18 | Metodo di Hamilton-Jacobi

§78 Equazione di Hamilton-Jacobi

Il metodo di costruzione di trasformazioni canoniche tramite funzioni generatrici può essere utilizzato allo scopo di risolvere le equazioni di Hamilton. In principio, data una funzione generatrice $F(x, y, t)$ possiamo costruire, attraverso un procedimento di seconda specie, una trasformazione canonica $(q, p) \mapsto (Q, P)$ tale che, nelle nuove coordinate, l'hamiltoniana diventi (cfr. la (77.15))

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{78.1}$$

Possiamo cercare di determinare la funzione generatrice F in modo tale che sia $\mathcal{K} = 0$. Questo porta all'equazione

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{78.2}$$

dove si è tenuto conto delle (77.13) per esprimere p in termini di (q, P). La (78.2) è un'*equazione differenziale alle derivate parziali*, i.e. un'equazione differenziale in cui compare una funzione di più variabili insieme alle sue derivate parziali.

Definizione 78.1 (Equazione di Hamilton-Jacobi) *Chiamiamo* equazione di Hamilton-Jacobi *l'equazione alle derivate parziali* (78.2).

Osservazione 78.2 La (78.2) è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare del primo ordine, cioè della forma

$$G\left(F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial q_n}, \frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0, \tag{78.3}$$

per qualche funzione non lineare G, in cui la funzione F compare insieme alle sue derivate prime (per questo motivo si chiama del primo ordine).

Osservazione 78.3 Se si riesce a trovare una trasformazione di coordinate $z \mapsto Z(z, t)$ tale che nelle nuove coordinate la hamiltoniana sia $\mathcal{K} = 0$, le corrispondenti equazioni di Hamilton diventano

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = 0, \qquad \dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q} = 0, \tag{78.4}$$

e quindi (Q, P) sono costanti, i.e. esiste un vettore costante $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{2n}$ tale che $Q(t) = \beta$ e $P(t) = \alpha$ per ogni t.

Definizione 78.4 (Integrale generale) *Si dice* integrale generale *dell'equazione differenziale alle derivate parziali* (78.3) *la sua soluzione* $F(q, t)$ *più generale.*

Osservazione 78.5 L'integrale generale di un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali dipende da varie funzioni arbitarie. Questo si vede facilmente già in esempi molto semplici. Se si considera l'equazione differenziale ordinaria in $\mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = 0,$$

la soluzione generale è $F = c$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria; più in generale un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in $\mathbb{R}^n$ dipende da n costanti arbitrarie (la soluzione diventa unica se si fissano le condizione iniziali). Al contrario, data, per esempio, l'equazione alle derivate parziali, sempre in $\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = 0$$

una qualsiasi funzione $g(x)$ che dipenda solo dalla variabile x costituisce una soluzione. Analogamente, l'equazione

$$v\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = 0, \quad v \in \mathbb{R},$$

ammette come soluzione qualsiasi funzione $g(x - vt)$ che dipenda da x e t solo attraverso la differenza $x - vt$.

Vista l'eccessiva indeterminatezza delle soluzioni generali, sarà per noi più interessante una diversa nozione di soluzione, ovvero quella introdotta nella seguente definizione.

Definizione 78.6 (Integrale completo) *Si dice* integrale completo *dell'equazione differenziale alle derivate parziali* (78.3) *una sua soluzione* $F(q, t)$ *che dipenda da* $n + 1$ *costanti arbitrarie – tante quante sono le variabili* (q, t).

Osservazione 78.7 Nel caso dell'equazione (78.2) uno dei parametri arbitrari da cui l'integrale completo $F(q, t)$ dipende si ricava immediatamente notando che F appare solo attraverso le sue derivate, così che se F è soluzione di (78.2) lo è anche $F + \text{cost}$. Poiché uno dei paramatri appare semplicemente come una costante additiva, possiamo ignorarlo. Noi saremo quindi interessati a integrali completi $F(q,\alpha,t)$ dell'equazione di Hamilton-jacobi che dipendano da n costanti arbitarie α e che soddisfino la condizione

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0. \tag{78.5}$$

La condizione (78.5) implica in particolare che la dipendenza dai restanti parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non può essere additiva, se vogliamo interpretare $F(q,\alpha,t)$ come funzione generatrice della trasformazione canonica $(q,p) \mapsto (\beta,\alpha)$, con i parametri α che hanno il ruolo dei nuovi momenti P e i parametri β che rappresentano le coordinate Q di cui P sono i momenti coniugati (cfr. l'osservazione 78.3).

