Esercizio 31 Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con condizioni iniziali $x(0) = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$. Si trovi la soluzione $x(t)$. [*Soluzione.* Usando l'identità $A^2 = 3A$ si dimostri per induzione che $A^k = 3^{k-1}A$ $\forall k \geq 1$ (cfr. anche l'esercizio 49 del capitolo 1). Quindi $\mathrm{e}^A = \mathbb{1} + 3^{-1}(\mathrm{e}^{3t} - 1)A$, da cui si ricava

$$x_k(t) = x_{0k} + \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{3t} - 1)(x_{01} + x_{02} + x_{03})$$

per $k = 1, 2, 3$.]

Esercizio 32 Si dimostri che per $\gamma > 0$ le soluzioni dell'equazione (10.8) tendono asintoticamente all'unica soluzione periodica di periodo $T = 2\pi/\omega$. [*Soluzione.* Discende dalla discussione dell'esempio 10.11, tenendo conto che $v(t) \to 0$ per $t \to +\infty$. In particolare la soluzione asintotica è data da $\alpha_0 \cos\omega_0 t + \beta_0 \sin\omega_0 t$, con le costanti α_0 e β_0 della (10.9).]

Esercizio 33 Si dimostri che per $\gamma = 0$ le soluzioni dell'equazione (10.8) si mantengono limitate se e solo se $\omega_0 \neq \omega$. La condizione $\omega_0 = \omega$ prende il nome di *risonanza.* [*Soluzione.* Per $\gamma = 0$, se $\omega_0 \neq \omega$, la soluzione generale dell'equazione è della forma $x(t) = v(t) + \alpha_0 \cos\omega_0 t + \beta_0 \sin\omega_0 t$, con $v(t) = A\cos\omega t + B \sin\omega t$ (con A e B dipendenti dalle condizioni iniziali) e le costanti α_0 e β_0 come nella discussione dell'esempio 10.11, con $\gamma = 0$; il moto è quindi oscillatorio e *a fortiori* limitato. Se invece $\omega_0 = \omega$ allora la soluzione è della forma $x(t) = v(t) + (2\omega)^{-1} t \sin\omega t$ (cfr. di nuovo la discussione dell'esempio 10.11), con $v(t)$ come nel caso precedente; quindi le oscillazioni hanno ampiezza che cresce linearmente nel tempo.]

Esercizio 34 Per $\gamma \neq 0$ oppure $\gamma = 0$ e $\omega_0 \notin \omega\mathbb{N}$, si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale lineare in $\mathbb{R}$ data da $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = f(\omega_0 t)$, dove $f(t)$ è una funzione C^∞ periodica di periodo 2π in t. [*Soluzione.* La funzione $f(\omega_0 t)$ è periodica in t di periodo $T = 2\pi/\omega_0$. Poiché è di classe C^∞, si può sviluppare in *serie di Fourier* e si la serie di Fourier converge uniformemente – in realtà basta che la funzione sia *regolare a tratti*, i.e. che sia continua tranne che in un numero finito di punti e derivabile tranne che in un numero finito di punti, in cui esistono comunque i limiti destro e sinistro della derivata (cfr. la nota bibliografica). Si ha quindi

$$f(\omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \mathrm{e}^{ik\omega_0 t}, \qquad f_{-k} = \overline{f_k},$$

dove i numeri f_k prendono il nome di *coefficienti di Fourier.* La condizione $f_{-k} = \overline{f_k}$ (con $\overline{f_k}$ che indica il complesso coniugato di f_k) segue dal fatto che f è reale. Se $\gamma \neq 0$, oppure se $\gamma = 0$ e $\omega_0 \neq \omega$, possiamo cercare una soluzione particolare v dell'equazione $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = f(\omega_0 t)$ nella forma di una serie di Fourier,

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_k \mathrm{e}^{ik\omega_0 t}, \qquad v_{-k} = \overline{v_k}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Introducendo le espansioni in serie di Fourier per f e v nell'equazione ed eguagliando i coefficienti di Fourier troviamo le relazioni

$$\left(-k^2\omega_0^2 + i\gamma\omega_0 k + \omega^2\right) v_k = f_k, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad \Longrightarrow \qquad v_k = \frac{f_k}{\omega^2 - k^2\omega_0^2 + i\gamma\omega_0 k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sotto le condizioni assunte sui parametri, il denominatore nell'espressione per v_k è sempre diverso da zero, così che i coefficienti v_k sono ben definiti per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e la condizione $v_{-k} = \overline{v_k}$ risulta automaticamente soddisfatta per ogni $k \in \mathbb{Z}$; in particolare per $k = 0$ si ha $v_0 = f_0/\omega^2$. In conclusione la soluzione particolare è la funzione periodica

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{f_k}{\omega^2 - k^2\omega_0^2 + i\gamma\omega_0 k} \mathrm{e}^{ik\omega_0 t},$$

e quindi la soluzione generale è della forma $x(t) = u(t) + v(t)$, con $u(t)$ soluzione dell'equazione omogenea associata. (È immediato verificare che per $f_{\pm 1} = 1/2$ e $f_k = 0$ per $|k| \neq 1$, ritroviamo i risultati discussi nella discussione dell'esempio 10.11 e negli esercizi 32÷33).]

Esercizio 35 Si discuta l'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = f(\omega t)$, con f come nell'esercizio 34. Si dimostri in particolare che, se i coefficienti di Fourier $f_{\pm 1}$ di f non sono nulli, le soluzioni sono illimitate. [*Soluzione.* Si cerca la soluzione particolare nella forma

$$v(t) = \alpha t \mathrm{e}^{i\omega t} + \bar{\alpha} t \mathrm{e}^{-i\omega t} + \sum_{|k| \neq 1} v_k \mathrm{e}^{ik\omega t}, \qquad v_{-k} = \overline{v_k}.$$

Imponendo che $v(t)$ risolva l'equazione si arriva a

$$\alpha \left(2i\omega - \omega^2 t + \omega^2 t\right) \mathrm{e}^{i\omega t} + \bar{\alpha} \left(-2i\omega - \omega^2 t + \omega^2 t\right) \mathrm{e}^{-i\omega t} + \sum_{|k| \neq 1} \left(-(\omega k)^2 + \omega^2\right) v_k \mathrm{e}^{ik\omega t} = \sum_k f_k \mathrm{e}^{ik\omega t},$$

da cui si ricava, eguagliando i coefficienti di Fourier,

$$v_k = \frac{f_k}{\omega^2(1 - k^2)}, \quad |k| \neq 1, \qquad \alpha = \frac{f_1}{2i\omega}.$$

Ne segue che, se $f_1 \neq 0$, la soluzione particolare, e quindi anche la soluzione generale, diverge linearmente.]

Esercizio 36 Si discuta l'equazione $\ddot{x} + \omega^2 x = f(\omega_0 t)$, con f come nell'esercizio 34, se $\omega_0 = k\omega$ con $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 37 Si trovi la soluzione del sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \ldots + x_n, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

con dato iniziale $x_k(0) = 1$ $\forall k = 1, \ldots, n$. [*Soluzione.* Definiamo $X := x_1 + \ldots + x_n$. Si ha $\dot{X} = nX$, che, integrata, dà $X(t) = \mathrm{e}^{nt} X(0) = \mathrm{e}^{nt} n$. Quindi, per $k = 1, \ldots, n$, si ha $\dot{x}_k = X(t) = \mathrm{e}^{nt} n$, che di nuovo si integra immediatamente e implica $x_k(t) = \mathrm{e}^{nt} x(0) = \mathrm{e}^{nt}$.]