poiché, data $F_3(q,P,t)$, si ha $\partial F_3/\partial p = -q$. Ragionando allo stesso modo si trova

$$\begin{aligned}
F_2(q,P,t) &= \sup_{Q\in\mathbb{R}^n}\Big(\langle Q,P\rangle - (-F_1(q,Q,t))\Big) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\Big(\langle q,p\rangle - (-F_4(p,P,t))\Big),\\
F_3(p,Q,t) &= -\sup_{P\in\mathbb{R}^n}\Big(\langle Q,P\rangle - F_4(p,P,t)\Big) = -\sup_{q\in\mathbb{R}^n}\Big(\langle q,p\rangle - F_1(q,Q,t)\Big),\\
F_4(p,P,t) &= \sup_{Q\in\mathbb{R}^n}\Big(\langle Q,P\rangle - (-F_3(p,Q,t))\Big) = -\sup_{q\in\mathbb{R}^n}\Big(\langle q,p\rangle - F_2(q,P,t)\Big).
\end{aligned}$$

Se le funzioni non sono definite su tutto $\mathbb{R}^{2n+1}$, allora l'estremo superiore va preso su un sottoinsieme opportuno di $\mathbb{R}^n$, su cui la funzione di cui si considera la trasformata di Legendre è definita.]

Esercizio 65 Si dica se è simplettica la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = q\sqrt{1+p^2q^2},\\ P = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2q^2}}, \end{cases}$$

utilizzando il teorema 75.10.

Esercizio 66 Si trovi la funzione generatrice della trasformazione simplettica dell'esercizio 65. [*Suggerimento.* Una funzione generatrice di seconda specie è $F(q,P)=\arcsin(qP)$. Si noti che

$$\frac{\partial^2}{\partial q\partial P}F(q,P) = \frac{1}{(1-q^2P^2)^{3/2}},$$

che è ben definita per $|qP|<1$; d'altra parte, dalla definizione di P in termini di (q,p), si vede che $|qP| \le |qp|/\sqrt{1+q^2p^2} < 1$.]

Esercizio 67 Si dica se è simplettica la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q_1 = p_2,\\ Q_2 = 3p_1 + 2p_2,\\ P_1 = -q_2 + \dfrac{2}{3}q_1,\\ P_2 = -\dfrac{1}{3}q_1, \end{cases}$$

utilizzando il teorema 75.10. [*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned}
\{Q_1,P_1\} &= -\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = -(-1) = 1,\\
\{Q_2,P_2\} &= -\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = -\left(\frac{1}{3}\right)(-3) + 0 = 1,\\
\{Q_1,P_2\} &= -\frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0,\\
\{Q_2,P_1\} &= -\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = -3\left(\frac{2}{3}\right) - 2(-1) = 0,
\end{aligned}$$

mentre $\{Q_1,Q_2\} = \{P_1,P_2\} = 0$ poiché Q_1,Q_2 dipendono solo dalle variabili p_1,p_2, e P_1,P_2 dipendono solo dalle variabili q_1,q_2.]

Esercizio 68 Si consideri la trasformazione

$$\begin{cases} Q = q^2 + qp\,(t+1)\,, \\ P = \sin q + f(q,t), \end{cases}$$

dove $f(q,t)$ è una funzione di classe C^2 in qualche dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Si verifichi che è possibile determinare la funzione $f(q,t)$ e il dominio $\mathcal{D}$ in modo tale che la trasformazione sia canonica. Si trovi una funzione generatrice. [*Soluzione.* Si ha $f(q,t) = -\sin q - (t+1)^{-1} \log q$, con $\mathcal{D} = \{(q,t) \in \mathbb{R}^2 : q > 0, t > -1\}$. Poiché P è funzione della sola q (oltre che del tempo t), non possiamo considerare q, P variabili indipendenti, quindi non si potrà cercare una funzione generatrice di seconda specie. Si potrà invece cercare una funzione generatrice, per esempio, con un procedimento di prima specie, cioè nella forma $F(q,Q,t)$. Si trova in tal caso $F(q,Q,t) = (t+1)^{-1}(Q \log q - q^2/2)$.]

Esercizio 69 Si trovi una funzione generatrice di prima specie della trasformazione simplettica dell'esercizio 67. [*Suggerimento.* La funzione $F(q,Q) = q_2Q_1 - (2q_1Q_1/3) + (q_1Q_2/3)$ è una funzione generatrice di prima specie della trasformazione considerata.]

