§10 Equazioni differenziali lineari non omogenee

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato solo il caso di equazioni differenziali lineari omogenee, i.e. della forma $\dot{x} = Ax$. Vogliamo ora vedere cosa succede se si considera il caso di equazioni differenziali lineari non omogenee, i.e. della forma $\dot{x} = Ax + B(t)$, dove $t \mapsto B(t)$ è una qualche funzione assegnata. Un ulteriore passo sarebbe considerare il caso in cui anche A dipende dal tempo, $A = A(t)$, ma, mentre la teoria sviluppata nei precedenti paragrafi permette di risolvere l'equazione $\dot{x} = Ax + B(t)$, a meno di piccole modifiche, al contrario lo studio dell'equazione $\dot{x} = A(t)x$ è assolutamente non banale. Anche nel caso in cui si facciano delle ipotesi sulla funzione $A(t)$ (per esempio che sia periodica), la teoria risulta essere molto più complicata e va oltre i nostri scopi (cfr. anche i commenti nel §14).

Definizione 10.1 (Equazioni differenziali ordinarie lineari non omogenee del primo ordine) *Siano E uno spazio vettoriale reale, A la matrice che rappresenta un operatore $T \in L(E)$ in una data base e $B\colon I \to E$ una funzione continua definita su $I \subset \mathbb{R}$. Chiameremo*

$$\dot{x} = Ax + B(t), \qquad x \in E, \tag{10.1}$$

un sistema di n equazioni differenziali ordinarie lineari non omogenee del primo ordine a coefficienti costanti *o semplicemente un'*equazione (vettoriale) differenziale ordinaria lineare non omogenea del primo ordine a coefficienti costanti.

Definizione 10.2 (Soluzione generale di un'equazione differenziale lineare non omogenea) *Si chiama* soluzione generale *dell'equazione* (10.1) *l'insieme di tutte le soluzioni di* (10.1) *che si ottengono al variare dei dati iniziali.*

Osservazione 10.3 L'equazione (10.1) è un'equazione differenziale *non autonoma*, i.e. in cui il membro di destra dipende esplicitamente dal tempo (cfr. la definizione 11.6 più avanti).

Teorema 10.4 *Sia E uno spazio vettoriale reale e siano A un operatore lineare in E e $B:$ $I \to E$ una funzione continua definita su $I \subset \mathbb{R}$. Considerato il sistema* (10.1) *con condizioni iniziali*

$$x(t_0) = x_0,$$

esiste ed è unica la soluzione, data da

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-A(s-t_0)} B(s) \right]. \tag{10.2}$$

Inoltre tale soluzione è definita per ogni tempo $t \in I$.

Dimostrazione. Cerchiamo la soluzione dell'equazione (10.1) nella forma

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} c(t), \tag{10.3}$$

dove $c : I \to E$ è una funzione differenziabile da determinare. Poiché l'operatore $\mathrm{e}^{A(t-t_0)}$ è invertibile, l'espressione (10.3) ha senso e quindi possiamo sempre scrivere in questa forma un'eventuale soluzione della (10.1).

Per derivazione esplicita, utilizzando il lemma 6.3 per la regola di derivazione dell'esponenziale, troviamo

$$\dot{x}(t) = A\,\mathrm{e}^{A(t-t_0)} c(t) + \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \dot{c}(t),$$

che possiamo eguagliare al membro di destra della (10.1). Otteniamo dunque

$$A\,\mathrm{e}^{A(t-t_0)} c(t) + \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \dot{c}(t) = Ax(t) + B(t) = A\,\mathrm{e}^{A(t-t_0)} c(t) + B(t),$$

ovvero

$$\mathrm{e}^{A(t-t_0)} \dot{c}(t) = B(t),$$

che permette di scrivere

$$\dot{c}(t) = \mathrm{e}^{-A(t-t_0)} B(t). \tag{10.4}$$

Integrando la (10.4) troviamo

$$c(t) = K + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-A(s-t_0)} B(s),$$

dove $K \in E$ è una costante di integrazione. Quindi

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \left[K + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-A(s-t_0)} B(s) \right]. \tag{10.5}$$

Si verifica facilmente che l'espressione così trovata è effettivamente una soluzione della (10.1), con condizioni iniziali x_0, purché si scelga $K = x_0$. Infatti derivando la (10.5) si ha

$$\dot{x}(t) = B(t) + A\mathrm{e}^{A(t-t_0)} \left[K + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-A(s-t_0)} B(s) \right] = B(t) + Ax(t)$$

e si ha ovviamente

$$x(t_0) = K.$$

Che tale soluzione sia unica si verifica immediatamente, ragionando per assurdo. Supponiamo che esista una soluzione $y(t)$, diversa da $x(t)$. Se definiamo $z(t) = x(t) - y(t)$, si ha allora

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t) = A\left(x(t) - y(t)\right) = Az(t),$$

che è un sistema lineare omogeneo. Per il teorema 6.5 esiste ed è unica la soluzione e ha la forma $z(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} z_0$ se la condizione iniziale è $z(t_0) = z_0$. Ma per costruzione $z_0 = 0$ (poiché le due soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ hanno le stesse condizioni iniziali), così che $z(t) = 0$ per ogni t per cui la soluzione sia definita. Ne segue che deve essere $y(t) = x(t)$, contro l'ipotesi che le due soluzioni fossero distinte.

