

Definizione 59.5 (LAGRANGIANA RIDOTTA) Dato un sistema lagrangiano e un sistema di coordinate in cui la coordinata q_n sia ciclica, definiremo lagrangiana ridotta la funzione (59.3).

Osservazione 59.6 La dimostrazione del teorema 59.4 mostra che la sostituzione diretta della (59.4) nella lagrangiana \mathcal{L} , i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n) \\ = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \Big|_{\dot{q}_n = f(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, t, p_n)}, \end{aligned}$$

produce una funzione \mathcal{L}' che non rappresenta la lagrangiana del sistema a $n-1$ gradi di libertà descritto dalle coordinate q_1, \dots, q_{n-1} . Questo è dovuto al fatto che le derivate parziali rispetto alle q_k e rispetto alle \dot{q}_k entrano in modo diverso nelle equazioni di Eulero-Lagrange, a seconda di quali siano le altre coordinate che si mantengono costanti nel calcolare le derivate parziali.

Esempio 59.7 Sia \mathcal{L} la lagrangiana che descrive un punto di massa m che si muove in un piano per effetto di una forza centrale di energia potenziale V (cfr. la discussione del problema dei due corpi al capitolo 7). In coordinate polari, si ha (cfr. l'esercizio 11)

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - V(\rho) \quad (59.5)$$

e la coordinata θ è ciclica. La quantità

$$L := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\rho^2 \dot{\theta}, \quad (59.6)$$

che definisce la componente del momento angolare ortogonale al piano, è una costante del moto (cfr. anche il §31). Per il teorema 59.4 il moto della coordinata ρ è determinato dalla lagrangiana ridotta

$$\mathcal{L}_R(\rho, \dot{\rho}) = \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}, \dot{\theta}) - L\dot{\theta} \Big|_{\dot{\theta} = L/(m\rho^2)} = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - \left(V(\rho) + \frac{L^2}{2m\rho^2} \right), \quad (59.7)$$

mentre la sostituzione della (59.6) nella (59.5) avrebbe portato alla funzione

$$\mathcal{L}'(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 - \left(V(\rho) - \frac{L^2}{2m\rho^2} \right),$$

che non rappresenta la lagrangiana che descrive il moto.

§60 Studio di un sistema lagrangiano

Vediamo un'applicazione della teoria dei sistemi lagrangiani sviluppata finora. Due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , sono vincolati a muoversi su una guida circolare di

raggio $r = 1$ posta in un piano verticale π . Sia g l'accelerazione di gravità. Si scelga in π un sistema di coordinate (x, y) nel quale la circonferenza abbia equazione

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1. \quad (60.1)$$

Due punti materiali P_3 e P_4 , anch'essi di massa m , possono scorrere lungo una guida orizzontale contenuta nel piano π , di equazione $y = 0$. I punti P_1 e P_2 sono collegati tramite una molla, rispettivamente, ai punti P_3 e P_4 , i quali, a loro volta, sono collegati tramite una molla allo stesso punto materiale P_5 , di massa m , libero di scorrere lungo l'asse y ; le molle hanno tutte lunghezza a riposo nulla e costante elastica $k > 0$ (cfr. la figura 12.2).

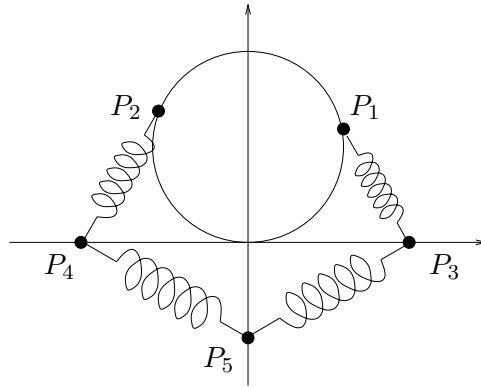


Figura 12.2: Sistema discusso nell'esempio del §60.

