12 Studio di sistemi lagrangiani

§58 Stabilità delle configurazioni di equilibrio

In questo capitolo ci occuperemo dello studio di sistemi meccanici conservativi sottoposti a vincoli, attraverso l'utilizzo del formalismo lagrangiano introdotto nel capitolo precedente. In particolare vedremo come individuare le configurazioni di equilibrio di un sistema e studiarne la stabilità partendo dalla lagrangiana che descrive il sistema. Come risulterà ovvio dagli esempi che saranno presi in considerazione, minore è il numero di gradi di libertà più facile risulta lo studio del sistema: il metodo di Routh fornisce un modo per ricondursi a un sistema con un un numero minore di gradi di libertà nel caso in cui la lagrangiana non dipenda esplicitamente da alcune variabili lagrangiane.

Lemma 58.1 *Se $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q})$ non dipende esplicitamente dal tempo allora la funzione*

$$E = E(q, \dot{q}) := \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \tag{58.1}$$

è una costante del moto.

Dimostrazione. La derivata totale rispetto al tempo di E è data da

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right\rangle - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}, \tag{58.2}$$

dove si sono utilizzate le equazioni di Eulero-Lagrange (51.7). D'altra parte, per definizione di derivata totale, si ha

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right\rangle + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \left\langle \ddot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle + \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \right\rangle, \tag{58.3}$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto che $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo (così che la sua derivata parziale rispetto a t è nulla). Inserendo la (58.3) nella (58.2) otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0,$$

da cui segue l'asserto. ∎

Lemma 58.2 *Dato un sistema meccanico conservativo, sottoposto a vincoli olonomi bilateri autonomi e descritto dalle coordinate lagrangiane $q = (q_1, \ldots, q_{3N-M})$, la corrispondente lagrangiana (vincolata) ha la forma*

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q), \qquad T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle , \tag{58.4}$$

dove $A(q)$ è una matrice simmetrica definita positiva, i cui elementi hanno la forma

$$A_{jj'}(q) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_i \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_j} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_{j'}}, \tag{58.5}$$

con $1 \le j, j' \le 3N - M$.

Dimostrazione. Scrivendo le coordinate cartesiane x in termini delle coordinate lagrangiane q secondo la (53.1), e tenendo conto che i vincoli non dipendono esplicitamente dal tempo, così che risulta $x = x(q)$, otteniamo per l'energia cinetica l'espressione

$$\begin{aligned} T = T(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_i \dot{x}_k^{(i)} \dot{x}_k^{(i)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} m_i \sum_{j=1}^{3N-M} \sum_{j'=1}^{3N-M} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_j} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_{j'}} \dot{q}_j \dot{q}_{j'} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3N-M} \sum_{j'=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_j} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_{j'}} \right) \dot{q}_j \dot{q}_{j'}, \end{aligned} \tag{58.6}$$

dove si sono utilizzate le (53.2), tenendo conto che le derivate parziali rispetto al tempo sono nulle. Segue allora che T ha la forma in (58.4) se definiamo la matrice $A(q)$ come in (58.5).

Si vede immediatamente che la matrice $A(q)$ è simmetrica. Per vedere che è definita positiva notiamo innazitutto che si ha $\dot{q} = 0$ se e solo se $\dot{x} = 0$. Infatti, in accordo con la (53.2), $\dot{x}_k^{(i)}$ è una combinazione lineare dei vettori $\partial x_k^{(i)}/\partial q_j$. Tali vettori costituiscono una base per lo spazio tangente (cfr. l'esercizio 21 del capitolo 11), quindi la combinazione lineare (53.2) è nulla se e solo se i coefficienti della combinazione lineare $\dot{q}_j$ sono tutti simultaneamente nulli. In altre parole si ha $\dot{x}_k^{(i)} = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, N$ e $k = 1, 2, 3$ se e solo se $\dot{q}_j = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, 3N - M$.

