Si vede che, comunque venga scelto $\bar{\theta}$, si ha $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t,\bar{\theta})=0$, quindi $\theta=0$ è attrattivo (e il suo bacino d'attrazione è $\mathbb{T}$). Tuttavia si vede anche che comunque sia scelto $\varepsilon>0$ è possibile trovare $\delta>0$ tale che, se $\bar{\theta}\in(-\delta,0)\subset B_\delta(0)$, allora esiste un tempo finito $t_1$ tale che $\varphi(t_1,\bar{\theta})\notin B_\varepsilon(0)$. Quindi $\theta=0$ non è stabile.

**Definizione 17.12** (Insieme limite) *Dato $x\in\mathbb{R}^n$, definiamo l'*insieme $\omega$-limite *di $x$ come l'insieme*

$$L_\omega(x):=\{y\in\mathbb{R}^n\ :\ \exists t_1\le t_2\le\ldots\le t_k\to+\infty \text{ tale che } \lim_{k\to\infty}|\varphi(t_k,x)-y|=0\},$$

*dove $\{t_k\}$ è una successione monotona di tempi che tende a $+\infty$. Analogamente definiamo l'*insieme $\alpha$-limite *di $x$ come l'insieme*

$$L_\alpha(x):=\{y\in\mathbb{R}^n\ :\ \exists t_1\ge t_2\ge\ldots\ge t_k\to-\infty \text{ tale che } \lim_{k\to\infty}|\varphi(t_k,x)-y|=0\},$$

*dove $\{t_k\}$ è una successione monotona di tempi che tende a $-\infty$.*

**Esempio 17.13** Esempi di insiemi limite per sistemi dinamici (17.1) sono i punti di equilibrio asintoticamente stabili nella definizione 17.10 e i cicli limite che saranno definiti più avanti (cfr. la definizione 21.10). Se la traiettoria che parte da un punto $x$ è periodica, ogni punto lungo la traiettoria, e quindi l'orbita stessa contenente $x$, appartiene all'insieme $\omega$-limite e all'insieme $\alpha$-limite di $x$.

Ricordiamo ora alcuni risultati elementari di analisi che saranno utilizzati nel seguito (cfr. anche la nota bibliografica).

**Lemma 17.14** *Date due successioni reali positive $\{t_k\}$ e $\{a_k\}$, la prima monotona divergente, esiste sempre una sottosuccessione $\{t_{k_j}\}$ di $\{t_k\}$, monotona divergente e tale che $|t_{k_{j+1}}-t_{k_j}|>a_j\ \forall j\in\mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Si definisce la sottosuccessione $\{\tau_j\}:=\{t_{k_j}\}$ ricorsivamente come segue. Si fissa $\tau_1\in\{t_k\}$ arbitrariamente. Dato $\tau_j$, $j\ge1$, si pone $\tau_{j+1}=\min_{k\in\mathbb{N}}\{t_k : t_k>\tau_j+a_j\}$. La definizione è ben posta poiché, per definizione di limite, per ogni $M>0$ esiste $k_0$ tale che si ha $t_k>M\ \forall k>k_0$: fissato $j$ basta scegliere $M=\tau_j+a_j$. La sottosuccessione $\{\tau_j\}$ è divergente perché è estratta da una successione divergente (cfr. l'esercizio 10 del capitolo 1). ∎

**Corollario 17.15** *Data una successione reale $\{t_k\}$ monotona divergente, per ogni $a>0$ esiste una sottosuccessione $\{t_{k_j}\}$ monotona divergente tale che $|t_{k_{j+1}}-t_{k_j}|>a\ \forall j\in\mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Si scelga $a_k=a\ \forall k$ nel lemma 17.14. ∎

**Lemma 17.16** *Date due successioni reali monotone divergenti $\{t_k\}$ e $\{s_k\}$, esistono sempre due sottosuccessioni $\{s_{k_j}\}$ e $\{t_{k_j}\}$ tali che $t_{k_j}<s_{k_j}<t_{k_{j+1}}\ \forall j\in\mathbb{N}$.*