(1) Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane non banali dei punti P_3 , P_4 e P_5 (i.e. le ascisse x_3 e x_4 di P_3 e di P_4 , rispettivamente, nonché l'ordinata di P_5) e gli angoli che i raggi vettori OP_1 e OP_2 formano con la verticale discendente, se O è il centro della guida circolare.

(2) Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità al variare dei parametri m , k e g .

(3) Si consideri la configurazione (cfr. la figura 12.3)

$$P_1 = (1, 1), \quad P_2 = (-1, 1), \quad P_3 = (1, 0), \quad P_4 = (-1, 0), \quad P_5 = (0, -mg/2k), \quad (60.2)$$

e si fissino le velocità in modo che siano tutte nulle, i.e.

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5 = (0, 0),$$

dove $v_i \in \mathbb{R}^2$ è la velocità del punto P_i . Si determinino le forze vincolari che agiscono sul punto P_3 in corrispondenza della configurazione considerata.

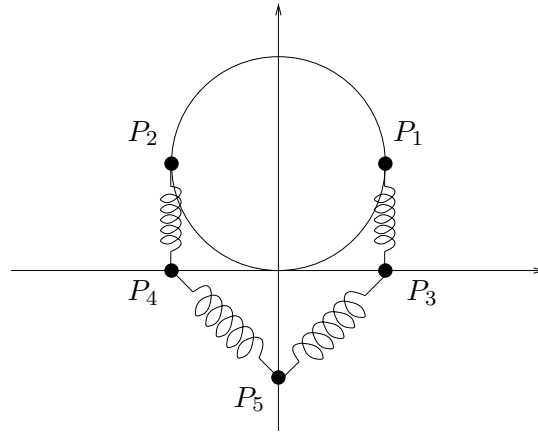


Figura 12.3: Configurazione considerata al punto (3).

(4) Siano i punti P_1 e P_2 fissati rigidamente nelle posizioni, rispettivamente,

$$P_1 = (1, 1), \quad P_2 = (-1, 1).$$

Se il piano π ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω (cfr. la figura 12.4), si determinino le configurazioni di equilibrio relativo, i.e. le configurazioni di equilibrio nel sistema di riferimento solidale con il piano π (cfr. la definizione 58.15) e se ne studi la stabilità.

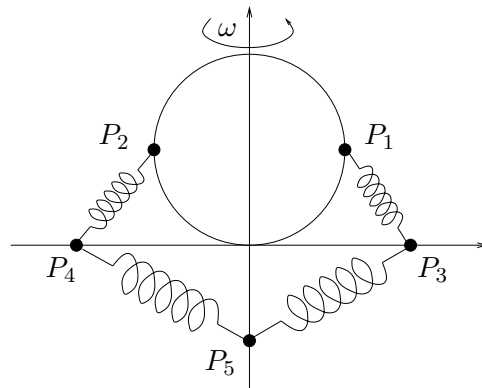


Figura 12.4: Sistema considerato al punto (4).

(5) Sotto le stesse ipotesi del punto precedente, si determinino le forze vincolari che agiscono sul punto P_3 , in corrispondenza di una generica configurazione compatibile con il moto.

60.1 Lagrangiana ed equazioni di Eulero-Lagrange

Indichiamo con (x_i, y_i) sono le coordinate del punto P_i , $i = 1, \dots, 5$. L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 m |v_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 m (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad (60.3)$$

dove $v_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$ è la velocità del punto P_i , mentre l'energia potenziale è $V = V_{\text{gr}} + V_{\text{el}}$, con

$$\begin{aligned} V_{\text{gr}} &= \sum_{i=1}^5 mgy_i, \\ V_{\text{el}} &= \frac{1}{2}k \left(((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2) + ((x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2) \right. \\ &\quad \left. + ((x_3 - x_5)^2 + (y_3 - y_5)^2) + ((x_4 - x_5)^2 + (y_4 - y_5)^2) \right), \end{aligned} \quad (60.4)$$

dove V_{gr} rappresenta l'energia gravitazionale (cfr. l'esercizio 12) e V_{el} è il contributo dovuto all'energia elastica delle molle (cfr. l'esercizio 13)

