Il principio variazionale 51.15 si può estendere al caso di sistemi meccanici conservativi definiti su varietà. Nulla vieta, inoltre, di considerare sistemi più generali, senza necessariamente supporre che la lagrangiana $\mathcal{L}$ descriva un sistema meccanico conservativo (e sia quindi differenza di un'energia cinetica e un'energia potenziale). Possiamo quindi formulare, più in generale, il principio variazionale di Hamilton nel modo seguente: dato un sistema lagrangiano $(\Sigma, \mathcal{L})$, le traiettorie che risolvono le corrispondenti equazioni del moto sono i punti stazionari del funzionale d'azione (52.2) associato alla lagrangiana $\mathcal{L}$.

§53 Formalismo lagrangiano per sistemi vincolati

Si consideri un sistema meccanico conservativo costituito da N punti materiali nello spazio euclideo tridimensionale che siano soggetti a M vincoli olonomi bilateri (regolari e indipendenti). I vincoli allora determinano una superficie regolare Σ, in generale dipendente dal tempo, di codimensione M (cfr. il §36). Defineremo la lagrangiana $\mathcal{L}_v$ del sistema come la restrizione della lagrangiana $\mathcal{L}$ dello stesso sistema in assenza dei vincoli al fibrato tangente $T\Sigma$; scriveremo quindi $\mathcal{L}_v = \mathcal{L}|T\Sigma$ e chiameremo $\mathcal{L}_v$ *lagrangiana vincolata*. Introdotto in (un intorno di) Σ un sistema di coordinate locali $q := (q_1, \ldots, q_{3N-M})$, per tempi sufficientemente piccoli così che il moto sia confinato nell'intorno considerato, possiamo allora esprimere le coordinate cartesiane naturali $x \in \mathbb{R}^{3N}$ in termini delle $3N - M$ coordinate locali q e del tempo t, scrivendo $x = x(q, t)$, ovvero, per componenti,

$$x_k^{(i)} = x_k^{(i)}(q_1, \ldots, q_{3N-M}, t) := x_k^{(i)}(q, t), \qquad i = 1, \ldots, N, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{53.1}$$

dove si ha dipendenza esplicita dal tempo solo se il vincolo dipende dal tempo; altrimenti scriveremo $x = x(q)$. Consistentemente con le notazioni introdotte nel §51, chiameremo *sistema di coordinate generalizzate* (o *sistema di coordinate lagrangiane*) il sistema di coordinate locali q. Come fatto nel primo volume, a partire dal capitolo 7 (cfr. il §31), indicheremo in neretto i vettori in $\mathbb{R}^3$. Scriveremo per esempio

$$x = (\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(N)}), \qquad \boldsymbol{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, N,$$

per indicare le coordinate di N punti in $\mathbb{R}^3$.

Se per $t = 0$ si ha $\bar{x} = x(\bar{q}, 0) \in \mathcal{U}$, dove $\mathcal{U}$ è l'intorno sulla varietà Σ in cui si usano le coordinate q, allora per tempi t tali che la traiettoria di dato iniziale $\bar{x}$ rimane in $\mathcal{U}$ si ha

$$\dot{x}_k^{(i)} = \frac{\mathrm{d}x_k^{(i)}}{\mathrm{d}t} = \sum_{m=1}^{3N-M} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q}, \dot{q} \right\rangle + \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial t}, \tag{53.2}$$

che permette di esprimere anche le velocità $\dot{x}$ in termini delle coordinate locali $q, \dot{q}$ (e di t).

Quindi, in $\mathcal{U}$, la lagrangiana vincolata $\mathcal{L}_v$ è rappresentata dalla funzione

$$\mathcal{L}_v(q,\dot{q},t) := \mathcal{L}(x(q,t),\dot{x}(q,\dot{q},t),t) = T(x(q,t),\dot{x}(q,\dot{q},t),t) - V(x(q,t),t), \tag{53.3}$$

se $\mathcal{L} = T - V$ è la lagrangiana del sistema in assenza di vincoli.