*Dimostrazione.* Definiamo ricorsivamente le due sottosuccessioni $\{\tau_j\} = \{t_{k_j}\}$ e $\{\sigma_j\} = \{s_{k_j}\}$ nel modo seguente. Si fissa $\tau_1$ arbitrariamente. Dato $\tau_j$, $j \geq 1$, poniamo

$$\sigma_j = \min_{k \in \mathbb{N}} \{s_k : s_k > \tau_j\}, \qquad \tau_{j+1} = \min_{k \in \mathbb{N}} \{t_k : t_k > \sigma_j\}.$$

Tali definizioni hanno senso poiché le due successioni monotone $\{t_k\}$ e $\{s_k\}$ divergono, così che le sottosuccessioni $\{\tau_j\}$ e $\{\sigma_j\}$ sono entrambe divergenti perché estratte da successioni divergenti (cfr. l'esercizio 10 del capitolo 1). ■

Gli insiemi limite godono di alcune semplici proprietà, che saranno utili nel seguito. Le enunceremo (e dimostreremo) nel caso degli insiemi $\omega$-limite; i risultati valgono in ogni caso anche per gli insiemi $\alpha$-limite (e le dimostrazioni sono del tutto analoghe).

**Teorema 17.17** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, se $L_\omega(x)$ è non vuoto, allora $L_\omega(x)$ è chiuso.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che se $\{y_n\}$ è una successione di punti $y_n \in L_\omega(x)$ che converge a un punto $y$, allora $y \in L_\omega(x)$ (cfr. l'esercizio 11 del capitolo 1). Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0$ tale che, per ogni $n > n_0$, si ha $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Per ogni $n$, per definizione di insieme $\omega$-limite, esiste una successione divergente $\{t_k^{(n)}\}$ tale che, comunque si fissi $\varepsilon > 0$, esiste $k_0(n)$ tale che, per ogni $k > k_0(n)$, si ha $|\varphi(t_k^{(n)}, x) - y_n| < \varepsilon/2$. Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0$ tale che, per ogni $n > n_0$ e per ogni $k > k_0(n)$, si ha $|\varphi(t_k^{(n)}, x) - y| \leq |\varphi(t_k^{(n)}, x) - y_n| + |y_n - y| < \varepsilon$. Poiché il valore di $k$ dipende da $n$, la successione $\{\tau_n\} = \{t_k^{(n)}\}$ definisce una successione divergente; prendendo eventualmente una sottosuccessione di $\tau_n$ otteniamo una successione crescente che tende all'infinito. ■

**Teorema 17.18** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, se $L_\omega(x)$ è non vuoto, allora $L_\omega(x)$ è invariante.*

*Dimostrazione.* Sia $y \in L_\omega(x)$ e sia $\{t_k\}$ la successione di tempi tali che $|\varphi(t_k, x) - y| \to 0$ per $k \to \infty$. Consideriamo la successione $\varphi(t_k + t, x)$: si ha $\varphi(t_k + t, x) = \varphi(t, \varphi(t_k, x))$, che implica, per il teorema 12.3 (teorema della dipendenza continua dai dati iniziali), che $|\varphi(t_k + t, x) - \varphi(t, y)| \to 0$ per $k \to \infty$, così che esiste una successione $\{\tau_k\} = \{t_k + t\}$ tale che $|\varphi(\tau_k, x) - \varphi(t, y)| \to 0$ per $k \to \infty$. Quindi $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$. ■

**Definizione 17.19** (INSIEME CONNESSO) *Sia $E$ uno spazio euclideo. Un insieme $S \subset E$ si dice* connesso *se non esistono in $E$ due insiemi aperti $A$ e $B$ disgiunti (i.e. tali che $A \cap B = \emptyset$) tali che $S \subset A \cup B$.*

**Teorema 17.20** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, se $L_\omega(x)$ è non vuoto e limitato, allora $L_\omega(x)$ è connesso.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo preliminarmente che se $L_\omega(x)$ è limitato il moto $\varphi(t, x)$ si mantiene in una regione limitata, i.e. esiste un compatto $B$ tale che $\varphi(t, x) \in B$ $\forall t > 0$.