Si noti che il sistema può essere visto come un sistema di punti materiali in \mathbb{R}^3 con l'ulteriore vincolo che la coordinata z_i di ogni punto P_i sia identicamente nulla. Potremmo allora introdurre anche le coordinate z_i e \dot{z}_i nelle (60.3) e (60.4), ma i termini aggiuntivi scompaiono quando imponiamo il vincolo $z_i = \dot{z}_i = 0$ per $i = 1, \dots, 5$.

In termini delle coordinate lagrangiane suggerite nel testo, le coordinate cartesiane dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 sono date da

$$\begin{aligned} P_1 &= (\sin \theta_1, 1 - \cos \theta_1), & P_2 &= (\sin \theta_2, 1 - \cos \theta_2), \\ P_3 &= (x_3, 0), & P_4 &= (x_4, 0), & P_5 &= (0, y), \end{aligned} \quad (60.5)$$

così che le corrispondenti velocità sono

$$\begin{aligned} v_1 &= (\cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \sin \theta_1 \dot{\theta}_1), & v_2 &= (\cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \sin \theta_2 \dot{\theta}_2), \\ v_3 &= (\dot{x}_3, 0), & v_4 &= (\dot{x}_4, 0), & v_5 &= (0, \dot{y}). \end{aligned}$$

L'energia cinetica (60.3) diventa quindi, per il sistema vincolato,

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{y}^2)$$

e l'energia potenziale è

$$\begin{aligned} V &= mg(1 - \cos \theta_1) + mg(1 - \cos \theta_2) + mgy + \frac{k}{2} \{ [x_3^2 + y^2] + [x_4^2 + y^2] \\ &\quad + [(\sin \theta_1 - x_3)^2 + (1 - \cos \theta_1)^2] + [(\sin \theta_2 - x_4)^2 + (1 - \cos \theta_2)^2] \}, \end{aligned}$$

che si può riscrivere, trascurando i termini costanti (cfr. l'osservazione 51.21),

$$V = mg(y - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + k(x_3^2 + x_4^2 + y^2 - x_3 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 - x_4 \sin \theta_2 - \cos \theta_2).$$

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - V = & \frac{m}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{y}^2) \\ & - mg(y - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) - k(x_3^2 + x_4^2 + y^2 - x_3 \sin \theta_1 - \cos \theta_1 - x_4 \sin \theta_2 - \cos \theta_2). \end{aligned}$$

Per ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolano le derivate parziali $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}$ e $\partial \mathcal{L} / \partial q$ e si pone $d/dt[\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}] = \partial \mathcal{L} / \partial q$, se q denota la generica coordinata lagrangiana. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= m\dot{\theta}_1, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} &= m\dot{\theta}_2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} &= m\dot{x}_3, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_4} &= m\dot{x}_4, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= -mg \sin \theta_1 + kx_3 \cos \theta_1 - k \sin \theta_1, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= -mg \sin \theta_2 + kx_4 \cos \theta_2 - k \sin \theta_2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} &= -2kx_3 + k \sin \theta_1, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} &= -2kx_4 + k \sin \theta_2, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= -2ky - mg, \end{aligned}$$

da cui si deduce

$$m\ddot{\theta}_1 = -mg \sin \theta_1 + kx_3 \cos \theta_1 - k \sin \theta_1, \quad (60.6a)$$

$$m\ddot{\theta}_2 = -mg \sin \theta_2 + kx_4 \cos \theta_2 - k \sin \theta_2, \quad (60.6b)$$

$$m\ddot{x}_3 = -2kx_3 + k \sin \theta_1, \quad (60.6c)$$

$$m\ddot{x}_4 = -2kx_4 + k \sin \theta_2, \quad (60.6d)$$

$$m\ddot{y} = -2ky - mg. \quad (60.6e)$$

60.2 Configurazioni di equilibrio

Le configurazioni di equilibrio sono i punti stazionari dell'energia potenziale (cfr. il teorema 58.6). Si devono quindi trovare i valori $(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y)$ tali che siano nulle le derivate

