qualora si cercasse di realizzare un esperimento del tipo descritto, non si vedrebbe mai il gas tornare interamente nella camera A.

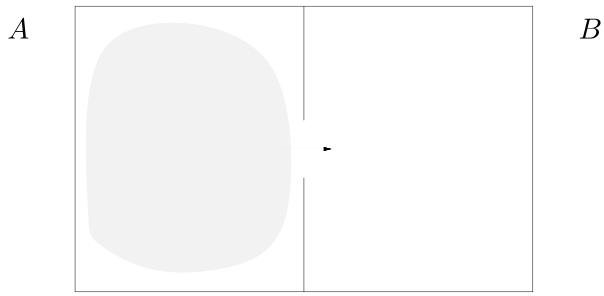

Figura 16.5: Esperimento di Maxwell: inizialmente le molecole del gas sono nella camera A; creando un'apertura nella parete che separa le due camere A e B, le molecole passano anche nella camera B.

§72 Metodo di Routh nel formalismo hamiltoniano

Abbiamo visto (cfr. il §59) che nel formalismo lagrangiano, in presenza di una variabile ciclica (per esempio q_n), è possibile ricondursi a un sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno, con conseguente semplificazione del problema. L'esistenza della variabile ciclica q_n consente di esperimere la variabile $\dot{q}_n$ in termini delle altre variabili lagrangiane e del momento conservato $p_n = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_n$ (cfr. la (59.4)). Tuttavia la lagrangiana $\mathcal{L}_R$ del nuovo sistema (lagrangiana ridotta) non si ottiene dalla lagrangiana originale semplicemente con la sostituzione (59.4). Infatti si ha $\mathcal{L}_R = \mathcal{L} - p_n\dot{q}_n$ (cfr. la (59.3)).

Al contrario, nel formalismo hamiltoniano, se esiste una variabile ciclica q_n, i.e. $H(q,p)$ non dipende esplicitamente da q_n, e quindi p_n è una costante del moto, possiamo studiare il moto delle altre variabili attraverso le equazioni di Hamilton di un sistema con un grado di libertà in meno, la cui hamiltoniana $\mathcal{H}_R$ si ottiene da $\mathcal{H}$ semplicemente considerando p_n come parametro fissato. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 72.1 (Teorema di Routh) *Se un sistema hamiltoniano con hamiltoniana $\mathcal{H}$ è tale che*

1. *q_n sia una variabile ciclica nel sistema di coordinate (q,p), i.e. $\partial\mathcal{H}/\partial q_n = 0$,*
2. *la matrice di elementi $\partial^2\mathcal{H}/\partial p_i\partial p_j$ sia definita positiva,*

*allora l'evoluzione delle altre coordinate è determinata dall'*hamiltoniana ridotta

$$\mathcal{H}_R(q_1,\dots,q_{n-1},p_1,\dots,p_n,t) := \mathcal{H}(q_1,\dots,q_{n-1},p_1,\dots,p_n,t),$$

dove p_n è costante.

Dimostrazione. Sotto le ipotesi fatte si applica il teorema 59.4. Infatti la condizione sulla matrice di elementi $\partial^2\mathcal{H}/\partial p_i \partial p_j$ assicura che valga la condizione $\partial^2\mathcal{L}/\partial\dot{q}_n^2 \neq 0$ (cfr. l'esercizio 24). Quindi il moto delle variabili $q_1, \ldots, q_{n-1}$ è determinato dalla lagrangiana ridotta (59.3). La corrispondente hamiltoniana sarà allora data da

$$\mathcal{H}_R(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n, t) = \sum_{k=1}^{n-1} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}_R(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, t; p_n),$$

così che, utilizzando la definizione (59.3) di $\mathcal{L}_R$, si trova

$$\mathcal{H}_R(q_1, \ldots, q_{N-1}, p_1, \ldots, p_{N_1}, p_n, t) = \sum_{k=1}^{n-1} \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n, t) + \dot{q}_n p_n,$$

dove $\dot{q}_n = f(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, t; p_n)$, in accordo con la (59.4). Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_R(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n, t)& \\
&= \langle \dot{q}, p \rangle - \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n, t) \\
&= \mathcal{H}(q_1, \ldots, q_{n-1}, p_1, \ldots, p_{n-1}, p_n, t),
\end{aligned}$$

ovvero $\mathcal{H}_R$ si ottiene da H semplicemente fissando la variabile p_n al valore costante che essa assume lungo il moto. ■