La soluzione è della forma (10.2) per tutti i valori di t per cui è definita: l'unica quantità che non è definita ovunque è la funzione $B(s)$ nell'integrando, con $t_0 \leq s \leq t$. Quindi deve essere $t \in I$: ne concludiamo che la soluzione è definita per ogni $t \in I$. ■

Osservazione 10.5 Il metodo che è stato seguito nella dimostrazione del teorema 10.4 per trovare la soluzione nella forma (10.3) prende il nome di *metodo di variazione delle costanti*. Infatti se $B(t) = 0$ allora la soluzione è della forma (10.3) con $c(t) = c$ costante; se $B(t) \neq 0$ si cerca una soluzione della stessa forma, ma con $c(t)$ non costante.

Osservazione 10.6 Si noti che se la funzione B è definita sull'intero asse reale, i.e. $B \colon \mathbb{R} \to E$, allora la soluzione (10.2) è una soluzione globale (nel tempo).

Definizione 10.7 (Equazione differenziale ordinaria lineare omogenea associata) *Data un'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea* (10.1)*, definiamo* equazione differenziale ordinaria lineare omogenea associata *alla* (10.1) *l'equazione che si ottiene dalla* (10.1) *sostituendo* $B(t)$ *con* 0.

Corollario 10.8 *Sia* $u(t)$ *una soluzione particolare dell'equazione differenziale ordinaria lineare non omogenea* (10.1)*. Allora ogni soluzione della* (10.1) *si può scrivere nella forma*

$$x(t) = u(t) + v(t), \tag{10.6}$$

dove $v(t)$ *è la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea associata.*

Dimostrazione. Possiamo riscrivere la (10.2) nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + \mathrm{e}^{A(t-t_0)} x_0, \\ u(t) &= \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \int_0^t \mathrm{d}s \, \mathrm{e}^{-A(s-t_0)} B(s), \end{aligned}$$

dove $u(t)$ risolve la (10.1) con condizioni iniziali $x(0) = 0$, mentre $v(t) := \mathrm{e}^{A(t-t_0)} x_0$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{x} = Ax$ con condizioni iniziali $x(0) = x_0$. ■

Osservazione 10.9 La (10.6) costituisce la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea (10.1) (cfr. la definizione 10.2). Possiamo enunciare il corollario 10.8 dicendo che la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea si ottiene sommando una soluzione particolare alla soluzione generale dell'equazione differenziale lineare omogenea associata.

Osservazione 10.10 Se in (10.1) la matrice A è non singolare ($\det A \neq 0$) e il vettore $B(t)$ è costante ($B(t) = B$), allora si possono applicare i risultati del §6 per trovare la soluzione. Basta infatti porre

$$\begin{cases} u := A^{-1}B, \\ y = x + u, \end{cases}$$

dove l'inversa di A è ben definita se il suo determinante è non nullo, per portare l'equazione $\dot{x} = Ax + B$, con dati iniziali $x(t_0) = x_0$, nella forma $\dot{y} = Ay$, con dati iniziali $y(t_0) = x_0 + A^{-1}B =: y_0$. Quindi la soluzione è $y(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}y_0$, che, espressa in termini delle coordinate originali, diventa

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)}x_0 + \left(\mathrm{e}^{A(t-t_0)} - \mathbb{1}\right) A^{-1}B = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}s \, \mathrm{e}^{-A(s-t_0)}B\right], \tag{10.7}$$

che è esattamente la (10.2) nel caso in cui B sia costante. Si noti che, mentre l'espressione intermedia nella (10.7) è definita solo se la matrice A è invertibile, al contrario l'espressione a destra ha senso sempre. Come mostra *a posteriori* il teorema 10.4, il risultato finale nella forma (10.2) è sempre valido. Invece, la dimostrazione che passa attraverso l'introduzione della variabile u e la formula intermedia della (10.7) è giustificata solo nel caso in cui la matrice A sia non singolare.

Esempio 10.11 Si studi l'equazione differenziale lineare del secondo ordine in $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = \cos\omega_0 t, \tag{10.8}$$

al variare dei parametri $\omega, \omega_0 > 0$ e $\gamma \geq 0$ (cfr. anche gli esercizi 32÷36). Tale equazione descrive un oscillatore armonico forzato in presenza di attrito (*oscillatore armonico forzato smorzato*).