dell'energia potenziale V . Imponiamo perciò

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = mg \sin \theta_1 - kx_3 \cos \theta_1 + k \sin \theta_1 = 0, \quad (60.7a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = mg \sin \theta_2 - kx_4 \cos \theta_2 + k \sin \theta_2 = 0, \quad (60.7b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 2kx_3 - k \sin \theta_1 = 0, \quad (60.7c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_4} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_4} = 2kx_4 - k \sin \theta_2 = 0, \quad (60.7d)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2ky + mg = 0. \quad (60.7e)$$

La (60.7e) dà

$$y = -mg/2k := -y_0,$$

mentre dalla (60.7c) e dalla (60.7d) si ricavano le relazioni

$$2x_3 = \sin \theta_1, \quad 2x_4 = \sin \theta_2,$$

che, introdotte nelle prime due equazioni, danno due equazioni chiuse, rispettivamente per θ_1 e per θ_2 . Le due equazioni sono uguali, a meno dello scambio di θ_1 con θ_2 : è quindi sufficiente studiarne una. Consideriamo, per esempio, l'equazione per θ_1 :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\sin \theta_1}{2} [2(mg + k) - k \cos \theta_1] = 0$$

che, per essere soddisfatta, richiede $\sin \theta_1 = 0$, dal momento che l'equazione

$$\cos \theta_1 = \frac{2(mg + k)}{k}$$

non ammette soluzione poiché $2(mg + k) > k$. Quindi saranno possibili solo le soluzioni dell'equazione $\sin \theta_1 = 0$, che implica $\theta_1 = 0$ oppure $\theta_1 = \pi$. Analogamente la condizione di annullamento per la derivata di U rispetto a θ_2 porta a $\theta_2 = 0$ oppure $\theta_2 = \pi$.

In conclusione abbiamo quattro configurazioni di equilibrio:

$$(Q_1) \quad \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad y = -y_0, \quad (60.8a)$$

$$(Q_2) \quad \theta_1 = 0, \theta_2 = \pi, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad y = -y_0, \quad (60.8b)$$

$$(Q_3) \quad \theta_1 = \pi, \theta_2 = 0, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad y = -y_0, \quad (60.8c)$$

$$(Q_4) \quad \theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi, \quad x_3 = x_4 = 0, \quad y = -y_0, \quad (60.8d)$$

che corrispondono ad avere il punto P_5 alla quota $-y_0$, i punti P_3 e P_4 nell'origine, mentre ciascuno dei punti P_1 e P_2 può trovarsi o nell'origine o nel punto antipodale all'origine lungo la circonferenza.

60.3 Stabilità delle configurazioni di equilibrio

Per discutere la stabilità delle configurazioni di equilibrio trovate occorre studiare la matrice hessiana di V . Il sistema sotto studio è un sistema a 5 gradi di libertà. È tuttavia immediato notare che la lagrangiana si separa nella somma di tre lagrangiane indipendenti

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_1(\theta_1, x_3, \dot{\theta}_1, \dot{x}_3) + \mathcal{L}_2(\theta_2, x_4, \dot{\theta}_2, \dot{x}_4) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}), \quad (60.9)$$

dove

$$\mathcal{L}_1 = T_1 - V_1 = \frac{m}{2}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{x}_3^2) + mg \cos \theta_1 - k(x_3^2 - x_3 \sin \theta_1 - \cos \theta_1), \quad (60.10a)$$

$$\mathcal{L}_2 = T_2 - V_2 = \frac{m}{2}(\dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_4^2) + mg \cos \theta_2 - k(x_4^2 - x_4 \sin \theta_2 - \cos \theta_2), \quad (60.10b)$$

$$\mathcal{L}_3 = T_3 - V_3 = \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy - ky^2, \quad (60.10c)$$

con ovvio significato dei simboli. Quindi è sufficiente studiare i tre sistemi disaccoppiati così ottenuti e trovare i corrispondenti punti di equilibrio stabili e instabili. Inoltre, visto che la lagrangiana \mathcal{L}_2 si ottiene semplicemente da \mathcal{L}_1 per scambio di (θ_1, x_3) con (θ_2, x_4) , di fatto basta studiare le lagrangiane \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_3 .