Poiché la forma quadratica in $\dot{x}$

$$\langle \dot{x}, m\dot{x} \rangle = \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle = 2T(q, \dot{q})$$

è nulla se e solo se $\dot{x} = 0$ ed è strettamente maggiore di zero altrimenti (si noti che i due prodotti scalari sono il primo in $\mathbb{R}^{3N}$ e il secondo in $\mathbb{R}^{3N-M}$), possiamo concludere che $T(q, \dot{q})$ è nulla se e solo se $\dot{q} = 0$ ed è strettamente positiva per ogni $\dot{q} \neq 0$. ∎

Lemma 58.3 *Se la lagrangiana $\mathcal{L}$ descrive un sistema meccanico conservativo allora E rappresenta l'energia totale del sistema.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{L} = T - V$, con $T = T(q, \dot{q})$ e $U = V(q)$ si ha, dalla definizione (58.1),

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \dot{q}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right\rangle - \mathcal{L} = \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle - \mathcal{L} = 2T(q, \dot{q}) - (T(q, \dot{q}) - V(q)) \\ &= T(q, \dot{q}) + V(q) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + V(q). \end{aligned}$$

Quindi E è la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, i.e. è l'energia totale del sistema. ■

Le equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana (58.4) si possono scrivere come un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Si ha infatti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{j'=1}^{3N-M} A_{jj'} \dot{q}_{j'} \right) = \sum_{j',j''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{jj'}}{\partial q_{j''}} \dot{q}_{j'} \dot{q}_{j''} + \sum_{j'=1}^{3N-M} A_{jj'} \ddot{q}_{j'}, \tag{58.7a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \sum_{j',j''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{j'j''}}{\partial q_j} \dot{q}_{j'} \dot{q}_{j''} - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \tag{58.7b}$$

così che le equazioni di Eulero-Lagrange diventano

$$\sum_{j'=1}^{3N-M} A_{jj'} \ddot{q}_{j'} = - \sum_{j',j''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{jj'}}{\partial q_{j''}} \dot{q}_{j'} \dot{q}_{j''} + \frac{1}{2} \sum_{j',j''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{j'j''}}{\partial q_j} \dot{q}_{j'} \dot{q}_{j''} - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{58.8}$$

Se introduciamo il vettore di componenti

$$\mathcal{Q}_j(q, \dot{q}) := \frac{1}{2} \sum_{j',j''=1}^{3N-M} \frac{\partial A_{j'j''}}{\partial q_j} \dot{q}_{j'} \dot{q}_{j''} - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \tag{58.9}$$

e definiamo $p := A(q)\,\dot{q}$, possiamo trasformare le equazioni del secondo ordine (58.8) in un sistema di $2(3N - M)$ equazioni del primo ordine, che scriviamo, in maniera compatta,

$$\begin{cases} \dot{q} = A^{-1}(q)\, p, \\ \dot{p} = \mathcal{Q}(q, p), \end{cases} \tag{58.10}$$

dove si è usato che la matrice $A(q)$ si può invertire in quanto definita positiva (cfr. il lemma 58.2). In termini di (q, p) l'energia del sistema si scrive

$$H(q, p) := \frac{1}{2} \left\langle p, A^{-1}(q)\, p \right\rangle + V(q), \tag{58.11}$$

dove il primo termine rappresenta l'energia cinetica e $V(q)$ è l'energia potenziale.

Osservazione 58.4 I punti di equilibrio per il sistema (58.10) si ottengono imponendo che, in corrispondenza di essi, il campo vettoriale sia nullo. Le prime $3N - M$ equazioni in (58.10) dànno $p = 0$. Questo giustifica la seguente definizione.

Definizione 58.5 (CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO) *Dato un sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana* (58.4)*, diremo che* q_0 *è una* configurazione di equilibrio *per il sistema se* $(q_0, 0)$ *è un punto di equilibrio del sistema dinamico* (58.10)*. Diremo che la configurazione di equilibrio* q_0 *è* stabile *se* $(q_0, 0)$ *è un punto d'equilibrio stabile, e che è* instabile *se* $(q_0, 0)$ *è instabile.*

Teorema 58.6 *Dato un sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana* (58.4)*, le configurazioni di equilibrio corrispondono ai punti stazionari dell'energia potenziale* $V(q)$*. Se* q_0 *è un punto di minimo isolato di* U*, allora* q_0 *rappresenta una configurazione di equilibrio stabile per il sistema.*

Dimostrazione. I punti di equilibrio per il sistema (58.10) richiedono $p = 0$, che, inserita nelle ultime $3N - M$ equazioni, dà $\mathcal{Q}(q, 0) = 0$ e quindi, in base alla definizione (58.9), $\partial V(q)/\partial q = 0$. In conclusione q_0 è una configurazione di equilibrio se e solo se q_0 è un punto stazionario dell'energia potenziale V.