Infine scriveremo il *funzionale d'azione per il sistema vincolato*, definito sulle traiettorie γ in Σ che connettono $q^{(1)}$ a $q^{(2)}$, come

$$I_v(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \mathcal{L}_v(q(t),\dot{q}(t),t), \tag{53.4}$$

dove $q(t_1) = q^{(1)}$ e $q(t) = q^{(2)}$. Si noti che $q^{(1)}, q^{(2)} \in \mathbb{R}^{3N-M}$. Utilizzando il fatto che la superficie è regolare e la proprietà additiva dell'integrazione, è possibile estendere la definizione (53.4) anche al caso in cui le traiettorie non siano ristrette a un intorno prefissato di Σ.

Osservazione 53.1 In accordo con la definizione 36.12, possiamo supporre che i punti della superficie di vincolo Σ siano descritti, almeno localmente, da un sistema di coordinate regolari (U_0, Ξ) di base Ω adattato a Σ. Questo vuol dire che possiamo scegliere come coordinate q le ultime coordinate $\beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N}$ di $\beta \in \Omega$. Quindi la notazione $x = x(q)$ equivale alla notazione $x = \Xi(0, \dots, 0, \beta_{M+1}, \dots, \beta_{3N})$ del §36.

Principio 53.2 (Principio variazionale di Hamilton per sistemi soggetti a vincoli olonomi bilateri) *Le traiettorie di sistemi meccanici conservativi soggetti a vincoli olonomi bilateri sono i punti critici del funzionale d'azione* (53.4).

Osservazione 53.3 Il principio 53.2 afferma che le equazioni del moto del sistema vincolato sono le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana $\mathcal{L}_v$. Poiché, come vedremo immediatamente (cfr. il teorema 53.4), si dimostra che le equazioni di Eulero-Lagrange coincidono con le equazioni di Newton, purché le forze vincolari siano determinate in accordo con il principio di d'Alemebert, assumere il principio 53.2 è equivalente ad assumere che valga la legge di Newton e che i vincoli soddisfino il principio di d'Alembert. Si veda anche l'osservazione 51.18 nel caso senza vincoli.

Teorema 53.4 *Dato un sistema di N punti materiali soggetti a forze conservative e a vincoli olonomi bilateri, le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla Lagrangiana $\mathcal{L}_v$ sono equivalenti alle equazioni di Newton integrate dal principio di d'Alembert.*

Dimostrazione. Supponiamo che la traiettoria γ sia un punto stazionario del funzionale d'azione (53.4). Se γ è descritta da $t \mapsto q(t)$, con $t \in [t_1, t_2]$, sia γ' una traiettoria descritta da $t \mapsto q(t) + h(t)$, con $h(t_1) = h(t_2) = 0$. Introduciamo il vettore

$$\delta := x(q+h) - x(q). \tag{53.5}$$

Poiché q e $q+h$ dipendono da t, anche $\delta = \delta(t)$ è una funzione di t; in particolare, se $x = x(q,t)$, si ha $\delta(t) = x(q(t)+h(t),t) - x(q(t),t)$. Usiamo tuttavia la notazione (53.5), per semplicità, anche in tal caso, sottointendendo del tutto la dipendenza da t.

Per costruzione, è infinitesima in h; inoltre esiste un vettore $\zeta \in T_{x(q)}\Sigma$ tale che

$$\delta = \|h\|\zeta + o(\|h\|), \tag{53.6}$$

dove $o(\|h\|)$ indica una quantità che tende a zero più velocemente di $\|h\|$, per $\|h\| \to 0$ (cfr. l'esercizio 22). Viceversa, per ogni vettore $\zeta \in T_{x(q)}\Sigma$, è possibile scegliere una funzione h per la quale la (53.6) sia soddisfatta.