La dimostrazione si può fare per assurdo. Introduciamo alcune notazioni: sia $A(r)$ la chiusura dell'intorno $B_r(y)$ di raggio $r$ e centro in $y$, i.e. $A(r) := \overline{B_r(y)}$. Scegliamo $R$ tale che $L_\omega(x) \subset A(R)$ (questo è possibile poiché $L_\omega(x)$ è limitato per ipotesi). Consideriamo gli insiemi $A(R+\varepsilon)$ e $A(R+2\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, e poniamo $\mathcal{D}_\varepsilon := A(R+2\varepsilon) \setminus A(R+\varepsilon)$.

Fissato $y \in L_\omega(x)$, per definizione di insieme $\omega$-limite, esiste una successione divergente $\{t_k\}$ tale che $\varphi(t_k, x) \to y$. Poiché stiamo assumendo che, comunque si fissi un compatto $B$, esiste un tempo $t$ tale che $\varphi(t,x) \notin B$, ne segue che, per ogni $t_k$ , deve esistere $T_k > 0$ tale che $\varphi(t_k+T_k, x) \in \mathcal{D}_\varepsilon$. Se così non fosse, allora esisterebbe $\bar{k}$ tale che $\varphi(t_{\bar{k}}+t, x) \in A(R+\varepsilon)$ per ogni $t \geq 0$. Allora, poiché $[0, t_{\bar{k}}]$ è compatto (in $\mathbb{R}$), definendo $M = \max\{|\varphi(t,x)-y| : t \in [0, t_{\bar{k}}]\}$, si avrebbe $\varphi(t,x) \in A(M)$ per $t \in [0, t_{\bar{k}}]$ e $\varphi(t,x) \in A(R+\varepsilon)$ per ogni $t \geq t_{\bar{k}}$, e, di conseguenza, $\varphi(t,x) \in A(\rho)$, con $\rho = \max\{M, R+\varepsilon\}$, per ogni $t > 0$. Scegliendo $B = A(\rho)$, si avrebbe $\varphi(t,x) \in B$ $\forall t > 0$, contro l'assunzione fatta.

Definiamo $\tau_k = t_k + T_k$; passando eventualmente a una sottosuccessione, la successione $\{\tau_k\}$ è crescente (per il lemma 17.14) e tende all'infinito. Inoltre si ha $\varphi(\tau_k, x) \in \mathcal{D}_\varepsilon$ per costruzione. D'altra parte, poiché $\mathcal{D}_\varepsilon \subset A(R+2\varepsilon)$, si può estrarre da $\{\tau_k\}$ un'ulteriore sottosuccessione $\{\tau_{k_j}\}$ tale che esiste il limite $y_0 := \lim_{j\to\infty} \varphi(\tau_{k_j}, x)$, così che si deve avere $y_0 \in L_\omega(x)$ e $y_0 \in \overline{\mathcal{D}_\varepsilon}$. Poich'e questo contraddice l'ipotesi che fosse $L_\omega(x) \subset A(R)$, si è trovato un assurdo. In conclusione, $\varphi(t,x)$ deve rimanere all'interno di $A(R+\varepsilon)$ per ogni $t$ sufficientemente grande e quindi esiste un compatto $B$ tale che $\varphi(t,x) \in B$ per ogni $t \geq 0$.

Dimostriamo ora che se $L_\omega(x)$ è limitato, allora, per quanto appena visto, deve essere connesso, ovvero che non è possibile trovare due aperti disgiunti $U_1$ e $U_2$ la cui unione contenga $L_\omega(x)$. Supponiamo per assurdo che questo sia possibile. Allora esistono due punti $y_1, y_2 \in L_\omega(x)$, tali che $y_1 \in U_1$ e $y_2 \in U_2$. Inoltre esistono due successioni $\{t_k\}$ e $\{s_k\}$ tali che $|\varphi(t_k,x) - y_1| \to 0$ e $|\varphi(s_k,x) - y_2| \to 0$, per $k \to \infty$. Prendendo eventualmente sottosuccessioni possiamo supporre che sia $t_k < s_k < t_{k+1}$ $\forall k$ (per il lemma 17.16). Consideriamo le curve $C_k$ descritte dalla traiettoria $\varphi(t,x)$ per $t \in [t_k, s_k]$,