Per \mathcal{L}_3 si ottiene

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} = 2k > 0,$$

da cui possiamo concludere che il punto $y = y_0$ è un punto di minimo per l'energia potenziale U_3 e quindi y_0 è una configurazione di equilibrio stabile per \mathcal{L}_3 .

Per \mathcal{L}_1 si ottiene

$$\mathcal{H}_{11}(\theta_1, x_3) := \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta_1^2} = mg \cos \theta_1 + k \cos \theta_1 + kx_3 \sin \theta_1,$$

$$\mathcal{H}_{12}(\theta_1, x_3) := \mathcal{H}_{21}(\theta_1, x_3) = \frac{\partial^2 V_1}{\partial \theta_1 \partial x_3} = -k \cos \theta_1,$$

$$\mathcal{H}_{22}(\theta_1, x_3) := \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} = 2k,$$

e quindi la matrice hessiana corrispondente è

$$\mathcal{H}(\theta_1, x_3) = \begin{pmatrix} mg \cos \theta_1 + k \cos \theta_1 + kx_3 \sin \theta_1 & -k \cos \theta_1 \\ -k \cos \theta_1 & 2k \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{H}(0, 0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix},$$

così che

$$\det \mathcal{H}(0, 0) = 2mgk + k^2 > 0, \quad \mathcal{H}_{11}(0, 0) = mg + k > 0,$$

quindi $(\theta_1, x_3) = (0, 0)$ è un punto di minimo per l'energia potenziale V_1 . Allo stesso modo

$$\mathcal{H}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} -mg - k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix},$$

così che

$$\det \mathcal{H}(\pi, 0) = -2mgk - 3k^2 < 0,$$

quindi $(\theta_1, x_3) = (\pi, 0)$ è un punto di sella per l'energia potenziale.

Ragionando analogamente per \mathcal{L}_2 si trova che l'unica configurazione di equilibrio stabile per \mathcal{L} è quella in cui ognuno dei tre sistemi lagrangiani \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 ammette configurazioni di equilibrio stabili, i.e.

$$(Q_1) \quad (\theta_1, x_3, \theta_2, x_4, y) = (0, 0, 0, 0, y_0), \quad y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (60.11)$$

mentre le altre tre possibili configurazioni di equilibrio, date da

$$(Q_2) \quad (\theta_1, x_3, \theta_2, x_4, y) = (\pi, 0, 0, 0, y_0), \quad y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (60.12a)$$

$$(Q_3) \quad (\theta_1, x_3, \theta_2, x_4, y) = (0, 0, \pi, 0, y_0), \quad y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (60.12b)$$

$$(Q_4) \quad (\theta_1, x_3, \theta_2, x_4, y) = (\pi, 0, \pi, 0, y_0), \quad y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (60.12c)$$

sono instabili.

60.4 Determinazione delle forze vincolari. Caso I

Nella configurazione (60.2), per trovare le forze vincolari che agiscono sul punto $P_3 = (x_3, y_3)$, si considerano le equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = f_x^{(3)} + R_x^{(3)}, \\ m\ddot{y}_3 = f_y^{(3)} + R_y^{(3)}, \end{cases}$$

dove $f^{(3)} = (f_x^{(3)}, f_y^{(3)})$ e $R^{(3)} = (R_x^{(3)}, R_y^{(3)})$ sono la forza attiva e la forze vincolare, rispettivamente, che agiscono sul punto P_3 . Per il principio di d'Alembert si ha $R_x^{(3)} = 0$, dal momento che la forza vincolare è ortogonale alla superficie di vincolo.