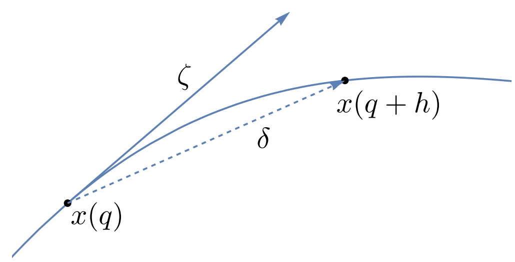

Figura 11.2: Il vettore δ e il vettore tangente ζ.

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_v(q+h,\dot q+\dot h,t) - \mathcal{L}_v(q,\dot q,t) &= \mathcal{L}(x(q+h),\dot x(q+h,\dot q+\dot h),t) - \mathcal{L}(x(q),\dot x(q,\dot q),t)\\ &= \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, x(q+h)-x(q)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x}, \dot x(q+h,\dot q+\dot h) - \dot x(q,\dot q)\right\rangle + o(\|h\|).\end{aligned} \tag{53.7}$$

Se $I_v(\gamma)$ e $I_v(\gamma')$ indicano i funzionali d'azione in corrispondenza, rispettivamente, delle traiettorie γ e γ', abbiamo

$$I_v(\gamma') - I_v(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(i)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_k^{(i)}}, x_k^{(i)}(q+h) - x_k^{(i)}(q)\right\rangle + o(\|h\|), \tag{53.8}$$

avendo integrato per parti la seconda somma dell'ultima riga di (53.7). In conclusione abbiamo

$$I_v(\gamma') - I_v(\gamma) - \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(i)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_k^{(i)}} \right) \zeta_k^{(i)} \|h\| = o(\|h\|). \tag{53.9}$$

Poiché per ipotesi γ è un punto critico, deve essere nulla la variazione del funzionale d'azione in corrispondenza di γ, i.e. $DI_v(\gamma;h) = 0$ per ogni deformazione h. Essendo il vettore ζ in

(53.6) un vettore arbitario dello spazio tangente (essendo arbitaria la funzione h, all'interno del suo spazio d'appartenenza), il vettore f_v di componenti

$$f_{vk}^{(i)} := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k^{(i)}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^{(i)}} \right) \tag{53.10}$$

è in ogni istante $t \in [t_1, t_2]$ ortogonale alla superficie Σ nel punto di coordinate $x(q(t))$.

Tenuto conto che per un sistema di N punti materiali soggetti a forze conservative, la lagrangiana assume la forma $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - V(x)$, con

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, m\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_i \left(\dot{x}_k^{(i)} \right)^2, \tag{53.11}$$

dove m è la matrice di massa introdotta nell'osservazione 36.8, possiamo riscrivere la (53.10) nella forma

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}^{(i)} = \boldsymbol{f}^{(i)} + \boldsymbol{f}_v^{(i)}, \qquad \boldsymbol{f}^{(i)} = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}^{(i)}}, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{53.12}$$

dove, per quanto detto, il vettore f_v è ortogonale alla superficie di vincolo Σ. Quindi la traiettoria γ dà la soluzione delle equazioni di Newton integrate dal principio di d'Alembert e il vettore f_v rappresenta la forza vincolare.

Sotto opportune ipotesi di regolarità (cfr. il capitolo 9), le equazioni di Newton integrate dal principio di d'Alembert ammettono una soluzione unica per ogni scelta di dati iniziali compatibili con il vincolo, quindi la soluzione trovata è la soluzione del sistema di equazioni (53.12) con i dati iniziali del problema variazionale.

