

**Teorema 58.13** *Si consideri un sistema meccanico conservativo descritto dalla lagrangiana (58.4). Sia  $q_0$  un punto stazionario dell'energia potenziale  $V$  e si assuma che, in un intorno di  $q_0$ , la funzione  $V$  abbia la forma  $V(q) = V(q_0) + V_m(q - q_0) + R(q)$ , dove  $V_m(x)$  è un polinomio omogeneo di grado  $m$  definito negativo, i.e. tale che  $V_m(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , e*

$$\lim_{q \rightarrow q_0} \frac{1}{|q - q_0|^{m-1}} \frac{\partial R}{\partial q}(q) = 0, \quad R(q_0) = 0.$$

Allora  $q_0$  è una configurazione di equilibrio instabile per il sistema.

*Dimostrazione.* Poiché  $V_m(x)$  è una funzione continua omogenea di grado  $m$  definita negativa, si ha  $V_m(q - q_0) < -c|q - q_0|^m \forall q \neq q_0$ , per qualche costante positiva  $c$  (cfr. l'esercizio 5). Si ha  $R(q) = o(|q - q_0|^m)$ , in virtù dell'ipotesi sulla funzione  $R$  (cfr. l'esercizio 6), quindi

$$V(q) - V(q_0) = V_m(q - q_0) + R(q) < -c|q - q_0|^m + o(|q - q_0|^m) < -\frac{c}{2}|q - q_0|^m,$$

da cui si evince che l'insieme  $D$ , definito come nel teorema 58.11, è non vuoto. Inoltre

$$\left\langle q - q_0, \frac{\partial V}{\partial q}(q) \right\rangle = mV_m(q) + \left\langle q - q_0, \frac{\partial R}{\partial q}(q) \right\rangle < -mc|q - q_0|^m + o(|q - q_0|^m) < -\frac{mc}{2}|q - q_0|^m,$$

purché  $|q - q_0|$  sia sufficientemente piccolo. Possiamo applicare il teorema 58.11 per concludere che  $q_0$  è una configurazione di equilibrio instabile. ■

**Osservazione 58.14** In realtà si può dimostrare che un punto di massimo isolato dell'energia potenziale corrisponde sempre a una configurazione di equilibrio instabile. Questo è stato esplicitamente verificato per  $n = 1$  nel §19 (cfr. il teorema 19.31). Per  $n > 1$ , al contrario, la situazione è ben più complicata (cfr. la nota bibliografica). Nel caso di punti stazionari isolati che non siano né punti di minimo né punti di massimo, si può dimostrare ancora l'instabilità del corrispondente punto di equilibrio, sotto l'assunzione che l'energia potenziale sia una funzione analitica (cfr. di nuovo la nota bibliografia). Tuttavia, nel caso di funzioni di classe  $C^2$ , il problema è aperto.

In un sistema meccanico conservativo può succedere che, pur non esistendo configurazioni di equilibrio, esista un opportuno sistema riferimento mobile in cui il sistema ammetta configurazioni di equilibrio. Si consideri per esempio un sistema di punti materiali che si muovano in un piano rotante: ovviamente le equazioni del moto (58.10) non possono avere configurazioni di equilibrio al di fuori dell'asse di rotazione (perché la corrispondente velocità non può essere nulla). Tuttavia, nel sistema di riferimento solidale con il piano rotante possono esistere configurazioni di equilibrio.

**Definizione 58.15** (EQUILIBRIO RELATIVO) *Dato un sistema lagrangiano, si considerino le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange in un sistema di riferimento mobile. Una configurazione di equilibrio  $q_0$  in tale sistema di riferimento rappresenta una configurazione di equilibrio relativo per il sistema lagrangiano.*

**Esempio 58.16** Si consideri un pendolo semplice che si muova in un piano che a sua volta ruoti intorno a un asse verticale passante per il punto di sospensione del pendolo con velocità angolare costante  $\omega$ . Nel sistema di riferimento solidale con il piano rotante la lagrangiana del pendolo è (cfr. l'esercizio 7)

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi + \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 \sin^2 \varphi,$$

dove, rispetto alla lagrangiana dell'esercizio 49 del capitolo 11, compare un termine aggiuntivo dovuto alla forza centrifuga. Oltre alle configurazioni di equilibrio corrispondenti a  $\varphi = 0$  e  $\varphi = \pi$ , se  $\alpha := g/\omega^2\ell < 1$  compaiono due nuove configurazioni di equilibrio,  $\varphi = \varphi_0$  e  $\varphi = -\varphi_0$ , dove  $\varphi_0 = \arccos \alpha$ : si verifica facilmente che, quando le ultime esistono, esse sono stabili, mentre  $(\varphi, \dot{\varphi}) = (0, 0)$  (che è una configurazione di equilibrio stabile per  $\alpha \geq 1$ ) diventa instabile. Il cambiamento di stabilità delle configurazioni di equilibrio (e quindi dei punti di equilibrio corrispondenti) al variare di  $\alpha \in (0, +\infty)$  può essere rappresentato graficamente per mezzo di un *diagramma di biforcazione*, come in figura 12.1, dove solo la variabile  $\varphi$  è riportata in ordinata, poiché  $\dot{\varphi} = 0$  in corrispondenza di un punto di equilibrio: le linee solide corrispondono a punti di equilibrio stabili, mentre le linee tratteggiate corrispondono a punti di equilibrio instabili. In particolare si vede che  $\varphi = \pi$  è una configurazione di equilibrio instabile per ogni valore di  $\alpha$ ; la configurazione di equilibrio  $\varphi = 0$  esiste per ogni valore di  $\alpha$ , ma è stabile solo per  $\alpha \geq 1$ ; infine le due configurazioni di equilibrio  $\varphi = \pm\varphi_0$  esistono solo per  $\alpha \in [0, 1)$  e quando esistono sono stabili. Al diminuire di  $\alpha$ , l'equilibrio di  $\varphi = 0$  passa da stabile a instabile quando  $\alpha$  raggiunge il valore critico  $\alpha_c = 1$  e nel contempo si creano due nuovi punti di equilibrio stabili. Si parla in questo caso di *biforcazione a forcone supercritica*. Si parla invece di *biforcazione a forcone subcritica* quando un punto di equilibrio passa da instabile a stabile e si creano due nuovi punti di equilibrio instabili (cfr. anche la discussione del §61.3 e gli esercizi 8 e 9).

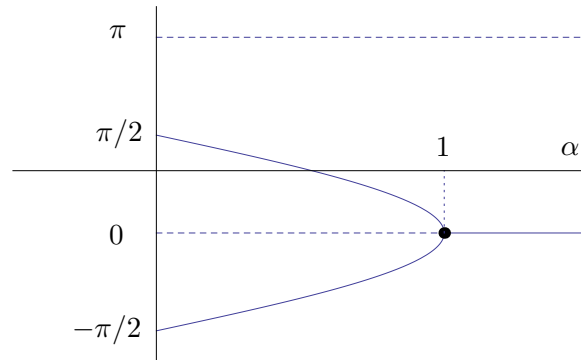


Figura 12.1: Diagramma di biforcazione dei punti di equilibrio per il pendolo in un piano rotante.