Esercizio 70 Si spieghi perché la trasformazione simplettica dell'esercizio 67 non ammette una funzione generatrice di seconda specie. [*Suggerimento.* Si può ragionare come nell'esercizio 68].

Esercizio 71 Si può trovare una funzione generatrice di quarta specie della trasformazione simplettica dell'esercizio 67?

Esercizio 72 Si consideri l'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8}\,(p_1+p_2)^2 + \frac{1}{4}\frac{(p_1-p_2)^2}{(q_1+q_2)^2} + \frac{k}{2}\frac{(q_1-q_2)^2}{(q_1+q_2)^2} + h\,(q_1+q_2)^2\,,$$

con $k, h > 0$. Si determini la trasformazione simplettica $(q_1,q_2,p_1,p_2) \mapsto (Q_1,Q_2,P_1,P_2)$ tale che

$$Q_1 = q_1 + q_2, \qquad Q_2 = q_1 - q_2.$$

e si determini l'hamiltoniana nelle nuove coordinate. [*Suggerimento.* Partendo dalla trasformazione lineare $q \mapsto Q$, possiamo definire la trasformazione dei momenti coniugati tramite la (77.21). Si trova

$$P_1 = \frac{1}{2}\,(p_1+p_2)\,, \qquad P_2 = \frac{1}{2}\,(p_1-p_2)\,.$$

La funzione

$$K(Q,P) = \frac{P_1^2}{2} + \frac{P_2^2}{Q_1^2} + \frac{k}{2}\,\frac{Q_2^2}{Q_1^2} + h\,Q_1^2,$$

rappresenta l'hamiltoniana nelle nuove coordinate.]

Esercizio 73 Si dimostri che la trasformazione di coordinate $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, definita da

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}, \\ q_2 = \sqrt{\dfrac{Q_2}{2P_2} - \dfrac{1}{2P_2}\sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}}, \\ p_1 = P_2 + 2P_1^2\sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}, \\ p_2 = 2P_2^2\sqrt{\dfrac{Q_2}{2P_2} - \dfrac{1}{2P_2}\sqrt{\dfrac{Q_1}{2P_1}}}, \end{cases}$$

è una trasformazione simplettica, utilizzando il teorema 75.10. [*Suggerimento.* Può essere conveniente definire $A = A(Q_1, P_1) := \sqrt{Q_1/2P_1}$ e $B = B(Q_1, Q_2, P_1, P_2) := \sqrt{(Q_2/2P_2) - (1/2P_2)A}$, così che

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial P_1} = \frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} = 0, \qquad \frac{\partial q_1}{\partial P_2} = 0, \\ &\frac{\partial q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial P_1} = \frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial B}{\partial Q_2}, \qquad \frac{\partial q_2}{\partial P_2} = \frac{\partial B}{\partial P_2}, \\ &\frac{\partial p_1}{\partial Q_1} = 2P_1^2\frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial P_1} = 4P_1A + 2P_1^2\frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial Q_2} = 0, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial P_2} = 1, \\ &\frac{\partial p_2}{\partial Q_1} = 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial Q_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial P_1} = 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial P_1}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial Q_2} = 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial Q_2}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial P_2} = 4P_2B + 2P_2^2\frac{\partial B}{\partial P_2}. \end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial Q_1} = \frac{1}{4AP_1}, \qquad \frac{\partial A}{\partial P_1} = -\frac{Q_1}{4AP_1^2}, \\ &\frac{\partial B}{\partial A} = -\frac{1}{4BP_2}, \qquad \frac{\partial B}{\partial Q_2} = \frac{1}{4BP_2}, \qquad \frac{\partial B}{\partial P_2} = \frac{A - Q_2}{4BP_2}, \end{aligned}$$

si verifica facilmente che $\{q_1, p_1\} = \{q_2, p_2\} = 1$, mentre $\{q_1, q_2\} = \{q_1, p_2\} = \{q_2, p_1\} = \{p_1, p_2\} = 0$.]

Esercizio 74 Si trovi una funzione generatrice della trasformazione dell'esercizio 73. [*Suggerimento.* Si cerchi una funzione generatrice di seconda specie: si trova $F(q_1, q_2, P_1, P_2) = q_1P_2 + q_1^2P_1^2 + q_2^2P_2^2$.]