Discussione dell'esempio. Si consideri prima il caso $\gamma > 0$. Si cerca la soluzione $x(t)$ nella forma $x(t) = u(t) + v(t)$, dove $v(t)$ risolve l'equazione differenziale lineare omogenea associata, i.e. $\ddot{v} + \gamma\dot{v} + \omega^2 v = 0$, e $u(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione $v(t)$ è data dalla (9.8) se $\gamma > 2\omega$, dalla (9.9) se $\gamma = 2\omega$ e dalla (9.10) se $\gamma < 2\omega$. Si cerca la soluzione particolare $u(t)$ nella forma $u(t) = \alpha\cos\omega_0 t + \beta\sin\omega_0 t$. Imponendo che u risolva l'equazione (10.8) si trovano le relazioni

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\beta = \gamma\omega_0\alpha, \qquad \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\alpha + \gamma\omega_0\beta = 1,$$

che risolte fissano i coefficienti

$$\alpha = \alpha_0 := \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega_0^2}, \qquad \beta = \beta_0 := \frac{\gamma\omega_0}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2\omega_0^2}, \tag{10.9}$$

che risultano ben definiti per ogni valore di ω, ω_0 e γ, purché $\gamma > 0$. Quindi la soluzione generale dell'equazione (10.8) è della forma $x(t) = v(t) + \alpha_0 \cos \omega_0 t + \beta_0 \sin \omega_0 t$.

Si consideri ora il caso $\gamma = 0$. Si ragiona in modo analogo. In particolare, se $\omega_0 \neq \omega$, i coefficienti α_0 e β_0 in (10.9) risultano ancora ben definiti, quindi la soluzione generale è ancora della forma $x(t) = v(t) + \alpha_0 \cos \omega_0 t + \beta_0 \sin \omega_0 t$, con $v(t)$ soluzione dell'equazione omogenea associata (così che $v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, con A, B costanti). Se invece $\omega_0 = \omega$, si cerca la soluzione particolare nella forma $u(t) = \alpha t \cos \omega t + \beta t \sin \omega t$. Imponendo di nuovo che u risolva l'equazione (10.8) si trovano le relazioni

$$\alpha = \alpha_1 := 0, \qquad \beta = \beta_1 := \frac{1}{2\omega}, \tag{10.10}$$

da cui si ottiene $x(t) = v(t) + (2\omega)^{-1} t \sin \omega t$.

Osservazione 10.12 La discussione dell'esempio 10.11 si può generalizzare al caso in cui $\cos \omega_0 t$ sia sostituito da una qualsiasi funzione $f(\omega_0 t)$, dove f è una funzione *periodica* di classe C^∞, di periodo 2π nel suo argomento, i.e. tale che $f(t + 2\pi) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (cfr. gli esercizi 34÷36).

Nota bibliografica Come nel capitolo precedente anche in questo, tranne che per il §8, abbiamo seguito essenzialmente [Hirsh & Smale, Capp. 3÷6].

Per il teorema di Rolle e il teorema di Lagrange (cfr. gli esercizi 3 e 4) si veda [Giusti-1, Cap. 4], per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (per serie convergenti uniformemente), discusso nell'esercizio 8 e utilizzato nella dimostrazione del lemma 6.3, si veda [Rudin, Cap. 7], mentre per definizioni e proprietà delle curve rimandiamo, per esempio, a [Giusti-2, Cap. 7]. Infine, per un'introduzione alle serie di Fourier (utilizzate negli esercizi 34 e 35), si veda per esempio [Giusti-2, Cap. 14].

Esercizi

Esercizio 1 Una funzione $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ si dice *derivabile* (o *differenziabile*) in $c \in (\alpha, \beta)$ se esiste il limite

$$\dot{f}(c) := \lim_{t \to c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c},$$

che prende il nome di *derivata* di f in c, e derivabile in (α, β) se è derivabile in ogni $t \in (\alpha, \beta)$ (cfr. l'esercizio 23 del capitolo 1, rispetto al quale stiamo considerando funzioni di variabile reale e indicando la derivata con un punto invece che con l'apice). Si dimostri che se f è derivabile in (α, β) e $c \in (\alpha, \beta)$ è un punto di massimo o di minimo per f, allora c è un *punto critico*, i.e. tale che $\dot{f}(c) = 0$.
[*Soluzione*. Se c è un punto di massimo per f si ha $f(t) \leq f(c)$ $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Poiché f è derivabile si ha

$$\dot{f}(c) = \lim_{t \to c^+} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \lim_{t \to c^-} \frac{f(t) - f(c)}{t - c},$$