

# FM410 Complementi di Meccanica Analitica

A.A. 2018/2019

Guido Gentile

## 1. Equazioni differenziali ordinarie: richiami e complementi

Richiami sulle equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee. Sistemi planari. Oscillatore armonico smorzato e forzato. Risonanze. Risonanza parametrica.

## 2. Analisi qualitativa e stabilità

Stabilità secondo Ljapunov. Punti di equilibrio stabili, instabili, attrattivi, asintoticamente stabili. Stabilità dell'origine per sistemi lineari planari. Stabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice del sistema linearizzato abbia tutti gli autovalori con parte reale strettamente negativa (dimostrazione nel caso diagonalizzabile). Instabilità di un punto d'equilibrio nel caso in cui la matrice del sistema linearizzato abbia almeno un autovalore con parte reale strettamente positiva (cenni della dimostrazione). Insiemi limite: definizione e proprietà. Teoremi sugli insiemi limite. Teorema di Ljapunov. Teorema di Barbašin-Krasovskij e sua applicazione all'oscillatore armonico e al pendolo semplice. Teorema di Dirichlet-Lagrange per sistemi meccanici conservativi. Cicli limite. Sistemi planari: teorema di Poincaré-Bendixson (solo enunciato) e sue applicazioni.

## 3. Alcuni sistemi dinamici planari notevoli

Sistemi planari che ammettono una costante del moto: studio delle curve di livello e delle traiettorie nel piano delle fasi. Sistemi predatore-preda ed equazioni di Lotka-Volterra: studio del sistema e dimostrazione delle leggi di Volterra. Sistemi gradiente: proprietà generali e studio delle traiettorie nel piano delle fasi. Equazione di Van Der Pol: descrizione del circuito e determinazione del ciclo limite globalmente attrattivo.

## 4. Vincoli e sistemi rigidi: richiami e complementi

Richiami sui sistemi rigidi: spazio delle configurazioni, caratteristiche cinematiche e caratteristiche dinamiche (equazioni cardinali). Richiami sull'operatore di inerzia: momenti principali di inerzia e assi di inerzia. Equazioni di Eulero per un sistema rigido con un punto fisso non sottoposto a forze: studio grafico del moto del momento angolare. Angoli di Eulero. Integrabilità di un sistema rigido con un punto fisso non sottoposto a forze.

## 5. Trottola di Lagrange

Definizione della trottola di Lagrange. Energia cinetica ed energia potenziale della trottola di Lagrange in termini degli angoli di Eulero, integrali primi ed energia potenziale efficace. Sistema ridotto della trottola di Lagrange: studio della dinamica al variare dei parametri del sistema. Pendolo sferico. Trottola di Lagrange in assenza di forze. Trottola addormentata e trottola veloce.

## 6. Meccanica hamiltoniana

Richiami sul formalismo hamiltoniano: hamiltoniana ed equazioni di Hamilton, matrici simplettiche, trasformazioni canoniche, trasformazioni simplettiche e trasformazioni che conservano la struttura canonica della equazioni. Parentesi di Poisson. Parentesi di Poisson e trasformazioni canoniche. Differenziale a tempo bloccato. Condizione di Lie. Condizione di Lie e trasformazioni canoniche. Funzioni generatrici e procedimenti per generare trasformazioni canoniche. Procedimenti di seconda specie. Trasformazione identità ed estensione di una trasformazione di coordinate a una trasformazione canonica.

## 7. Variabili azione-angolo

Equazione di Hamilton-Jacobi nel caso di trasformazioni indipendenti dal tempo. Separazione di variabili e sistemi separabili. Variabili azione-angolo in una dimensione. Caso dell'oscillatore armonico. Variabili azione-angolo in più dimensioni. Teorema di Liouville-Arnol'd (solo enunciato). Caso dei sistemi separabili. Variabili azione-angolo per il problema dei due corpi. Sistemi super-integrabili: esempio del problema dei due corpi.

## 8. Teoria delle perturbazioni al primo ordine

Vettori diofantei. Sistemi quasi-integrabili. Equazione di Hamilton-Jacobi e serie perturbative. Teoria perturbativa al primo ordine. Equazione omologica. Problemi di convergenza delle serie in dimensione qualsiasi. Primo teorema di trivialità di Poincaré. Sistemi isocroni. Condizione di anisocronia (o condizione di non degenerazione di Kolmogorov) e sistemi anisocroni.

## 9. Teoria delle perturbazioni a tutti gli ordini

Teoria perturbativa a tutti gli ordini per sistemi isocroni. Teorema di Nekhorošev per sistemi isocroni. Serie di Birkhoff. Controesempi alla convergenza delle serie di Birkhoff. Secondo teorema di trivialità di Poincaré.

## 10. Teorema KAM

Introduzione al teorema KAM: esperimento di Fermi-Pasta-Ulam e stabilità del sistema solare. Enunciato del teorema nel caso di hamiltoniane analitiche e strategia della dimostrazione. Primo passo della dimostrazione del teorema KAM: definizione della trasformazione canonica, stime della nuova hamiltoniana, blocco della frequenza, definizione del nuovo dominio di analiticità. Passo generale della dimostrazione del teorema KAM: procedimento iterativo e costruzione del toro invariante.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni.* (2018).  
 [2] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici. 2. Meccanica lagrangiana e hamiltoniana.* (2018).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica.* Editori Riuniti, (1979).  
 [4] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica.* Liguori Editore, (1996).  
 [5] A. FASANO & S. MARMI, *Meccanica analitica.* Bollati Boringhieri, (1994).  
 [6] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare.* Bollati-Boringhieri, (1980).  
 [7] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica.* Editori Riuniti, (1976).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO

**NOTA 1.** L'insegnamento nel Corso di Laurea in Fisica è diviso in due moduli (Modulo A e Modulo B, di 3 CFU ciascuno), che possono essere seguiti indipendentemente; i programmi del Modulo A e del Modulo B corrispondono ai punti 1-5 e, rispettivamente, 6-10 del programma sopra. Nei CdS in Matematica e in Scienze Computazionali i due moduli costituiscono un unico insegnamento di 7 CFU.

**NOTA 2.** L'esame consiste in un colloquio orale in cui lo studente dovrà discutere gli argomenti trattati a lezione, secondo quanto indicato nel diario delle lezioni. In riferimento alla prima parte dell'insegnamento (modulo A), si richiede lo svolgimento di almeno 5 dei seguenti esercizi del Cap. 5: 13, 16, 19, 21, 22, 24, 25, 31, 34, 43, 46, 47, 56, 58, 59 e 62. In riferimento alla seconda parte dell'insegnamento (modulo B), si richiede la discussione di uno dei seguenti argomenti: 1. equazioni di Eulero, 2. trottola di Lagrange, 3. variabili azione-angolo per il problema dei due corpi, 4. teorema di Nekhorošev per sistemi isocroni, 5. teorema KAM.