§73 Secondo principio variazionale di Hamilton

Indichiamo con $\mathcal{N} := \mathcal{N}(q^{(1)}, p^{(1)}, t_1; q^{(2)}, p^{(2)}, t_2)$ lo spazio delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \mapsto (q(t), p(t))$ di classe C^1 tali che $(q(t_1), p(t_1)) = (q^{(1)}, p^{(1)})$ e $(q(t_2), p(t_2)) = (q^{(2)}, p^{(2)})$. Indichiamo con $\mathcal{N}_0$ lo spazio delle deformazioni, cioè delle traiettorie $t \in [t_1, t_2] \mapsto (u(t), v(t))$ di classe C^1 tali che $u(t_1) = u(t_2) = 0$ e $v(t_1) = v(t_2) = 0$ (cfr. la figura 16.6).

Definizione 73.1 (FUNZIONALE D'AZIONE) *Definiamo* funzionale d'azione *il funzionale*

$$J(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\langle p(t), \dot{q}(t) \rangle - H(q(t), p(t), t) \right), \tag{73.1}$$

definito sullo spazio delle traiettorie $\mathcal{N}$.

Teorema 73.2 *Il differenziale del funzionale d'azione è uguale a zero se e solo se valgono le equazioni di Hamilton* (71.8).

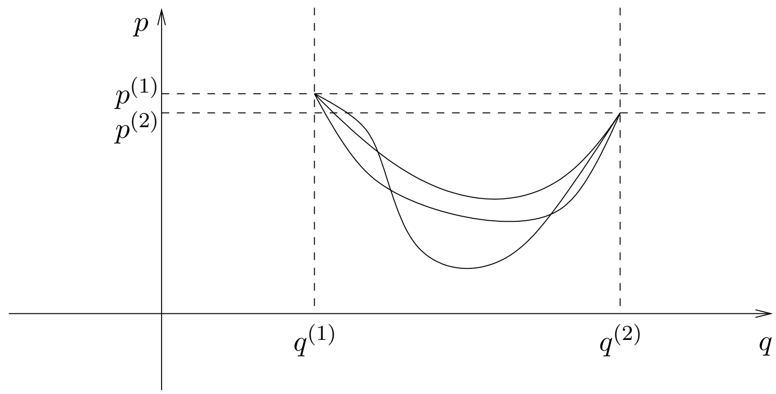

Figura 16.6: Rappresentazione schematica di alcune traiettorie dello spazio $\mathcal{N}$. L'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate rappresentano, rispettivamente, le n coordinate q e le n coordinate p.

Dimostrazione. Se $DJ(\gamma, h)$ indica il differenziale di J in γ, si ha $DJ(\gamma; h) = 0$ per ogni deformazione $h = (u, v)$ se e solo se risulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \Bigg(\langle v(t), \dot{q}(t) \rangle + \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t), u(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t), v(t) \right\rangle \Bigg) = 0. \tag{73.2}$$

Integrando per parti, si può riscrivere

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \langle p(t), \dot{u}(t) \rangle = \langle p(t), u(t) \rangle |_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle = - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \langle \dot{p}(t), u(t) \rangle$$

dove si è utilizzato che $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Quindi la (73.2) diventa

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\left\langle v(t), \dot{q}(t) - \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t) \right\rangle - \left\langle u(t), \dot{p}(t) + \frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) \right\rangle \right) = 0, \tag{73.3}$$

e data l'arbitrarietà della deformazione h, si ottengono le (71.12). ∎

Principio 73.3 (Secondo principio variazionale di Hamilton) *Dato un sistema meccanico conservativo, eventualmente soggetto a vincoli olonomi bilateri, le traiettorie che descrivono il moto sono i punti stazionari del funzionale d'azione.*