Esercizio 75 Data la trasformazione

$$\begin{cases} Q = \sqrt{p}\cos q, \\ P = -2\sqrt{p}\sin q, \end{cases}$$

si dimostri che è simplettica. Se $\mathcal{H}(q, p) = -p\sin 2q$ è l'hamiltoniana nel sistema di coordinate (q, p) si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q, P)$ nel sistema di coordinate (Q, P). Si trovi la soluzione con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (\pi/4, 1)$. Si trovi infine la funzione generatrice di seconda specie della trasformazione. [*Suggerimento.* Si ha $\mathcal{K}(Q, P) = QP$. La soluzione con i dati iniziali considerati è

$$(q(t), p(t)) = (\operatorname{arctg}(e^{-2t}), \operatorname{ch} 2t).$$

La funzione generatrice di seconda specie è $F(q, P) = -(P^2/4)\operatorname{cotg} q$.]

Esercizio 76 Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana

$$\mathcal{H} = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{8}\lambda_1^2 (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{8}\lambda_2^2 (q_1 + q_2)^2 .$$

Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{\dfrac{2Q_1}{\lambda_1}}\cos P_1 + \sqrt{\dfrac{2Q_2}{\lambda_2}}\cos P_2, \\ q_2 = -\sqrt{\dfrac{2Q_1}{\lambda_1}}\cos P_1 + \sqrt{\dfrac{2Q_2}{\lambda_2}}\cos P_2, \\ p_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{2Q_1\lambda_1}\sin P_1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{2Q_2\lambda_2}\sin P_2, \\ p_2 = -\dfrac{1}{2}\sqrt{2Q_1\lambda_1}\sin P_1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{2Q_2\lambda_2}\sin P_2, \end{cases}$$

è simplettica utilizzando il teorema 75.10 e si determini l'hamiltoniana nelle nuove coordinate. Si trovi esplicitamente la soluzione delle equazioni di Hamilton. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie. [*Suggerimento* Conviene scrivere

$$q_1 = A_1 + A_2, \qquad q_2 = -A_1 + A_2, \qquad p_1 = B_1 + B_2, \qquad p_2 = -B_1 + B_2,$$

dove $A_1 := A(Q_1, P_1, \lambda_1)$, $A_2 := A(Q_2, P_2, \lambda_2)$, $B_1 := B(Q_1, P_1, \lambda_1)$ e $B_2 := B(Q_2, P_2, \lambda_2)$, se

$$A(Q, P, \lambda) := \sqrt{\frac{2Q}{\lambda}}\cos P, \qquad B(Q, P, \lambda) := \frac{1}{2}\sqrt{2Q\lambda}\sin P.$$

Si trova allora

$$\begin{aligned} &\{q_1, q_2\} = 0, \qquad \{q_1, p_1\} = \{A_1, B_1\} + \{A_2, B_2\}, \qquad \{q_1, p_2\} = -\{A_1, B_1\} + \{A_2, B_2\}, \\ &\{p_1, p_2\} = 0, \qquad \{q_2, p_1\} = -\{A_1, B_1\} + \{A_2, B_2\}, \qquad \{q_2, p_2\} = \{A_1, B_1\} + \{A_2, B_2\}. \end{aligned}$$

Si verifica quindi facilmente che $\{A_1, B_1\} = \{A_2, B_2\} = 1/2$, da cui segue che la trasformazione è simplettica. Per il teorema 74.22 l'hamiltoniana nelle nuove coordinate è $\mathcal{K}(Q, P) = \mathcal{H}(q(Q, P), p(Q, P))$: si trova che $K(Q, P) = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$: le corrispondenti equazioni di Hamilton si integrano immediatamente è dànno: $Q_1(t) = Q_1(0)$, $Q_2(t) = Q_2(0)$, $P_1(t) = P_1(0) - \lambda_1 t$ e $P_2(t) = P_2(0) - \lambda_2 t$: scrivendo $(q(t), p((t))$ in termini di $(Q(t), P(t))$ ed esprimendo i dati iniziali $Q_1(0), Q_2(0), P_1(0), P_2(0)$ in termini dei dati iniziali $q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0)$ (utilizzando la trasformazione inversa $Z \mapsto z(Z)$), si trova quindi la soluzione delle equazioni di Hamilton originali. La funzione

$$F(q, P) = \frac{1}{8}\lambda_1 (q_1 - q_2)^2 \tan\, P_1 + \frac{1}{8}\lambda_2 (q_1 + q_2)^2 \tan\, P_2$$

è una funzione generatrice di seconda specie della trasformazione.]