$$C_k := \{\varphi(t,x) : t_k \leq t \leq s_k\}.$$

Si può determinare una successione di punti $z_k \in C_k$ tali che $\lim_{k\to\infty} z_k = z \notin U_1 \cup U_2$. Infatti, se $B$ è il compatto in cui si svolge il moto, per la continuità delle traiettorie si può scegliere una successione $z_k \notin U_1 \cup U_2$ e, per la compattezza di $B \setminus (U_1 \cup U_2)$, esiste il limite $z \notin U_1 \cup U_2$. Poiché $z_k = \varphi(\tau_k, x)$ per qualche successione $\tau_k$, ne segue che $z \in L_\omega(x)$. ■

**Osservazione 17.21** L'ipotesi di limitatezza è fondamentale per dimostrare che un insieme limite è connesso. Si possono infatti immaginare situazioni in cui un insieme $\omega$-limite sia illimitato e sconnesso. Si consideri per esempio un sistema dinamico definito in una striscia orizzontale

$$\mathcal{J} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leq y \leq 1\,,\ x \in \mathbb{R}\},$$

tale che tutte le traiettorie si discostino dall'origine, ruotando intorno ad essa, avvicinandosi sempre più a $y = \pm 1$ quando $x = 0$, e allontanandosi sempre più nella direzione orizzontale, verso $x = \pm\infty$, quando $y = 0$ (cfr. la figura 4.2). Sotto tali condizioni le rette $y = \pm 1$ costituiscono l'insieme $\omega$-limite di ogni punto $z \in \mathcal{J}$. Segue che per ogni $z \in \mathcal{J}$ l'insieme

$$L_\omega(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\,,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\,,\ x \in \mathbb{R}\}$$

è dato dall'unione di due insiemi illimitati disgiunti e quindi non è connesso.

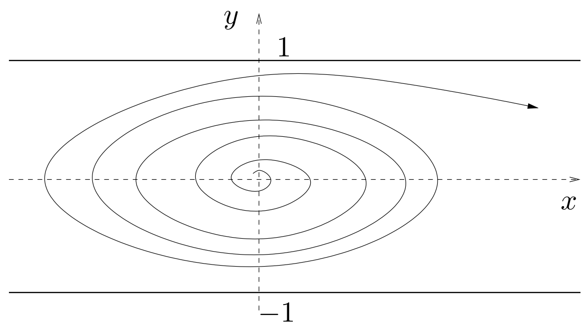


Figura 4.2: Insieme $\omega$-limite per il sistema discusso nell'osservazione 17.21.

**Teorema 17.22** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, se $y \in L_\omega(x)$ e $y_1 \in L_\omega(y)$, allora $y_1 \in L_\omega(x)$.*

*Dimostrazione.* Il risultato è una conseguenza dei teoremi 17.17 e 17.18. Infatti, poiché $y_1 \in L_\omega(y)$, esiste una successione $\{t_k\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} |\varphi(t_k, y) - y_1| = 0$. Si ha $\varphi(t_k, y) \in L_\omega(x)$ per il teorema 17.18 e per il teorema 17.17 deve essere allora $y_1 \in L_\omega(x)$. ∎

**Osservazione 17.23** Dato un insieme $A$ definiamo l'insieme $\omega$-limite di $A$ come l'insieme

$$L_\omega(A) = \bigcup_{x\in A} L_\omega(x). \tag{17.8}$$

Allora possiamo enunciare il teorema 17.22 dicendo che si ha $L_\omega(L_\omega(x)) = L_\omega(x)$. Un analogo discorso si può fare per gli insiemi $\alpha$-limite: $L_\alpha(L_\alpha(x)) = L_\alpha(x)$.