Definizione 78.8 (FUNZIONE PRINCIPALE DI HAMILTON) *Un integrale completo* $F(q,\alpha,t)$ *dell'equazione di Hamilton-Jacobi* (78.2)*, che dipenda da* n *parametri e soddisfi la condizione* (78.5)*, si chiama* funzione principale di Hamilton.

Osservazione 78.9 Di fatto, una trasformazione che porti a coordinate canoniche costanti è il flusso hamiltoniano stesso (cfr. il teorema 77.11), quindi risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi è in generale altrettanto complicato che risolvere le equazioni del moto.

Consideriamo il caso in cui l'hamiltoniana $\mathcal{H}$ non dipenda dal tempo, i.e. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(q,p)$. Allora l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial F}{\partial q}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{78.6}$$

e poiché $\mathcal{H}$ è indipendente dal tempo possiamo scegliere uno dei parametri, per esempio α_n, in modo tale che sia $\mathcal{H} = \alpha_n$. Si può allora scrivere $F(q,\alpha,t)$ nella forma

$$F(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha_n t. \tag{78.7}$$

Infatti, introdotta la (78.7) nella (78.6), otteniamo

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha_n, \tag{78.8}$$

dove si è tenuto conto che, dalla definizione (78.7), si ha

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}. \tag{78.9}$$

La (78.8) è quindi un'equazione differenziale alle derivate parziali per la funzione W.

Più in generale possiamo porre, in luogo della (78.7),

$$F(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - E(\alpha)\, t, \tag{78.10}$$

dove $\alpha \mapsto E(\alpha)$ è una funzione arbitraria (purché di classe C^2 nei suoi argomenti), che porta all'equazione

$$\mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E(\alpha), \tag{78.11}$$

invece che alla (78.8).

Osservazione 78.10 In alcuni caso può essere più conveniente scegliere la funzione E in modo che dipenda da tutti i parametri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Per esempio se l'hamiltoniana $\mathcal{H}$ è la somma di n hamiltoniane, i.e.

$$\mathcal{H}(q,p) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{H}_k(q_k, p_k), \tag{78.12}$$

una scelta naturale è scrivere $E(\alpha) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, così che l'equazione di Hamilton-Jacobi si riduce a n equazioni di Hamilton-Jacobi disaccoppiate,

$$\mathcal{H}_k\left(q_k, \frac{\partial W_k}{\partial q_k}\right) = \alpha_k, \tag{78.13}$$

ciascuna delle quali si riferisce a un sistema unidimensionale. La funzione caratteristica di Hamilton sarà allora data dalla somma di n funzioni $W_1(q_1, \alpha_1) + \ldots + W_n(q_n, \alpha_n)$: è questo un caso particolare dei sistemi separabili che studieremo più avanti (cfr. il §79).

Definizione 78.11 (Funzione caratteristica di Hamilton) *Una soluzione $W(q, \alpha)$ dell'equazione* (78.8) *– o dell'equazione* (78.11) *– che dipenda da n parametri α e che soddisfi la condizione*

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0, \tag{78.14}$$

prende il nome di funzione caratteristica di Hamilton.

Osservazione 78.12 Si noti che, poiché in virtù della (78.9) si ha

$$\frac{\partial W^2}{\partial q_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial F^2}{\partial q_i \partial \alpha_j}, \tag{78.15}$$

la condizione (78.14) è soddisfatta se e solo se è soddisfatta la (78.5). Quindi, nel caso indipendente dal tempo, si riesce a determinare una funzione caratteristica di Hamilton se e solo se si riesce a determinare una funzione principale di Hamilton: i due problemi (78.2) e (78.8) sono completamente equivalenti.

