§59 Variabili cicliche e metodo di Routh

Lo studio di un sistema di lagrangiano può risultare più o meno complicato a seconda del sistema di coordinate che si è scelto. La fondatezza di questa semplice osservazione è già evidente nel caso di sistemi lineari $\dot{x} = Ax$: se per esempio la matrice A è diagonalizzabile, è conveniente studiare il sistema nella base in cui A è diagonale. In questo paragrafo vedremo che è particolarmente vantaggioso lavorare in un sistema di coordinate in cui la lagrangiana non dipenda esplicitamente da (almeno) una di esse. Questo infatti consentirà di passare a un sistema lagrangiano con un grado di libertà in meno, e quindi, in principio, più facile da studiare. La riduzione al sistema con meno gradi di libertà si ottiene attraverso quello che è chiamato *metodo di Routh*, che ora passiamo a descrivere.

Sia $\mathcal{L} = T - V$ una lagrangiana descritta in un sistema di coordinate $q_1, \ldots, q_n$. Per un sistema meccanico soggetto a forze conservative si ha $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$, dove $T(q, \dot{q}, t)$ è l'energia cinetica (58.12) e $V(q, t)$ è l'energia potenziale. Supponiamo (anche nel seguito) che la matrice di elementi

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$$

sia definita positiva (cfr. l'osservazione 51.20 e il lemma 58.2); questo implica la condizione $\partial^2 \mathcal{L}/\partial \dot{q}_n^2 \neq 0$ (cfr. l'esercizio 10) che rientra nelle ipotesi del teorema 59.4 più avanti.

Definizione 59.1 (Variabile ciclica) *Se la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ non dipende da una coordinata, diremo che tale coordinata è una* variabile ciclica.

Osservazione 59.2 Che la lagrangiana di un sistema a n gradi di libertà possa dipendere da un numero di coordinate inferiore a n dipende dal particolare sistema di coordinate scelte. Per esempio nel caso di potenziali centrali nel piano, se si scelgono coordinate polari (ρ, θ) allora la variabile angolare θ è ciclica (cfr. l'esempio 59.7 più avanti); tuttavia in coordinate cartesiane nessuna variabile è ciclica. Vedremo nel §62 che l'esistenza di coordinate cicliche è legata all'esistenza di costanti del moto e che, in particolare, se un sistema meccanico ammette una costante del moto, allora esiste un sistema di coordinate in cui una di esse è ciclica (cfr. comunque l'osservazione 62.22).

Lemma 59.3 *Se q_n è una variabile ciclica per il sistema descritto dalla lagrangiana $\mathcal{L}$, i.e.*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t), \tag{59.1}$$

allora la quantità

$$p_n := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \tag{59.2}$$

è una costante del moto.

Dimostrazione. Segue dalle equazioni di Eulero-Lagrange (51.7) e dal fatto che la lagrangiana (59.1) non dipende da q_n. ■

Teorema 59.4 (Teorema di Routh) *Sia la lagrangiana $\mathcal{L}$ tale che q_n sia una variabile ciclica, nel sistema di coordinate $q = (q_1, \ldots, q_n)$, e si abbia $\partial^2 \mathcal{L}/\partial \dot{q}_n^2 \neq 0$. Allora l'evoluzione delle altre coordinate è determinata dalla lagrangiana*

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_R(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n) \\ & \quad = \mathcal{L}(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) - p_n \dot{q}_n \Big|_{\dot{q}_n = f(q_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n)}, \end{aligned} \tag{59.3}$$

dove p_n è la costante del moto (59.2) *e la funzione f si ottiene invertendo la* (59.2), *i.e. esprimendo $\dot{q}_n$ in funzione di p_n e delle altre variabili.*

Dimostrazione. Poiché $\partial^2 \mathcal{L}/\partial \dot{q}_n^2 \neq 0$, la (59.2) può essere invertita, per il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4 del capitolo 4), e quindi esiste una funzione f tale che

$$\dot{q}_n = f(q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n), \tag{59.4}$$

dove p_n è una costante del moto (per il lemma 59.3). Quindi $\dot{q}_n$ è funzione delle sole coordinate $q_1, \ldots, q_{n-1}$ (e delle loro derivate, oltre che di t e di p_n) e non dipende invece da q_n. Una volta che le funzioni $t \mapsto q_1(t)$, ..., $t \mapsto q_{n-1}(t)$ siano note, la funzione $t \mapsto q_n(t)$ si ottiene per integrazione diretta dalla (59.4).