Osservazione 73.4 In luogo dello spazio $\mathcal{N}(q^{(1)}, p^{(1)}, t_1; q^{(2)}, p^{(2)}, t_2)$, si può considerare lo spazio $\mathcal{N}(q^{(1)}, t_1; q^{(2)}, t_2)$ delle traiettorie $t \mapsto q(t)$ tali che $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t_2) = q^{(2)}$, con $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ arbitrari, e quindi definire lo spazio delle deformazioni $\mathcal{N}_0$ come l'insieme delle traiettorie $t \mapsto (u(t), v(t))$ che verifichino la sola condizione $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Il funzionale $J(\gamma)$ dato dalla (73.1) risulta stazionario anche se ristretto a tale spazio. Infatti, guardando la dimostrazione del teorema 73.2, si vede che il termine di bordo quando si integra per parti si annulla purché si abbaia $u(t_1) = u(t_2) = 0$. Inoltre, se la (73.3) deve annullarsi per qualsiasi deformazione h, allora, in particolare, questo deve succedere per le deformazioni che soddisfino l'ulteriore condizione $v(t_1) = v(t_2) = 0$. Si può ragionare allora come nella dimostrazione del teorema 73.3 e arrivare alle stesse conclusioni.

Nota bibliografica Nel presente capitolo abbiamo seguito [Dell'Antonio, Cap. X], [Arnol′d, Cap. III] e [Gallavotti-1, Cap. 2].

Per definizioni e proprietà delle funzioni convesse e della trasformata di Legendre si veda per esempio [Magaril-Ilyaev & Tikhomirov].

Esercizi

Esercizio 1 Si dimostri che se una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa, allora f è continua in (a,b). [*Soluzione.* Per ogni $x, y \in [a,b]$ e ogni $t \in [0,1]$, scriviamo $z = (1-t)x + ty$, da cui si ricava $t = (z-x)/(y-x)$ e $1-t = (y-z)/(y-x)$. Se f è convessa in $[a,b]$, si ha $f(z) \le (1-t)f(x) + tf(y)$, da cui si ottengono le due diseguaglianze

$$(1) \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, \qquad\qquad (2) \quad \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(z)}{y-z},$$

la prima sottraendo $f(x)$ da ambo i membri e la seconda scrivendo $f(z) = (1-t+t)f(z)$ e sottraendo $(1-t)f(x)$ dal membro di sinistra e $tf(z)$ dal membro di destra. Data l'arbitarietà di t le due diseguaglianze valgono per ogni terna $x, y, z \in [a,b]$ tali che $x \le z \le y$. Si fissi $x_0 \in (a,b)$ e si considerino $\alpha, \beta \in (a,b)$ tali che $\alpha < x_0 < x < \beta$. La diseguaglianza (1), applicata alla terna x_0, x, β, e la diseguaglianza (2), applicata alla terna α, x_0, x, dànno, rispettivamente,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0}, \qquad \frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

da cui, definendo $C_1 := (f(x_0)-f(\alpha))/(x_0-\alpha)$ e $C_2 := (f(\beta)-f(x_0))/(\beta-x_0)$, si ottiene

$$C_1 \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le C_2, \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \le C := \max\{C_2, -C_1\},$$

dove si è tenuto conto che, data la diseguaglianze $A \le B \le C$, se $B \ge 0$ si ha $C \ge B \ge 0$ e quindi $|B| = B \le C$, mentre se $B < 0$ si ha $A \le B < 0$ e quindi $|B| = -B \le -A$. La relazione trovata $|f(x)-f(x_0)| < C|x-x_0|$ implica la continuità del limite destro di f in x_0 (poiché abbiamo supposto $x > x_0$). Il caso $\alpha < x < x_0 < \beta$ si discute in modo analogo e implica la continuità del limite sinistro. Si noti che di fatto si è dimostrato che una funzione convessa è lipschitziana.]