Se moltiplichiamo la seconda equazione per 2 e la sottraiamo alla seconda otteniamo

$$2\alpha - \frac{6}{5}\gamma - 2\alpha - 2\gamma = -\frac{16}{5}\gamma = 1 - 2 = -1,$$

i.e.

$$\gamma = \frac{5}{16}.$$

La terza equazione dà allora

$$\alpha = 1 - \gamma = \frac{11}{16},$$

e la prima dà

$$\beta = 1 + \frac{4}{5}\gamma = \frac{5}{4}.$$

La soluzione è pertanto

$$x_1(t) = [a_1 + b_1 t]\, \mathrm{e}^{2t} + c_1 \mathrm{e}^{-2t} = \frac{5}{4}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}, \tag{8.32a}$$

$$x_2(t) = [a_2 + b_2 t]\, \mathrm{e}^{2t} + c_2 \mathrm{e}^{-2t} = \left(\frac{11}{8} + \frac{5}{2}t\right)\mathrm{e}^{2t} - \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-2t}, \tag{8.32b}$$

$$x_3(t) = [a_3 + b_3 t]\, \mathrm{e}^{2t} + c_3 \mathrm{e}^{-2t} = \left(\frac{11}{16} + \frac{5}{4}t\right)\mathrm{e}^{2t} + \frac{5}{16}\mathrm{e}^{-2t}. \tag{8.32c}$$

**Osservazione 8.5** Dei tre metodi indicati per risolvere il sistema (8.21) dell'esempio 8.4 quello indicato come metodo 1 è forse il più lungo e laborioso. Ha comunque il vantaggio sia di essere estremamente sistematico sia, soprattutto, di fornire esplicitamente l'esponenziale dell'operatore lineare nella base in cui sono scritte le equazioni (cfr. la (8.26)). Se tuttavia si è interessati esclusivamente nell'espressione finale della soluzione $x(t)$, può essere più conveniente utilizzare, per esempio, il metodo 3, che risulta apprezzabilmente più semplice e rapido.

**Osservazione 8.6** Altri sistemi di equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine saranno discussi negli esercizi alla fine del capitolo (cfr. in particolare gli esercizi 13÷24).

## §9 Equazioni differenziali lineari di ordine qualsiasi

Finora abbiamo considerato il caso di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, i.e. in cui intervenga solo la derivata prima della funzione $x$ da trovare. Vogliamo ora vedere come si può ricondurre a tale caso il caso di equazioni differenziali lineari di ordine più alto. Consideremo esplicitamente il caso in cui $x$ sia una funzione reale; il caso in cui $x$ sia definita in uno spazio vettoriale $E$ di dimensione $\dim(E) > 1$ può essere discusso analogamente.

**Definizione 9.1** (EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI OMOGENEE DI ORDINE $n$). *Sia $E$ uno spazio vettoriale reale unidimensionale. Indicando con $x^{(j)}$ la derivata $j$-esima di $x$ rispetto al tempo, i.e.*

$$x^{(j)}(t) = \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} x(t), \qquad x^{(0)} = x, \qquad x^{(1)} = \dot{x}, \qquad x^{(2)} = \ddot{x}, \qquad \dots \tag{9.1}$$

*chiameremo*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0, \qquad x \in E, \tag{9.2}$$

*un'*equazione differenziale ordinaria lineare omogenea di ordine $n$ a coefficienti costanti.

**Proposizione 9.2** *L'equazione differenziale lineare di ordine $n$ (9.2) è equivalente a un sistema di $n$ equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine (6.1), in cui l'operatore $A$ è rappresentato dalla matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

*Dimostrazione.* Definiamo

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x}, \\ \quad \ldots \\ x_{n-1} = x^{(n-2)}, \\ x_n = x^{(n-1)}. \end{cases} \tag{9.4}$$

Si ha allora

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \quad \ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \ldots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1, \end{cases} \tag{9.5}$$

dove l'ultima riga è stata ottenuta dalle definizioni (9.4) e dalla (9.2). La (9.5) è un sistema lineare della forma (6.1), in cui la matrice $A$ è data dalla (9.3). ■

Sia $p_n(\lambda) := \det(A - \lambda \mathbb{1})$ il polinomio caratteristico dell'operatore lineare rappresentato dalla matrice $A$ in (9.3). Diremo che $p_n(\lambda)$ è il *polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea* (9.2).

**Teorema 9.3** *Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale* (9.2) *è dato da*

$$p_n(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right]. \tag{9.6}$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è per induzione su $n$. Se $n = 2$ un conto esplicito dà

$$p_2(\lambda) = -\lambda\,(-a_1 - \lambda) - (-a_2) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2.$$

Assumiamo che la (9.6) valga per $n-1$, i.e.

$$p_{n-1}(\lambda) = (-1)^{n-1}\left[\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1}\right],$$

e mostriamo che allora vale per $n$.