Supponiamo ora che x, f_v siano una soluzione delle equazioni di Newton (53.12), in cui i vettori f_v sono legati ai vincoli attraverso le relazioni (41.5) (ovvero sono ortogonali alla superficie di vincolo), per il principio di d'Alembert. Per ogni $t \in [t_1, t_2]$, il vettore $m\dot{x}(t) - f(x(t))$ è ortogonale alla superficie di vincolo Σ nel punto $x(t) := x(q(t))$. Quindi per ogni traiettoria h con $h(t_1) = h(t_2) = 0$ esiste una funzione a valori vettoriali ζ tale che il vettore definito in (53.5) è della forma (53.6), i.e. è tangente alla superficie di vincolo a meno di termini $o(\|h\|)$, così che l'integrando in (53.9) è il prodotto scalare di due vettori ortogonali ed è quindi nullo. Ne segue che deve essere $I_v(\gamma') - I_v(\gamma) = o(\|h\|)$ e quindi $DI_v(\gamma; h) = 0$ per ogni deformazione h. ■

Osservazione 53.5 Il teorema 53.4 legittima il principio variazionale 53.2. Infatti la validità del principio è garantita dall'accordo con i dati sperimentali e il teorema 53.4, mostrando appunto che le traiettorie che si trovano mediante l'applicazione del principio sono le stesse che si ottengono dalle equazioni del moto (se si assume il principio variazionale di Hamilton per sistemi non soggetti a vincoli) attraverso l'applicazione del principio di d'Alembert, riconduce la ragionevolezza del principio 53.2 alla ragionevolezza del principio di d'Alembert.

Osservazione 53.6 Il principio variazionale 53.2 permette di risolvere le equazioni del moto per sistemi meccanici conservativi vincolati, e quindi di risolvere il problema discusso nel §41 (cfr. pag. 443). Infatti le equazioni del moto (i.e. le equazioni di Newton integrate dal principio di d'Alembert) sono date dalle (41.6). Tali equazioni si ottengono dal primo principio variazionale di Hamilton (cfr. il teorema 53.4). D'altra parte se lavoriamo nelle coordinate lagrangiane q e scriviamo il funzionale d'azione in termini della lagrangiana vincolata $\mathcal{L}_v(q, \dot{q}, t)$ data dalla (53.3), troviamo che la traiettoria deve risolvere le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_v}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}_v}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, 3N - M. \tag{53.13}$$

Nelle equazioni (53.13) le forze vincolari sono scomparse. Quindi se conosciamo le forze attive che agiscono sul sistema possiamo determinare, in linea di principio, la traiettoria $t \mapsto q(t)$. Possiamo allora determinare la traiettoria in termini delle variabili x, semplicemente scrivendo $x(t) = x(q(t))$. Risulta allora, per definizione di forze vincolari,

$$\boldsymbol{f}_v^{(i)} = m_i \ddot{\boldsymbol{x}}^{(i)}(t) - \boldsymbol{f}^{(i)}(x(t)), \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Il procedimento appena descritto consente di calcolare le forze vincolari.

Osservazione 53.7 La trattazione precedente si estende immediatamente al caso di sistemi con vincoli anolonomi integrabili. Infatti, per l'osservazione 43.5, un vincolo anolonomo integrabile si può sempre esprimere come vincolo olonomo.

Esempio 53.8 Si trovi l'energia cinetica di un cilindro (circolare retto) omogeneo di massa m e raggio r che rotoli senza strisciare

1. su un piano orizzontale π;
2. all'interno di una superficie cilindrica di raggio $R > r$.

Nel secondo caso si discutano i limiti $R = r$ e $R \to \infty$.

Discussione dell'esempio. Consideriamo prima il caso 1. Scegliamo un sistema di riferimento in cui il piano (x, y) coincida con il piano π e l'asse y sia parallelo all'asse del cilindro (poiché il moto è di rotolamento senza strisciamento se i due assi sono paralleli all'istante iniziale $t = 0$ restano tali per ogni tempo t). Sia θ l'angolo tra la verticale al piano e un diametro prefissato del cilindro, tale che $\theta = 0$ per $t = 0$ (cfr. l'esempio 43.10). Il centro d'inerzia del cilindro ha velocità parallela al piano, data da

$$\dot{x} = r\dot{\theta},$$

quindi

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}^2, \tag{53.14}$$

dove I_3 è dato dalla (45.7) del §45.5.