Esercizio 77 Data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = -q^2 - aq\sqrt{p + q^2}, \\ P = -q - \sqrt{p + q^2}, \end{cases}$$

con a parametro reale, se ne individui il dominio di definizione e si trovi per quali valori di a è simplettica. [*Soluzione.* Il dominio è l'insieme $D = \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p \geq -q^2\}$. La trasformazione è simplettica per $a = 2$.]

Esercizio 78 Si consideri la trasformazione

$$\begin{cases} q = b\log(1+\beta Q)\,\mathrm{e}^{-\alpha P(1+\beta Q)}, \\ p = a\mathrm{e}^{\alpha P(1+\beta Q)} - 1, \end{cases}$$

con a, b, α, β parametri reali. Si determinino l'insieme dei parametri per cui è invertibile e l'insieme dei parametri per cui è simplettica. [*Soluzione.* La matrice jacobiana è data da

$$J = \begin{pmatrix} \big(b(1+\beta Q)^{-1} - \alpha\beta P b\log(1+\beta Q)\big)\,E_- & -\alpha(1+\beta Q)b\log(1+\beta Q)\,E_- \\ \alpha\beta P a E_+ & \alpha(1+\beta Q)aE_+ \end{pmatrix}.$$

dove abbiamo posto, per semplicità, $E_\pm = \mathrm{e}^{\pm\alpha P(1+\beta Q)}$. Poiché si ha

$$\{q,p\} = \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} = \det J = \alpha ab.$$

la trasformazione è invertibile se $\det J \neq 0$, ovvero se $\alpha ab \neq 0$, ed è canonica se $\alpha ab = 1$.]

Esercizio 79 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = f(q,p), \\ P = p^\alpha. \end{cases}$$

Si determini, se possibile, la funzione $f(q,p)$ in maniera tale che la trasformazione sia simplettica. [*Soluzione.* Si può scegliere $\alpha = 1$ e $f(q,p) = q + g(p)$, con g funzione arbitraria (di classe C^2).]

Esercizio 80 Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{p^2}{4q}, \\ P = -\dfrac{4q^2}{3p}, \end{cases}$$

è simplettica. Si usi tale risultato per determinare il moto descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot q) = q\dot q^2$. [*Soluzione.* Le equazioni di Eulero-Lagrange sono $2\ddot q + \dot q^2 = 0$. Si verifica facilmente che $\{Q,P\} = 1$, che implica che la trasformazione di coordinate è canonica. Poiché $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot q = 2q\dot q$, l'hamiltoniana è

$$H(q,p) = \frac{p^2}{4q} \qquad \Longrightarrow \qquad K(Q,P) = Q.$$

Le equazioni di Hamilton nelle variabili (Q,P) si integrano immediatamente e dànno $Q(t) = Q(0)$ e $P(t) = P(0) - t$. La trasformazione inversa $(Q,P) \mapsto (q,p)$ è definita da

$$\begin{cases} q = \big(9QP^2/4\big)^{1/3}, \\ p = -\big(12Q^2P\big)^{1/3}, \end{cases}$$

come si ricava facilmente notando che il prodotto QP^2 non dipende dalla variabile p, mentre se si calcola Q^2P non appare la variabile q. In termini delle condizioni iniziali $(q(0),\dot q(0)) = (q_0, v_0)$, tenendo conto che $p(0) = 2q_0v_0$, si ha $Q(0) = q_0v_0^2$ e $P(0) = -2q_0/3v_0$. Ne segue che la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange è $q(t) = (q_0^{3/2} + 3q_0^{1/2}v_0t/2)^{2/3}$.]

Esercizio 81 Data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \log\left(\dfrac{1}{q}\mathrm{e}^{\alpha p}\right), \\ P = \beta q e^{\gamma p}, \end{cases}$$

si dica per quali valori dei parametri reali α, β e γ è simplettica, e se ne trovi in tal caso una funzione generatrice. [*Soluzione.* Si deve avere $\gamma = 0$ e $\alpha\beta = -1$. Una funzione generatrice di prima specie è data da $F(q,Q) = q(Q + \log q - 1)/\alpha$; si noti che $\partial^2 F/\partial q \partial Q = 1/\alpha \neq 0$.]

