prende il nome di *proiezione stereografia* di S_n su H_n di centro c e c prende il nome di *centro di proiezione* (cfr. la figura 11.4 per $n = 2$). Si discuta come definire la proiezione stereografia di S_n qualora si prenda al posto di c un altro punto di S_n e al posto di H_n un altro iperpiano non passante per c.

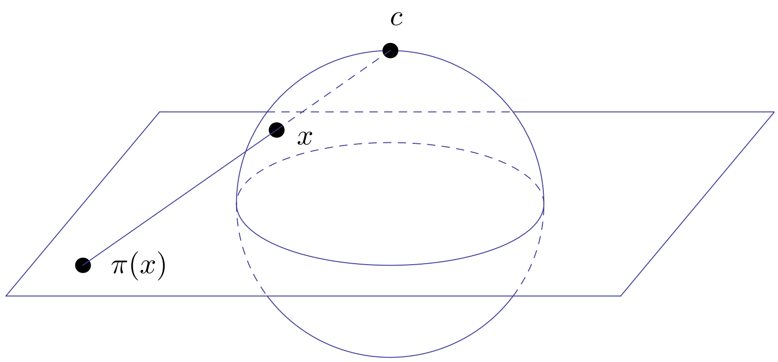

Figura 11.4: Proiezione stereografia del punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ di S_2 su H_2 di centro $c = (0, 0, 1)$.

Esercizio 18 Si dimostri che la sfera n-dimensionale S_n è una varietà. [*Suggerimento.* Si può costruire un atlante costituito da due sole carte prendendo due proiezione stereografiche che abbiano il centro in due punti distinti, per esempio (ma non necessariamente) due punti antipodali.]

Esercizio 19 Si dimostri che il funzionale d'azione (52.4) non dipende dal sistema di coordinate.

Esercizio 20 Si dimostri che il funzionale d'azione (52.4) non dipende dalla particolare scomposizione scelta per l'intervallo $[t_1, t_2]$.

Esercizio 21 Sia Σ una superficie determinata dalle condizioni $x = x(q)$, con $q \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$ (dove $m < n$). Si dimostri che i vettori $\partial x/\partial q_1, \ldots, \partial x/\partial q_n$ formano una base per $T_{x(q)}\Sigma$, lo spazio tangente a Σ nel punto $x(q)$. [*Suggerimento.* Siano $G_1(x) = \ldots = G_M(x) = 0$ le equazioni che individuano la superficie Σ. Si ha

$$0 = \frac{\partial G_k}{\partial q_i}(x(q)) = \left\langle \frac{\partial G_k}{\partial x}(x(q)), \frac{\partial x}{\partial q_i}(q) \right\rangle, \qquad k = 1, \ldots, M,$$

quindi i vettori $[\partial x/\partial q_i](q)$ sono ortogonali ai vettori $[\partial G_m/\partial x](x(q))$, $m = 1, \ldots, M$, che a loro volta sono ortogonali alla superficie di vincolo. Di conseguenza i vettori

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}(q), \ldots, \frac{\partial x}{\partial q_m}(q)$$

sono contenuti in $T_{x(q)}\Sigma$. Inoltre essi sono linearmente indipendenti perché altrimenti Σ non potrebbe essere descritta in termini di q.]