Dobbiamo quindi determinare la variazione nel tempo delle prime $n-1$ coordinate. Definiamo la funzione $\mathcal{L}_R$ come in (59.3); per costruzione $\mathcal{L}_R$ dipende solo da

$$q_1, \ldots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n,$$

quindi con il simbolo $\partial \mathcal{L}_R/\partial q_k$ indichiamo la derivata parziale di $\mathcal{L}_R$ rispetto a q_k, che si ottiene come limite del rapporto incrementale che si ha mantenendo fisse le altre variabili da cui essa dipende (inclusa p_n, che deve essere considerata semplicemente un parametro per $\mathcal{L}_R$). Quindi, per $k = 1, \ldots, n-1$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial f}{\partial q_k} - p_n \frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k},$$

in virtù della definizione (59.2). Analogamente, per $k = 1, \ldots, n-1$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} - p_n \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k},$$

e quindi le equazioni di Eulero-Lagrange (51.7) per la lagrangiana $\mathcal{L}$ implicano

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{L}_R}{\partial q_k}, \qquad k = 1, \ldots, n-1,$$

che sono le equazioni di Eulero-Lagrange per la lagrangiana (59.3). ∎

Definizione 59.5 (Lagrangiana ridotta) *Dato un sistema lagrangiano e un sistema di coordinate in cui la coordinata q_n sia ciclica, definiremo* lagrangiana ridotta *la funzione* (59.3).

Osservazione 59.6 La dimostrazione del teorema 59.4 mostra che la sostituzione diretta della (59.4) nella lagrangiana $\mathcal{L}$, i.e.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n) \\ = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)\Big|_{\dot{q}_n = f(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n)},\end{aligned}$$

produce una funzione $\mathcal{L}'$ che non rappresenta la lagrangiana del sistema a $n-1$ gradi di libertà descritto dalle coordinate $q_1, \dots, q_{n-1}$. Questo è dovuto al fatto che le derivate parziali rispetto alle q_k e rispetto alle $\dot{q}_k$ entrano in modo diverso nelle equazioni di Eulero-Lagrange, a seconda di quali siano le altre coordinate che si mantengono costanti nel calcolare le derivate parziali.

Esempio 59.7 Sia $\mathcal{L}$ la lagrangiana che descrive un punto di massa m che si muove in un piano per effetto di una forza centrale di energia potenziale V (cfr. la discussione del problema dei due corpi al capitolo 7). In coordinate polari, si ha (cfr. l'esercizio 11)

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\, m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2\right) - V(\rho) \tag{59.5}$$

e la coordinata θ è ciclica. La quantità

$$L := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2\dot{\theta}, \tag{59.6}$$

che definisce la componente del momento angolare ortogonale al piano, è una costante del moto (cfr. anche il §31). Per il teorema 59.4 il moto della coordinata ρ è determinato dalla lagrangiana ridotta

$$\mathcal{L}_R(\rho, \dot{\rho}) = \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) - L\dot{\theta}\Big|_{\dot{\theta} = L/(m\rho^2)} = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 - \left(V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2}\right), \tag{59.7}$$

mentre la sostituzione della (59.6) nella (59.5) avrebbe portato alla funzione

$$\mathcal{L}'(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 - \left(V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2}\right),$$

che non rappresenta la lagrangiana che descrive il moto.

§60 Studio di un sistema lagrangiano

Vediamo un'applicazione della teoria dei sistemi lagrangiani sviluppata finora. Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, sono vincolati a muoversi su una guida circolare di