Esercizio 82 Si dimostri che la trasformazione

$$\begin{cases} q = \mathrm{e}^{-t}\sqrt{PQ}, \\ p = 2\mathrm{e}^{t}\sqrt{PQ}\log P, \end{cases}$$

è canonica e se ne trovi la funzione generatrice di seconda specie. Si studi come si trasforma l'hamiltoniana $\mathcal{H}(p,q) = pq$. [*Soluzione.* La trasformazione è definita da $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Una funzione generatrice di seconda specie è $F(q,P,t) = q^2\mathrm{e}^{2t}\log P$. Si noti che $\partial^2 F/\partial q\partial P = -2qe^{2t}/P^2 \neq 0$, poiché $q > 0$, $P > 0$. La nuova hamiltoniana è

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(P,Q,t) &= \mathcal{H}(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q(Q,P,t), P, t) \\ &= 2PQ\log P + 2PQ\log P = 4PQ\log P, \end{aligned}$$

quindi non dipende dal tempo.]

Esercizio 83 Si trovi una funzione generatrice di quarta specie $F_4(p,P,t)$ delle trasformazione canonica dell'esercizio 82, si mostri esplicitamente che $\mathcal{K}(Q,P) = \mathcal{H}(q,p) + \partial F_4/\partial t$ e si verifichi che $F_2(p,P,t)$ è la trasformata di Legendre di $-F_4(q,p,t)$, dove $F_2(q,P,t) := F(q,P,t)$ è la funzione generatrice di seconda specie trovata nell'esercizio 82. [*Soluzione.* La funzione generatrice di quarta specie è $F_4 = -p^2/(4\mathrm{e}^{2t}\log P)$. Esplicitando p in funzione di q e P si ha $p = 2\mathrm{e}^{2t}q\log P$, quindi

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} = \frac{p^2}{2\mathrm{e}^{2t}\log P} = 2PQ\log P,$$

da cui si ricava la nuova hamiltoniana

$$\mathcal{K}(Q,P,t) = \mathcal{H}(q(Q,P,t), p(Q,P,t), t) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(p(Q,P,t), P, t) = 4PQ\log P,$$

in accordo con l'esercizio 82. Infine si ha

$$qp + F_4(q,P) = 2\mathrm{e}^{2t}q^2\log P - \frac{4\mathrm{e}^{4t}q^2\log^2 P}{4\mathrm{e}^{2t}\log P} = 2\mathrm{e}^{2t}q^2\log P - \mathrm{e}^{2t}q^2\log P = \mathrm{e}^{2t}q^2\log P = F_2(q,P,t),$$

che mostra che

$$F_2(q,P,t) = \sup_{p\in\mathbb{R}}\Big(pq - (-F_4(p,P,t))\Big) = p(q,P,t)\,q - \Big(-F_4(p(q,P),P,t)\Big),$$

dove $p(q,P,t) = 2\mathrm{e}^{2t}q\log P$ è tale che $\partial F_4/\partial p = -q$. In conclusione F_2 è la trasformata di Legendre di $-F_4$, in accordo con l'esercizio 64.]

Esercizio 84 Si trovi una funzione generatrice per la trasformazione canonica $Q = p$, $P = -q$ (cfr. l'esercizio 12). [*Soluzione.* La funzione $F(q,Q) = \langle q, Q\rangle$ costituisce una funzione generatrice di prima specie. Si noti che, a partire dalla stessa funzione generatrice $F(x,y) = \langle x, y\rangle$, si ottiene a trasformazione identità attraverso un procedimento di seconda specie e la trasformazione $(q,p) \mapsto (p,-q)$ attraverso un procedimento di prima specie.]

Esercizio 85 Data la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q = \mathrm{e}^{-t}\,(PQ)^{\alpha}\,, \\ p = 2\mathrm{e}^{t}\,(PQ)^{\gamma}\log P^{\beta}, \end{cases}$$

si determini per quali valori dei parametri reali α, β e γ la trasformazione è canonica. Nel caso $\alpha = 1/2$ si dica come si trasforma l'hamiltoniana $H = -qp$.