Ricordiamo che un sistema meccanico a n gradi di libertà si dice *integrabile* se esiste una trasformazione di coordinate $(x, \dot{x}) \mapsto (\varphi, A)$, tale che le coordinate A costituiscono n integrali primi, mentre le variabili φ sono angoli che variano linearmente con frequenze costanti $\omega(A)$ (cfr. la definizione 50.1 del capitolo 10); scriveremo allora $\varphi \in \mathbb{T}^n$, dove $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ è il *toro unidimensionale* e $\mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \ldots \times \mathbb{T}$ è il *toro n-dimensionale* La definizione di sistema integrabile si estende immediatamente a qualsiasi sistema hamiltoniano.

Definizione 78.13 (Sistema hamiltoniano integrabile) *Un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà si dice* integrabile *in un insieme aperto $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ se esiste una trasformazione di coordinate $(q,p) \in W \mapsto (\varphi, A) \in \mathbb{T}^n \times V$, dove V è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, tale che $A_1, \ldots, A_n$ sono integrali primi e la variabili angolari φ variano linearmente in t con frequenze che dipendono da A.*

Definizione 78.14 (Sistema hamiltoniano canonicamente integrabile) *Un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà si dice* canonicamente integrabile *in un insieme aperto $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ se esiste una trasformazione canonica $(q,p) \in W \mapsto (\varphi, A) \in \mathbb{T}^n \times V$, dove V è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, tale che $A_1, \ldots, A_n$ sono integrali primi e la variabili $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sono angoli che variano linearmente in t con frequenze $\omega_1(A), \ldots, \omega_n(A)$. Nelle coordinate (φ, A) l'hamiltoniana è una funzione $\mathcal{K}(A)$ che dipende solo dalle variabili A e le frequenze sono tali che $\omega_i(A) = [\partial \mathcal{K}/\partial A_i](A)$, per $i = 1, \ldots, n$.*

Osservazione 78.15 In termini della funzione caratteristica di Hamilton, l'esistenza di un integrale completo dell'equazione di Hamilton-Jacobi implica che nelle coordinate (β, α), le variabili $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono costanti. Quindi è possibile trovare un integrale completo solo se esistono n integrali primi (che non dipendono esplicitamente dal tempo) definiti globalmente (i.e. in un insieme aperto dello spazio delle fasi). Questo è possibile se il sistema è integrabile. Però i sistemi integrabili sono "rari", nel senso che basta in generale una qualsiasi perturbazione, arbitrariamente piccola, per distruggere l'integrabilità di un sistema hamiltoniano. In modo equivalente si dice che l'integrabilità non è una proprietà stabile, ovvero che i sistemi integrabili non sono stabili. Torneremo su questo nel capitolo 19.

La strategia che si può seguire per risolvere le equazioni di Hamilton è di considerare la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi e cercarne un integrale completo. Se questo è possibile, nelle nuove coordinate il moto è banale. Infatti, nel caso in cui H dipenda dal tempo e quindi si debba cercare una funzione principale di Hamilton, si riesce a costruire una trasformazione canonica $(q,p) \mapsto (\beta, \alpha)$, dipendente dal tempo, tale che le equazioni de moto nelle nuove coordinate diventano

$$\begin{cases} \dot\beta_k = 0, & k = 1, \ldots, n, \\ \dot\alpha_k = 0, & k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{78.16}$$

Nel caso in cui H non dipenda dal tempo (e si utilizzi la (78.7) per definire la funzione caratteristica di Hamilton), se si riesce effettivamente a trovare una funzione caratteristica di

Hamilton che risolva l'equazione di Hamilton-Jacobi, nelle nuove coordinate le equazioni sono

$$\begin{cases} \dot{\beta}_k = 0, & k = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{\beta}_n = 1, \\ \dot{\alpha}_k = 0, & k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{78.17}$$