**Teorema 17.24** *Dato $x \in \mathbb{R}^n$, se $L_\omega(x)$ è non vuoto e se $A \subset \mathbb{R}^n$ indica l'insieme in cui si svolge il moto (così che $\varphi(t,x) \in A$ $\forall t \geq 0$), allora, se esiste una funzione $W : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ tale che $W(x) \geq 0$ e $\dot W(x) \leq 0$ per ogni $x \in A$, si ha $\dot W(y) = 0$ per ogni $y \in L_\omega(x)$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che esista $y \in L_\omega(x)$ tale che $\dot W(y) \neq 0$; allora, poiché $\dot W \leq 0$, deve essere $\dot W(y) = -c$, con $c > 0$. La funzione $W$ è continua, quindi esiste un intorno $B_\varepsilon(y)$ tale che $\dot W(z) < -c/2$ per ogni $z \in B_\varepsilon(y)$ (cfr. l'esercizio 20 del capitolo 3).

Poiché $y \in L_\omega(x)$, dalla definizione di insieme $\omega$-limite segue che, fissato $\delta > 0$ (con $\delta < \varepsilon$), esiste $k_0$ tale che $y_k := \varphi(t_k, x) \in B_\delta(y)$ per ogni $k > k_0$ (cfr. la figura 4.3). Definiamo

$$\beta = \beta(\delta, \varepsilon) := \min_{z\in\partial B_\delta(y)} \{|t| \,:\, \varphi(t,z) \in \partial B_\varepsilon(y)\}\,. \tag{17.9}$$

Essendo il campo vettoriale $f$ di classe $C^1$, si ha $\beta > 0$ (può essere $\beta = +\infty$ se $\varphi(t,z)$ non raggiunge mai $\partial B_\varepsilon(y)$, ma $\beta$ non può essere nullo). Quindi $\varphi(t_k + \sigma, x) \in B_\varepsilon(y)$ per ogni $|\sigma| \le \beta$ (e per ogni $k > k_0$).

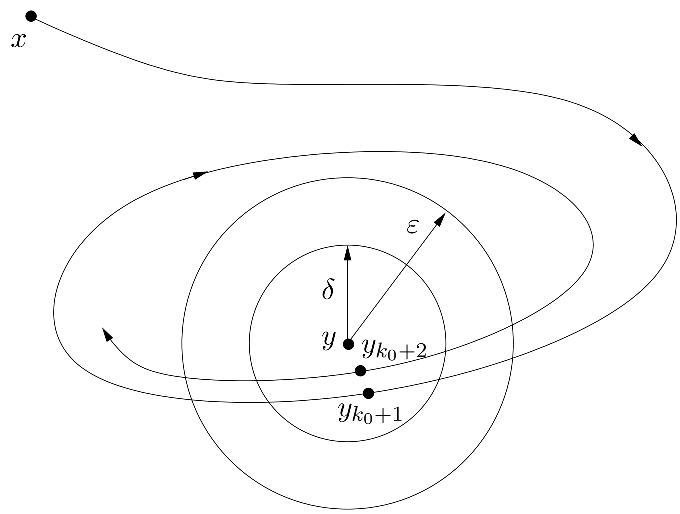


Figura 4.3: Discussione del teorema 17.24.

Se $\beta = +\infty$ allora si ha $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(y)$ $\forall \bar{x} \in B_\delta(y)$. Sia $\bar{x} = \varphi(t_{k_0+1}, x)$. Allora si ha

$$W(\varphi(T,\bar{x})) - W(\bar{x}) = \int_0^T \mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}W(\varphi(s,\bar{x}))}{\mathrm{d}s} < -\frac{c}{2}T, \tag{17.10}$$

così che

$$\lim_{T\to+\infty} \Big( W(\varphi(T,\bar{x})) - W(\bar{x}) \Big) = -\infty, \tag{17.11}$$

che è in contraddizione con l'ipotesi che la funzione $W$ fosse $W \ge 0$.

Se invece $\beta < +\infty$ si può ragionare come segue. Prendendo eventualmente una sottosuccessione di $\{t_k\}$ (sfruttando il fatto che $t_k \to +\infty$ e applicando il corollario 17.15 con $a > 2\beta$), possiamo supporre che gli intervalli $I_k = [t_k - \beta, t_k + \beta]$ siano disgiunti. Sia $K(T)$ il numero di intervalli $I_k$ tali che $t_k + \beta < T$ (cfr. la figura 4.4).