Poiché la (58.11) rappresenta l'energia totale del sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$: possiamo applicare il teorema di Lagrange-Dirichlet (teorema 19.22) per concludere che i punti di minimo isolati sono punti di equilibrio stabili per il sistema. ■

Osservazione 58.7 Nel caso di un sistema di N punti materiali sottoposti a vincoli olonomi bilateri, se siamo interessati a determinare le forze vincolari che si esercitano in corrispondenza di una configurazione di equilibrio, possiamo procedere come segue, studiando direttamente le equazioni (41.6). Se le forze sono conservative allora si ha

$$\boldsymbol{f}^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(i)}} V(x), \qquad = 1, \ldots, N,$$

e quindi le equazioni del moto diventano

$$m_i \ddot{\boldsymbol{x}}^{(i)} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(i)}} V(x) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{(i)}} G_m(x, t), \qquad = 1, \ldots, N,$$

dove si è tenuto conto dell'ultima equazione in (41.6) che permette di esprimere le forze vincolari in termini dei gradienti delle funzioni che definiscono i vincoli. Le configurazioni di equilibrio sono date dai punti $x \in \Sigma(t)$ in cui si annulla il campo vettoriale. In particolare, le configurazioni di equilibrio stabili corrispondono ai punti di minimo dell'energia potenziale condizionata dai vincoli $G_m(x(t), t) = 0$. Si tratta di un problema di minimi vincolati: possiamo perciò applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Notiamo che, alternativamente, si può sempre procedere come indicato nel'osservazione 53.6, imponendo l'ulteriore condizione che si ha $\ddot{x} = 0$ dato che si tratta di una configurazione di equilibrio.

Osservazione 58.8 Se un sistema meccanico conservativo è sottoposto a vincoli olonomi bilateri non autonomi, allora si ha $x = x(q,t)$, invece di $x = x(q)$ come abbiamo scritto nella dimostrazione del lemma 58.2. L'espressione dell'energia cinetica (58.6) è modificata dall'aggiunta di altri due termini dovuti alla derivata parziale di x rispetto a t, ed è data da

$$T = T(q,\dot q,t) = \frac{1}{2}\langle \dot q, A(q,t)\dot q\rangle + \langle B(q,t),\dot q\rangle + C(q,t), \tag{58.12}$$

dove $A(q,t)$ è ancora la matrice simmetrica definita positiva di elementi (58.5), e e

$$B_j(q,t) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial q_j}\frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial t}, \quad j = 1,\dots,3N-M, \qquad C(q,t) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x_k^{(i)}}{\partial t}\right)^2 .$$

Quindi T è ancora quadratica in $\dot q$, però ora compaiono anche termini lineari e costanti in $\dot q$. Si noti che anche nel caso di vincoli non autonomi si ha

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot q_i \partial \dot q_j} = A_{ij}(q,t),$$

che è quindi una matrice invertibile.

Il teorema 58.6 non considera il caso di punti stazionari che non siano punti di minimo isolati. Se la matrice hessiana di U calcolata in un punto stazionario q_0 ha almeno un autovalore negativo, l'instabilità del punto di equilibrio corrispondente $(q_0,0)$ per il sistema dinamico descritto dalla (58.10) discende dal teorema 18.7, poiché in tal caso la matrice del sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio ha almeno un autovalore positivo, come mostra la seguente discussione.

Teorema 58.9 *Si consideri un sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana* (58.4)*. Sia q_0 un punto stazionario dell'energia potenziale V e si assuma che, in un intorno di q_0, V abbia la forma $V(q) = V_2(q) + R(q)$, dove $V_2(q) = \langle q - q_0, B(q-q_0)\rangle$ è una forma quadratica tale che $V_2(q) < 0$ per qualche q e $R(q) = o(|q-q_0|^2)$. Allora q_0 è una configurazione di equilibrio instabile per il sistema.*

Dimostrazione. Assumiamo, senza perdita di generalità, che si abbia $q_0 = 0$. Si consideri il sistema linearizzato del sistema (58.10) nell'intorno del punto di equilibrio $(0,0)$, che scriviamo nella forma

$$\dot x = Mx, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ -B & 0 \end{pmatrix},$$

dove $x = (q,p)$, $A := A(0)$, B è la matrice hessiania di V calcolata in $q = 0$ (i.e. la matrice di elementi $B_{ij} = [\partial^2 V/\partial q_i \partial q_j](0)$) e 0 è la matrice nulla $n \times n$. Per il teorema 18.7, se M ha almeno un autovalore positivo, ne concludiamo che il punto di equilibrio $x = 0$ è un punto