Nelle nuove coordinate il moto è quindi

$$\begin{cases} \beta_k(t) = \beta_k(0), & k = 1, \ldots, n, \\ \alpha_k(t) = \alpha_k(0), & k = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{78.18}$$

nel primo caso e

$$\begin{cases} \beta_k(t) = \beta_k(0), & k = 1, \ldots, n-1, \\ \beta_n(t) = \beta_n(0) + t, \\ \alpha_k(t) = \alpha_k(0), & k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{78.19}$$

nel secondo. Se invece della (78.7) si utilizza la (78.10) per definire la funzione caratteristica di Hamilton, le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili diventano

$$\begin{cases} \dot{\beta}_k = \omega_k(\alpha), & k = 1, \ldots, n, \\ \dot{\alpha}_k = 0, & k = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{78.20}$$

dove $\omega_k = \partial E / \partial \alpha_k$. Per ottenere il moto nelle variabili originarie (q, p) occorre poi applicare la trasformazione di coordinate inversa.

Osservazione 78.16 In generale si riesce a dimostrare, al più, solo l'esistenza locale della soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi (sotto opportune ipotesi di regolarità). L'esistenza globale presenta già difficoltà in casi elementari, come possono essere i sistemi a un grado di libertà o anche un sistema bidimensionale libero se si sceglie come spazio delle fasi il toro (bidimensionale) invece del piano. Questo è dovuto al fatto che non esistono n costanti del moto definite globalmente; anche nel caso dei *sistemi separabili* discussi più avanti si trova che la funzione principale di Hamilton è una funzione a più valori. In ogni caso, il problema non è solo di calcolo, ma riflette una difficoltà intrinseca: se si riesce a risolvere l'equazione (78.2) nell'intero spazio delle fasi, vuol dire che esistono n integrali primi, e questo difficilmente accade (cfr. anche l'osservazione 78.15).

Osservazione 78.17 Guardando le (78.17) si vede che si è ottenuta la stessa conclusione del teorema della scatola di flusso, i.e. la linearizzazione del campo vettoriale. Quello che abbiamo in più rispetto a quel teorema, a livello locale, è che il diffeomorfismo che opera la linearizzazione definisce una trasformazione canonica. Inoltre noi siamo interessati a risolvere le equazioni del moto globalmente (nonostante le difficoltà intrinseche a cui si è accennato nell'osservazione 78.16), dal momento che quello che ci si prefigge in generale è la comprensione totale della dinamica e quindi lo studo qualitativo delle traiettorie in tutto lo spazio delle fasi accessibile al sistema.

Consideriamo l'equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di un sistema unidimensionale, descritto da una lagrangiana della forma

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\,a(q)\,\dot{q}^2 - V(q), \tag{78.21}$$

con V e a di classe C^2 e con a definita positiva (i.e. $a(q) > 0$). L'hamiltoniana è

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{1}{2a(q)}p^2 + V(q), \tag{78.22}$$

e l'equazione di Hamilton-Jacobi ha la forma particolarmente semplice

$$\frac{1}{2a(q)}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V(q) = \alpha,$$

dove la costante α rappresenta l'energia del sistema. Si trova allora

$$W(q,\alpha) = \pm\int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q'\,\sqrt{2a(q')\,(\alpha - V(q'))}, \tag{78.23}$$

dove q_0 arbitrario, se non per la richiesta che sia $q_0 \in I$, se I è l'intervallo contenente il dato iniziale $q(0)$ tale che si abbia $\alpha - V(q) \geq 0$ per $q \in I$. Si ha quindi

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \pm\int_{q_0}^{q} \mathrm{d}q'\sqrt{\frac{a(q')}{2\,(\alpha - V(q'))}}. \tag{78.24}$$

Per la (78.19) si ha $\beta(t) = \beta(0) + t$, quindi l'integrale in (78.24), quando $q = q(t)$, vale $t - t_0$, per qualche costante t_0. Infine si ha

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \pm\sqrt{2a(q)\,(\alpha - V(q))},$$

in accordo con la (78.22). In (78.23) si dovrà prendere il segno $+$ o il segno $-$ a seconda del valore di $p(0)$. Se $p(0) > 0$ si prende la determinazione positiva della radice, mentre se $p(0) < 0$ se ne prende la determinazione negativa. Ovviamente se $p(0) = 0$ occorre vedere se per $t > 0$ il moto avviene nel semipiano positivo o in quello negativo. Supponiamo che l'intervallo I sia limitato, i.e. $I = [q_-(\alpha), q_+(\alpha)]$. Se $p(0) = 0$ si può avere $q(0) = q_-(\alpha)$ oppure $q(0) = q_+(\alpha)$: nel primo caso si sceglie la determinazione positiva, nel secondo quella negativa.