Tenendo conto del vincolo (cfr. le (60.5)), che comporta $P_3 = (x_3, y_3) = (x_3, 0)$, e dell'equazione del moto (60.6c), si ottiene

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = -2kx_3 + k \sin \theta_1, \\ m\ddot{y}_3 = 0. \end{cases} \quad (60.13)$$

In termini delle coordinate lagrangiane (60.5) la configurazione (60.2) è individuata da

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad y = y_0,$$

corrispondente alla situazione rappresentata in figura 12.3. Per calcolare le forze che agiscono sul punto P_3 in tale configurazione, occorre considerare le forze attive $f^{(3)}$. Isolando il contributo all'energia potenziale in (60.4) che dipende esplicitamente da x_3 e y_3 , i.e.

$$V = \frac{1}{2}k [(1 - x_3)^2 + (1 - y_3)^2 + x_3^2 + (y_3 - y_0)^2] + mgy_3 + \text{termini indipendenti da } x_3, y_3,$$

e calcolandone il gradiente, cambiato di segno, si trova

$$f_x^{(3)} = -\frac{\partial V}{\partial x_3} = -k [-(1 - x_3) + x_3], \quad (60.14a)$$

$$f_y^{(3)} = -\frac{\partial V}{\partial y_3} = -k [-(1 - y_3) + (y_3 - y_0)] - mg, \quad (60.14b)$$

che, calcolato in $(x_3, y_3) = (1, 0)$ dà

$$f_x^{(3)} = -kx_3 = -k, \quad (60.15a)$$

$$f_y^{(3)} = ky_0 + k - mg = -\frac{mg}{2} + k - mg = k - \frac{3mg}{2} \quad (60.15b)$$

Sempre nella configurazione considerata si ha (cfr. la (60.13))

$$m\ddot{x}_3 = -2kx_3 + k \sin \theta_1 = -2k + k = -k,$$

così che risulta

$$R_x^{(3)} = -f_x^{(3)} + m\ddot{x}_3 = k - k = 0,$$

che era ovvio *a priori*, come già anticipato, e

$$R_y^{(3)} = -f_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = \frac{3mg}{2} - k,$$

che dunque esprime la componente non nulla della forza vincolare che agisce sul punto P_3 .

60.5 Piano rotante

Se i punti P_1 e P_2 sono fissati come indicato al punto (4), poiché si può tener conto della forza centrifuga che agisce sui punti P_3 e P_4 attraverso l'introduzione di un'energia potenziale centrifuga della forma (cfr. l'esercizio 15)

$$V_{\text{cf}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 (x_3^2 + x_4^2), \quad (60.16)$$

la lagrangiana che descrive il sistema diventa

$$\mathcal{L} = T - V = m2 (\dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{y}^2) - [mgy + k(x_3^2 + x_4^2 + y^2 - x_3 + x_4) + V_{cf}], \quad (60.17)$$

così che si può scrivere

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_3, x_4, y, \dot{x}_3, \dot{x}_4, \dot{y}) = \mathcal{L}_1(x_3, \dot{x}_3) + \mathcal{L}_2(x_4, \dot{x}_4) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}), \quad (60.18)$$

dove

$$\mathcal{L}_1(x_3, \dot{x}_3) = \frac{m}{2} \dot{x}_3^2 - kx_3^2 + kx_3 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_3^2, \quad (60.19a)$$

$$\mathcal{L}_2(x_4, \dot{x}_4) = \frac{m}{2} \dot{x}_4^2 - kx_4^2 - kx_4 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_4^2, \quad (60.19b)$$

$$\mathcal{L}_3(y, \dot{y}) = \frac{m}{2} \dot{y}^2 - mgy - ky^2. \quad (60.19c)$$