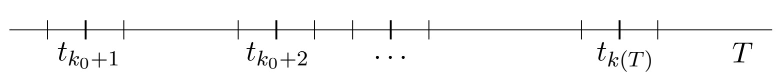


Figura 4.4: L'insieme $I$ dato dall'unione degli intervalli $I_k$, con $k_0 < k \le k(T)$.

Consideriamo di nuovo la differenza $W(\varphi(T,x)) - W(x)$ nel limite $T \to +\infty$. Poiché $\dot{W} \le 0$ nella regione in cui si svolge il moto (per ipotesi), si ha

$$W(\varphi(T,x)) - W(x) = \int_0^T \mathrm{d}s \frac{\mathrm{d}W(\varphi(s,x))}{\mathrm{d}s} \le \int_{[0,T]\cap I} \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}W(\varphi(s,x))}{\mathrm{d}s} < -\frac{c}{2}\big|[0,T]\cap I\big|, \tag{17.12}$$

dove $I = \cup_{k>k_0} I_k$ e $\big|[0,T] \cap I\big|$ indica la misura dell'insieme $[0,T] \cap I$, i.e. $\big|[0,T] \cap I\big| = 2\beta[K(T) - k_0]$. Per $T \to +\infty$, si ha $k(T) \to \infty$, così che di nuovo vale la (17.11) e si trova una contraddizione. ■

**Osservazione 17.25** L'idea della dimostrazione del teorema 17.24 è la seguente. Se (come si suppone per assurdo) $\dot{W}(y) < 0$, ogni qual volta la traiettoria passa vicino a $y$, la funzione $W$ diminuisce con velocità di decrescita maggiore di un valore strettamente positivo $c/2$, mentre, quando è lontana, sappiamo che non può aumentare (perché $\dot{W} \le 0$ in generale). Poiché la traiettoria passa vicino a $y$ infinite volte (essendo $y \in L_\omega(x)$) e ogni volta $W$ diminuisce di una quantità finita e non nulla, ne segue che $W$ deve diminuire complessivamente di una quantità infinita, cioè deve tendere a $-\infty$, contro l'ipotesi che sia positiva.

**Osservazione 17.26** Se $\beta = +\infty$, invece che nel modo indicato sopra si può ragionare come nel caso $\beta < +\infty$, sostituendo a $\beta$ un qualsiasi tempo finito (per esempio $\beta = 1$).

**Osservazione 17.27** Nel caso di sistemi dinamici non autonomi la (17.1) va sostituita con

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{17.13}$$

dove $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe $C^1$ dipendente esplicitamente dal tempo. Le definizioni e proprietà date sopra si estendono inalterate a sistemi non autonomi (17.13).

**Definizione 17.28** (Sistema meccanico) *Un* sistema meccanico *a $\ell$ gradi di libertà è un sistema dinamico descritto dall'equazione*

$$A\ddot{q} = F(q,\dot{q},t), \tag{17.14}$$

*dove $q \in \mathbb{R}^\ell$ e*

1. *$A$ è una matrice $\ell \times \ell$ simmetrica definita positiva (*matrice di massa generalizzata*),*
2. *$F\colon \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell$ è una funzione di classe $C^1$ (*forza*).*

**Osservazione 17.29** Poiché è definita positiva, la matrice simmetrica $A$ è invertibile (cfr. l'esercizio 10). Nel caso particolare in cui si abbia $\ell = 3N$, con $N \in \mathbb{N}$, e la matrice di massa generalizzata $A$ sia una matrice diagonale con i primi tre elementi uguali a $m_1$, i tre successivi uguali a $m_2$, e così via fino agli ultimi tre uguali a $m_N$ (in tal caso si chiama semplicemente *matrice di massa*), se scriviamo

$$q = x := (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}), \qquad F := (F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, \ldots, F_1^{(N)}, F_2^{(N)}, F_3^{(N)}),$$

la (17.14) diventa

$$m_i \ddot{x}_k^{(i)} = F_k^{(i)}(x,\dot{x},t), \qquad i = 1,\ldots,N, \quad k = 1,2,3. \tag{17.15}$$