Osservazione 78.18 La discussione sopra mostra che anche in un caso così semplice come un moto unidimensionale, la funzione caratteristica di Hamilton è una funzione a più valori. In generale, per sistemi a più gradi di libertà, la variabili (β, α) risultano inadeguate per descrivere il moto. Per esempio se l'intervallo I è limitato, i.e. I è della forma $I = [q_-(\alpha), q_+(\alpha)]$ e

$V'(q_\pm(\alpha)) \neq 0$, il segno in (78.23) andrà determinato nel modo seguente. Supponiamo per semplicità che sia $q(0) = q_-(\alpha)$ e $p(0) = 0$; scriveremo allora

$$\beta = t = \int_{q_0}^{q(t)} \mathrm{d}q'\, \tilde{p}(q', \alpha), \qquad \tilde{p}(q, \alpha) = \sqrt{2a(q)\,(\alpha - V(q))}, \tag{78.25}$$

dove si può scegliere, per esempio, $q_0 = q_-(\alpha)$, e potremo usare tale espressione fino al tempo T_1 in cui di nuovo $p(T_1) = 0$. Dopo tale tempo, per $t > T_1$, scriveremo

$$\beta = T_1 + \int_{q_+(\alpha)}^{q(t)} \mathrm{d}q' \left(-\tilde{p}(q', \alpha)\right) \tag{78.26}$$

e useremo tale espressione fino al tempo T_2 tale che $p(T_1 + T_2) = 0$ ancora una volta. Dopo tale tempo di nuovo avremo

$$\beta = T_1 + T_2 + \int_{q_0}^{q(t)} \mathrm{d}q'\, \tilde{p}(q', \alpha). \tag{78.27}$$

Si vede che β è definito modulo $T = T_1 + T_2$, con T che rappresenta il periodo del moto. Se invece I è illimitato a destra, i.e $I = [q_-(\alpha), +\infty)$, se $p(0) \geq 0$ si ha $p(t) > 0$ per ogni $t \geq 0$, e quindi si prende sempre la determinazione positiva di p. Se invece $p(0) < 0$ si prende la determinazione negativa fino al tempo T_1 in cui si ha $p(T_1) = 0$; da quell'istante in poi si prenderà la determinazione positiva. In questo caso la variabile β è a un sol valore, e quindi non va interpretata come angolo. Analoghe considerazioni valgono se I è illimitato a sinistra.

§79 Separazione di variabili

Supponiamo che, ponendo $q = (q_1, q')$ e $p = (p_1, p')$, con $z' = (q', p') \in \mathbb{R}^{2(n-1)}$ e $z_1 = (q_1, p_1) \in \mathbb{R}^2$, l'hamiltoniana si possa scrivere nella forma

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{F}_1(q', p', \mathcal{G}_1(q_1, p_1)), \tag{79.1}$$

per opportune funzioni $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{G}_1$ (di classe C^2). Se poniamo $\mathcal{G}_1(q_1, p_1) = \alpha_1$, possiamo allora cercare una funzione caratteristica di Hamilton nella forma

$$W(q, \alpha) = W(q_1, q', \alpha) = W'(q', \alpha) + W_1(q_1, \alpha_1), \tag{79.2}$$

e riscrivere la (79.1) nella forma

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1\left(q_1, \dfrac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1, \\ \mathcal{F}_1\left(q', \dfrac{\partial W'}{\partial q'}, \alpha_1\right) = \alpha_n, \end{cases} \tag{79.3}$$

dove si è usato il fatto che $\partial W/\partial q' = \partial W'/\partial q'$ e $\partial W/\partial q_1 = \partial W_1/\partial q_1$.