Le configurazioni di equilibrio (relativo) sono date dalle soluzioni del sistema di equazioni

$$\frac{\partial V}{\partial x_3} = 2kx_3 - k - m\omega^2 x_3 = 0, \quad (60.20a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_4} = 2kx_4 + k - m\omega^2 x_4 = 0, \quad (60.20b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2ky + mg = 0. \quad (60.20c)$$

Si ha quindi una sola configurazione di equilibrio, data da

$$(Q) \quad x_3 = \frac{k}{\alpha}, \quad x_4 = -\frac{k}{\alpha}, \quad y = y_0 = -\frac{mg}{2k}, \quad (60.21)$$

purché

$$\alpha = 2k - m\omega^2 \neq 0.$$

Per discutere la stabilità occorre considerare le derivate seconde dell'energia potenziale dei tre sistemi lagrangiani indipendenti ottenuti. Si ha, rispettivamente,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = 2k - m\omega^2, \quad (60.22a)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_4^2} = 2k - m\omega^2, \quad (60.22b)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2k, \quad (60.22c)$$

dove $2k > 0$. Si vede che la configurazione di equilibrio trovata è stabile se $\alpha > 0$, i.e. se $2k > m\omega^2$, e instabile se $\alpha < 0$, i.e. se $2k < m\omega^2$.

Il caso $\alpha = 0$ va discusso a parte. Se $\alpha = 0$, l'energia potenziale diventa

$$V = -kx_3 + kx_4 + mgy + ky^2,$$

e quindi $\partial V/\partial x_3 = -k$ e $\partial V/\partial x_4 = k$, così che il sistema non ammette alcuna configurazione di equilibrio.

In conclusione, per $\alpha \neq 0$ esiste la configurazione di equilibrio (Q), instabile per $\alpha < 0$ e stabile per $\alpha > 0$, mentre per $\alpha = 0$ non esistono configurazioni di equilibrio.

60.6 Determinazione delle forze vincolari. Caso II

Per determinare le forze vincolari che agiscono sul punto P_3 , si considera, come nel §60.4,

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = f_x^{(3)} + R_x^{(3)}, \\ m\ddot{y}_3 = f_y^{(3)} + R_y^{(3)}, \end{cases}$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha $P_3 = (x_3, y_3) = (x_3, 0)$, con le notazioni (60.5).

Quello che cambia rispetto al caso precedente è che la forza ha ora anche un contributo $m\omega^2 x_3$ alla componente orizzontale (i.e. lungo l'asse x) dovuto alla forza centrifuga e la posizione del punto P_3 non è fissata a quota y_0 . Poiché per il principio di d'Alembert la forza vincolare è ortogonale al vincolo e la componente della forza nella direzione verticale non è modificata dalla forza centrifuga, ne concludiamo che, nella configurazione che stiamo considerando, la forza vincolare si calcola esattamente come nel §60.4.

Se inoltre notiamo che la componente $f_y^{(3)}$ della forza non dipende dalla posizione x_3 , otteniamo che la forza vincolare è, per ogni valore di x_3 , data da

$$R^{(3)} = (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, k - ky - mg).$$

Questo in ogni caso si può verificare esplicitamente notando che

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = -\frac{\partial V}{\partial x_3} = -2kx_3 + k + m\omega^2 x_3, \\ m\ddot{y}_3 = 0, \end{cases}$$

poiché y_3 è identicamente nullo, mentre, per le forze attive, derivando la (60.17) rispetto a x_3 e y_3 , rispettivamente, abbiamo

$$\begin{aligned} f_x^{(3)} &= -kx_3 + m\omega^2 x_3 - k(x_3 - 1) = -2kx_3 + m\omega^2 x_3 + k, \\ f_y^{(3)} &= ky + k - mg, \end{aligned}$$

così che il valore di $f_x^{(3)}$ dipende da x_3 ma non contribuisce alla forza vincolare, poiché $f_x^{(3)} = m\ddot{x}_3$, mentre

$$R_y^{(3)} = -f_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = mg - k - ky,$$

che è indipendente da x_3 .