Se indichiamo con $A_n$ la matrice (9.3) per sottolinearne la dipendenza da $n$ e con $\mathbb{1}_n$ la matrice identità $n \times n$, abbiamo

$$A_n - \lambda\mathbb{1}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \ldots & A_{n-1} - \lambda\mathbb{1}_{n-1} \\ 0 & \\ -a_n & \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $A_n - \lambda\mathbb{1}_n$, calcolato sviluppando, per esempio, secondo la prima colonna, è

$$\det(A_n - \lambda\mathbb{1}_n) = -\lambda\, p_{n-1}(\lambda) - (-1)^{n-1}a_n = (-1)^n\left(\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda\right) + (-1)^n a_n,$$

che dimostra che la (9.6) vale anche per $n$. ■

**Osservazione 9.4** Il teorema 9.3 implica che il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale (9.2) può essere ricavato direttamente dall'equazione stessa, senza bisogno di passare esplicitamente al sistema di equazioni del primo ordine (9.5) e senza calcolare il determinante della matrice $A - \lambda\mathbb{1}$: è sufficiente considerare l'equazione algebrica che si ottiene dall'equazione differenziale (9.2) sostituendo ogni $x^{(j)}$, $j = 0, \ldots, n$, con $\lambda^j$ (il segno in evidenza in (9.6) è ovviamente irrilevante ai fini del calcolo degli zeri del polinomio caratteristico).

**Esempio 9.5** Si discuta l'equazione lineare del secondo ordine che descrive un oscillatore armonico di massa $m$ in presenza di attrito (*oscillatore armonico smorzato*):

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + m\omega^2 x = 0, \tag{9.7}$$

al variare dei parametri $\omega, \gamma > 0$. Il parametro $\gamma$ prende il nome di *coefficiente di attrito* (o *coefficiente di dissipazione*), in quanto il termine $\gamma\dot{x}$ rappresenta fisicamente l'azione dell'attrito, dovuto, per esempio, alla resistenza dell'aria. Se $\gamma = 0$ si ottiene l'equazione dell'*oscillatore armonico* con *costante elastica* $k = m\omega^2$ (cfr. §7.2).

*Discussione dell'esempio.* Poniamo per semplicità $m = 1$ e definiamo $\Gamma := \gamma/2$. L'equazione (9.7) si può riscrivere

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \gamma y, \end{cases}$$

così che gli autovalori della matrice corrispondente sono $\lambda_\pm = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2}$. Distinguiamo i casi $\Gamma > \omega$, $\Gamma = \omega$ e $\Gamma < \omega$.

- Se $\Gamma > \omega$ poniamo $\Omega := \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2}$, così che $\lambda_\pm = -\Gamma \pm \Omega$. In tal caso la soluzione è

  $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t} \left( a\,\mathrm{e}^{\Omega t} + b\,\mathrm{e}^{-\Omega t} \right), \tag{9.8}$$

  dove le costanti $a$ e $b$ dipendono dai dati iniziali. Si ha $\Omega < \Gamma$, quindi la soluzione (9.8) è combinazione lineare di due esponenziali descrescenti: $x(t)$ tende a zero monotonamente.

- Se $\Gamma = \omega$ la soluzione si può scrivere

  $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t} \left( at + b \right), \tag{9.9}$$

  dove le costanti $a$ e $b$ dipendono dai dati iniziali. Di nuovo la soluzione tende a zero (monotonamente per $t$ sufficientemente grande).

- Se $\Gamma < \omega$ poniamo $i\Omega := \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2}$, così che $\lambda_\pm = -\Gamma \pm i\Omega$. In tal caso la soluzione è

  $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t} \left( a\cos\Omega t + b\sin\Omega t \right), \tag{9.10}$$

  dove le costanti $a$ e $b$ dipendono dai dati iniziali. La soluzione (9.10) è dunque combinazione lineare di due funzioni oscillanti moltiplicate per un esponenziale descrescente: $x(t)$ tende a zero oscillando.

**Osservazione 9.6** Per $\gamma = 0$ l'equazione (9.7) diventa un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha autovalori $\lambda_\pm = \pm i\omega$. Tale sistema si riduce, attraverso il cambiamento di coordinate $(x, y) \mapsto (x, y/\omega)$, al sistema lineare con matrice (7.2b), con $a = 0$ e $b = -\omega$, a cui si applica l'analisi del §7.2. Se $\gamma > 0$ e $\Gamma < \omega$, di nuovo ci si riconduce allo stesso sistema, con $a \neq 0$. Infine, per $\gamma < 0$ valgono gli stessi risultati dell'esempio 9.5, purché si inverta il segno del tempo (i.e. il comportamento nel futuro diventa il comportamento nel passato e viceversa).