intersecano anche le rispettive preimmagini U_{n-1} e U_{m-1} si intersecano.

Dalla (71.22) segue che, per ogni $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{p} \mathrm{Vol}(U_n) = \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{n=0}^{p} U_n\Big),$$

poiché gli insiemi U_n sono tutti disgiunti. D'altra parte si ha

$$\mathrm{Vol}(U_n) = \mathrm{Vol}(U) \qquad \forall n \geq 1,$$

poiché la trasformazione φ conserva il volume, così che

$$p\,\mathrm{Vol}(U) = \sum_{n=0}^{p} \mathrm{Vol}(U) = \mathrm{Vol}\Big(\bigcup_{n=0}^{p} U_n\Big) \leq \mathrm{Vol}(\Omega) < +\infty,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'ipotesi di limitatezza su Ω. Se prendiamo il limite $p \to +\infty$, arriviamo a una contraddizione.

Per concludere la dimostrazione, sia n_0 tale che $U_{n_0} \cap U \neq \emptyset$ e si scelga $y \in U_{n_0} \cap U$. L'asserto segue per $t = n_0\tau$ e $x = \varphi(-t, y)$. ■

Osservazione 71.24 Il teorema 71.23 mostra che facendo evolvere un qualsiasi intorno (piccolo quanto si voglia) di un insieme limitato Ω in cui si svolge il moto, sotto l'azione di una trasformazione che conservi il volume, allora prima o poi l'insieme evoluto interseca l'intorno di partenza (cfr. la figura 16.4). Possiamo interpretare tale risultato dicendo che, fissato un qualsiasi dato iniziale x e un valore ε arbitrariamente piccolo, esiste un dato iniziale x' distante meno di ε da x, tale che la traiettoria che parte da x' ritorna vicino entro ε a x. Infatti, facendo evolvere l'intorno $B_\varepsilon(x)$, esiste un tempo t tale che $\varphi(t, B_\varepsilon(x))$ interseca $B_\varepsilon(x)$, come conseguenza del teorema 71.23. Se quindi $x'' \in \varphi(t, B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x)$ basta prendere $x' = \varphi(-t, x'')$: per costruzione $x' \in B_\varepsilon(x)$ e $\varphi(t, x') \in B_\varepsilon(x)$.

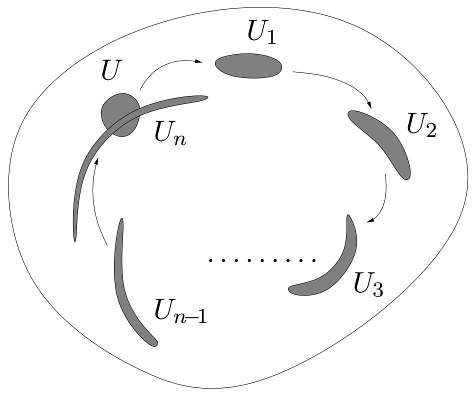

Figura 16.4: Situazione descritta dal teorema del ritorno di Poincaré: l'insieme che si ottiene facendo evolvere un insieme fissato U prima o poi dovrà intersecare U.

Osservazione 71.25 Il teorema 71.23 ha delle conseguenze tutt'altro che intuitive. Si immagini il seguente Gedankenexperiment, noto come *esperimento di Maxwell*. Un parallelelipedo è diviso in due parti (camera A e camera B) da una parete: un gas di molecole è collocato inizialmente nella camera A. A un certo istante si apre un foro nella parete, permettendo così alle molecole del gas di passare nella camera B (cfr. la figura 16.5). Ovviamente ci si aspetta che dopo un po' di tempo le molecole tendano a equidistribuirsi tra le due camere: in media circa la metà di esse viene a trovarsi nella camera A e l'altra metà viene a trovarsi nella camera B. Che a un certo punto le molecole vengano a trovarsi nuovamente tutte nella camera B pare molto poco probabile. Tuttavia, il teorema 71.23 – si verifica facilmente che siamo nelle condizioni sotto cui il teorema si applica (cfr. l'esercizio 23) – afferma che tale probabilità non è nulla. Anzi, a un certo istante questo deve necessariamente succedere. La spiegazione di questo apparente paradosso è la seguente. Il teorema 71.23 afferma che esiste un tempo in cui il sistema ritorna arbitrariamente vicino alla configurazione iniziale (quale essa sia), ma non specifica quanto grande tale tempo possa essere. In particolare, il tempo richiesto perché questo succeda nell'esperimento di Maxwell è enorme – maggiore dell'età dell'universo. Si aggiunga anche il fatto che per applicare il teorema il sistema deve essere isolato. In altre parole stiamo considerando solo il gas di molecole nel parallelepipedo, ed è difficile, se non impossibile, immaginare una situazione in cui un sistema di questo tipo rimanga isolato, senza subire perturbazioni dall'esterno, soprattutto su tempi così lunghi. Questo spiega perché, qualora si cercasse di realizzare un esperimento del tipo descritto, non si vedrebbe mai il gas tornare interamente nella camera A.

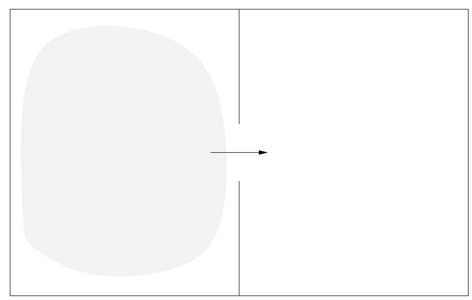

Figura 16.5: Esperimento di Maxwell: inizialmente le molecole del gas sono nella camera A; creando un'apertura nella parete che separa le due camere A e B, le molecole passano anche nella camera B.

§72 Metodo di Routh nel formalismo hamiltoniano

Abbiamo visto (cfr. il §59) che nel formalismo lagrangiano, in presenza di una variabile ciclica (per esempio q_n), è possibile ricondursi a un sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno, con conseguente semplificazione del problema. L'esistenza della variabile ciclica q_n consente di esperimere la variabile $\dot{q}_n$ in termini delle altre variabili lagrangiane e del momento conservato $p_n = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_n$ (cfr. la (59.4)). Tuttavia la lagrangiana $\mathcal{L}_R$ del nuovo sistema (lagrangiana ridotta) non si ottiene dalla lagrangiana originale semplicemente con la sostituzione (59.4). Infatti si ha $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} - p_n\dot{q}_n$ (cfr. la (59.3)).

Al contrario, nel formalismo hamiltoniano, se esiste una variabile ciclica q_n, i.e. $H(q,p)$ non dipende esplicitamente da q_n, e quindi p_n è una costante del moto, possiamo studiare il moto delle altre variabili attraverso le equazioni di Hamilton di un sistema con un grado di libertà in meno, la cui hamiltoniana $\mathcal{H}_R$ si ottiene da $\mathcal{H}$ semplicemente considerando p_n come parametro fissato. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 72.1 (Teorema di Routh) *Se un sistema hamiltoniano con hamiltoniana $\mathcal{H}$ è tale che*

1. *q_n sia una variabile ciclica nel sistema di coordinate (q,p), i.e. $\partial\mathcal{H}/\partial q_n = 0$,*
2. *la matrice di elementi $\partial^2\mathcal{H}/\partial p_i\partial p_j$ sia definita positiva,*

*allora l'evoluzione delle altre coordinate è determinata dall'*hamiltoniana ridotta

$$\mathcal{H}_R(q_1,\ldots,q_{n-1},p_1,\ldots,p_n,t) := \mathcal{H}(q_1,\ldots,q_{n-1},p_1,\ldots,p_n,t),$$

dove p_n è costante.