Esercizio 86 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{q}{p}, \\ P = f(q,p). \end{cases}$$

Si determini se possibile la funzione $f(q,p)$ in modo tale che la trasformazione sia simplettica. [*Soluzione.* Imponendo $\{Q,P\} = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{q}{p^2}\frac{\partial f}{\partial q} = 1.$$

Si cerca una soluzione nella forma $f(q,p) = \gamma q^{\alpha} p^{\beta}$. Si trova $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $\gamma = 1/2$, da cui si ottiene $f(q,p) = p^2/2$.]

Esercizio 87 Si considerino le trasformazioni di coordinate lineari

$$(1) \quad \begin{cases} Q = Aq, \\ P = Bp, \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} Q = Ap, \\ P = Bq, \end{cases}$$

dove A e B sono due matrici non singolari. Che relazioni devono sussistere tra le matrici A e B perché le trasformazioni siano simplettiche? Si usi il risultato per dimostrare che la trasformazione di coordinate dell'esercizio 67 è canonica. [*Soluzione.* Si deve avere $B^T = A^{-1}$ in (1) e $B^T = -A^{-1}$ in (2). La trasformazione dell'esercizio 67 è della forma (2), con

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

e si verifica immediatamente che $A^{-1} = -B^T$.]

Esercizio 88 Si dimostri che la trasformazione identità si può ottenere attraverso un procedimento di terza specie. [*Suggerimento.* Si consideri la funzione generatrice di terza specie $F(p,Q) = -\langle p, Q\rangle$.]

Esercizio 89 Si dimostri che la trasformazione nel piano (q,p) che fa passare a coordinate polari non è canonica. Si mostri che è tuttavia possibile modificare la trasformazione in modo da ottenere una trasformazione canonica. [*Soluzione.* Se J è la matrice jacobiana della trasformazione $(q,p) \mapsto (\theta,\rho)$, tali che $q = \rho \sin\theta$ e $p = \rho\cos\theta$, allora $\det J = \rho$, quindi, per il teorema 74.11, la trasformazione non è canonica. D'altra parte se definiamo

$$q = \sqrt{2P}\,\sin Q, \qquad p = \sqrt{2P}\,\cos Q,$$

otteniamo una trasformazione canonica $(q,p) \mapsto (Q,P)$.]

Esercizio 90 Si dimostri che la seguente trasformazione di coordinate è canonica:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{P_1P_2 - Q_1Q_2}{P_1^2 + Q_2^2}, \\ q_2 = \dfrac{P_1Q_1 + P_2Q_2}{P_1^2 + Q_2^2}, \\ p_1 = -P_1Q_2, \\ p_2 = \dfrac{P_1^2 - Q_2^2}{2}. \end{cases}$$

[*Suggerimento.* Si utilizza il teorema 75.10. In alternativa si cerca una funzione generatrice; può essere conveniente cercarne una di tipo misto della forma $F(q_1,q_2,P_1,Q_2)$. Le ultime due equazioni dànno

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial q_1} = -P_1Q_2, \qquad p_2 = \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{P_1^2 - Q_2^2}{2}.$$

Utilizzando le prime due equazioni per eliminare Q_1, si trova, a meno di una costante additiva,

$$Q_1 = \frac{P_1P_2 - q_1(P_1^2+Q_2^2)}{Q_2} = \frac{-P_2Q_2 + q_2(P_1^2+Q_2^2)}{P_1} \quad \Longrightarrow \quad P_2 = -\frac{\partial F}{\partial Q_2} = q_2Q_2 + q_1P_1,$$

da cui si ricava anche

$$Q_1 = \frac{\partial F}{\partial P_1} = q_2P_1 - q_1Q_2.$$

Integrando le quattro equazioni ottenute si trova

$$F = -q_1Q_2P_1 + \frac{1}{2}q_2P_1^2 - \frac{1}{2}q_2Q_2^2.$$

Si verifica immediatamente che, ponendo $x = (q_1,q_2)$ e $y = (P_1,Q_2)$ e indicando con A la matrice 2×2 di elementi $A_{ij} = \partial^2 F/\partial x_i \partial y_j$, si ha $\det A = P_1^2 + Q_2^2 \neq 0$.]

Esercizio 91 Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{2P}{m\omega}}\,\sin Q, \\ p = \sqrt{2m\omega P}\,\cos Q. \end{cases}$$

Si dimostri che è canonica e se ne trovi una funzione generatrice di prima specie $F_1(q,Q)$. Data l'hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2,$$

si trovi l'hamiltoniana nelle nuove coordinate. [*Suggerimento.* Si veda anche l'esercizio 89. La funzione generatrice di prima specie è data da

$$F_1(q,Q) = \frac{1}{2}m\omega\, q^2 \operatorname{cotg} Q.$$

Nelle nuove coordinate, l'hamiltoniana $H(q,p)$ diventa $K(Q,P) = \omega P$.]

Esercizio 92 Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F_2(q,P)$ della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91. [*Suggerimento.* Esplicitando Q e p in termini di q e P, si ottiene

$$Q = \arcsin\Big(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\Big), \qquad p = \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2}.$$

Integrando p rispetto a q si trova

$$F_2(q,P) = \frac{1}{2}q\sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q^2} + P\arcsin\Big(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\Big),$$

a meno di un termine additivo $g(P)$, dove $g(P)$ è una funzione della sola variabile P. Derivando l'espressione trovata rispetto a P si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = \arcsin\Big(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\Big) + \frac{\partial g}{\partial P},$$

così che $\partial F_2/\partial P = Q$ se $g(P) = 0$. Ne segue che $F_2(q,P)$ è la funzione generatrice di seconda specie.]

Esercizio 93 Si trovi una funzione generatrice di terza specie $F_3(p,Q)$ e una funzione generatrice di quarta specie $F_4(p,P)$ della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91. [*Suggerimento.* Esplicitando q e P in termini di p e Q, si ottiene

$$q = \frac{p}{m\omega}\,\tan Q, \qquad P = \frac{1}{2m\omega}\frac{p^2}{\cos^2 Q}.$$

Integrando q rispetto a p e la seconda rispetto a Q, cambiando di segno le due espressioni trovate ed uguagliandole, si trova

$$F_3(p,Q) = -\frac{p^2}{2m\omega}\tan Q,$$

che costituisce quindi la funzione generatrice di terza specie della trasformazione data. Esplicitando invece q e Q in termini di p e P, si trova

$$q = \frac{1}{m\omega}\sqrt{2m\omega P - p^2}, \qquad Q = \arccos\Big(\frac{p}{\sqrt{2m\omega P}}\Big).$$

Imponendo $q = -\partial F_4/\partial p$ e $Q = \partial F_4/\partial P$ e integrando, si trova

$$F_4(p,P) = -\frac{p}{2m\omega}\sqrt{2m\omega P - p^2} + P\arccos\Big(\frac{p}{\sqrt{2m\omega P}}\Big),$$

che rappresenta la funzione generatrice di quarta specie della trasformazione.]

Esercizio 94 Alla luce dell'esercizio 64, si dimostri che le funzioni generatrici di prima, seconda, terza e quarta specie della trasformazione di coordinate dell'esercizio 91, trovate negli esercizi 91÷93, sono legate tra loro attraverso una trasformata di Legendre.

Esercizio 95 Si dimostri che è canonica la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \operatorname{arctg} q, \\ P = p + q^2 + pq^2, \end{cases}$$

e si trovi una funzione generatrice di seconda specie. [*Suggerimento.* Si ha $F(q,P) = (1+P)\operatorname{arctg} q - q$.]

Esercizio 96 Si dimostri che la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} q_1 = Q_1 + \dfrac{P_1}{m}t, \qquad q_2 = Q_2 + \dfrac{P_2}{m}t, \qquad q_3 = Q_3 + \dfrac{P_3}{m}t - \dfrac{1}{2}gt^2, \\ p_1 = P_1, \qquad p_2 = P_2, \qquad p_3 = P_3 - gmt, \end{cases}$$

è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie. Si mostri che l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + mgq_3$$

è trasformata nell'hamiltoniana $\mathcal{K} = 0$ (a meno di una funzione dipendente solo dal tempo t) e si interpreti tale risultato alla luce del teorema 77.11. [*Suggerimento.* Si trova

$$F(q_1, q_2, q_3, P_1, P_2, P_3) = q_1P_1 + q_2P_2 + q_3P_3 - \frac{1}{2m}\left(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2\right)t + \frac{1}{2}gt^2P_3 - gmtq_3.$$

La trasformazione canonica rappresenta il flusso hamiltoniano di un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di gravità.]