

## §18 Linearizzazione

In alcuni casi, per studiare il comportamento qualitativo di un sistema dinamico nelle vicinanze di un punto di equilibrio, in particolare per discutere la stabilità del punto di equilibrio stesso, è sufficiente studiare il sistema dinamico che si ottiene “linearizzando” il campo vettoriale nell’intorno del punto di equilibrio. Vedremo che non sempre questo è possibile. Quando lo è, tuttavia, disponiamo di un metodo semplice per determinare se un punto di equilibrio sia stabile o no e per descrivere qualitativamente le traiettorie che si originano da dati iniziali sufficientemente vicini al punto di equilibrio.

Sia  $x_0$  un punto di equilibrio per il sistema dinamico (17.1). Poiché  $f$  è di classe  $C^1$  e  $f(x_0) = 0$ , possiamo scrivere

$$\dot{x} = A(x - x_0) + Q(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|Q(x)|}{|x - x_0|} = 0, \quad (18.1)$$

dove  $A$  è la matrice  $n \times n$  di elementi  $A_{ij} = [\partial f_i / \partial x_j](x_0)$  e  $Q(x)$  è un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a  $|x - x_0|$  (cfr. l’esercizio 2 del capitolo 3 con  $k = 1$ ).

**Definizione 18.1** (SISTEMA DINAMICO LINEARIZZATO) *Il sistema dinamico*

$$\dot{x} = A(x - x_0), \quad (18.2)$$

*che si ottiene da (18.1) trascurando la correzione  $Q(x)$  alla parte lineare si chiama sistema linearizzato del sistema (17.1) nell’intorno del punto di equilibrio  $x_0$ .*

**Lemma 18.2** *Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione non negativa di classe  $C^1$ . Se*

$$\frac{dg}{dt} \leq \kappa g, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18.3)$$

*per qualche costante  $\kappa$ , allora*

$$g(t) \leq e^{\kappa t} g(0), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (18.4)$$

*Dimostrazione.* Moltiplicando entrambi i membri della (18.3) per  $e^{-\kappa t}$  otteniamo

$$\frac{d}{dt} (g(t) e^{-\kappa t}) \leq 0,$$

che, integrata tra 0 e  $t$ , dà

$$g(t) e^{-\kappa t} - g(0) \leq 0,$$

da cui segue immediatamente la (18.4). ■

**Osservazione 18.3** Il lemma 18.2 si può anche dimostrare riconducendosi al lemma di Gronwall (cfr. l’esercizio 13).

**Lemma 18.4** *Dato uno spazio vettoriale  $E$ , sia  $T \in L(E)$ . Se esistono due costanti  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che*

$$\alpha < \Re(\lambda) < \beta \quad \forall \lambda \in \Sigma(T), \quad (18.5)$$

*allora esiste una base in  $E$  tale che nel prodotto scalare standard corrispondente si ha*

$$\alpha |x|^2 \leq \langle x, Tx \rangle \leq \beta |x|^2$$

*per ogni  $x \in E$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso in cui  $T$  sia semisemplice. Possiamo allora scrivere  $E$  come somma diretta

$$E = E_{a_1} \oplus \dots \oplus E_{a_r} \oplus E_{b_1} \oplus \dots \oplus E_{b_s},$$

dove  $E_{a_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ , è l'autospazio unidimensionale generato dall'autovettore  $e_i$  di  $T$  associato all'autovalore reale  $\lambda_i$ , mentre  $E_{b_j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , è l'autospazio bidimensionale generato dagli autovettori reali  $v_j, u_j$  di  $T$  associati agli autovalori complessi coniugati  $\mu_j = a_j + ib_j$  e  $\bar{\mu}_j = a_j - ib_j$ , in cui  $T|_{E_{b_j}}$  è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix},$$

i.e.  $\varphi_j = u_j + iv_j$  se  $T\varphi_j = \mu_j\varphi_j$  (cfr. il lemma 2.17). Per ipotesi si ha

$$\alpha < \lambda_i < \beta, \quad i = 1, \dots, r, \quad \alpha < a_j < \beta, \quad j = 1, \dots, s.$$

Si scelga in  $E$  la base

$$\{f_1, \dots, f_{r+2s}\} = \{e_1, \dots, e_r, v_1, u_1, \dots, v_s, u_s\} \quad (18.6)$$

e il prodotto scalare definito da

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle e_i, v_j \rangle = \langle e_i, u_j \rangle = \langle v_i, u_j \rangle = 0, \quad (18.7)$$

per ogni valore degli indici  $i$  e  $j$  compatibile con la (18.6). Si vede facilmente che la (18.7) definisce il prodotto scalare standard nella base (18.6) (cfr. l'esercizio 14). Si può anche verificare, per calcolo diretto, che risulta (cfr. l'esercizio 15)

$$\langle e_i, Te_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}, \quad \langle v_i, Tv_j \rangle = \langle u_i, Tu_j \rangle = a_i \delta_{ij}, \quad \langle v_i, Tu_j \rangle = -\langle u_i, Tv_j \rangle = b_i \delta_{ij}. \quad (18.8)$$

Ogni  $x \in E$  si scrive in modo unico nella forma

$$x = \sum_{i=1}^{r+2s} x_i f_i = \sum_{i=1}^r x_i e_i + \sum_{j=1}^s (x_{r+2j-1} v_j + x_{r+2j} u_j),$$

così che, utilizzando le (18.8),

$$\langle x, Tx \rangle = \sum_{i,j=1}^{r+2s} x_i x_j \langle f_i, T f_j \rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + \sum_{j=1}^s a_j (x_{r+2j-1}^2 + x_{r+2j}^2).$$

In virtù dell'ipotesi (18.5) si ha

$$\alpha |x|^2 = \alpha \sum_{i=1}^{r+2s} x_i^2 < \langle x, Tx \rangle < \beta \sum_{i=1}^{r+2s} x_i^2 = \beta |x|^2.$$

Se  $T$  non è semisemplice, allora esiste una base in cui è in forma canonica reale. In tale base  $T$  è rappresentato da una matrice costituita da blocchi come nella (5.9), con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e nella (5.10) del lemma 5.16. Lo spazio vettoriale  $E$  è dato dalla somma diretta di autospazi  $E_k$  tali che la restrizione  $T|_{E_k}$  è rappresentato nella base scelta da uno dei blocchi considerati. Basta dimostrare che per ognuno di tali blocchi il lemma è verificato.

Consideriamo blocchi della forma (5.9); per blocchi della forma (5.10) si ragiona in modo analogo (cfr. l'esercizio 16). Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base di  $E_k$  in cui  $T|_{E_k}$  è rappresentato dalla matrice  $A = S + N$ , con  $S = \lambda_k \mathbb{1} \in M(\dim(E_k))$  e  $N \in M(\dim(E_k))$  data da

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori  $e_1, \dots, e_n$  sono autovettori di  $S$  (con autovalore  $\lambda_k$ ) e si ha

$$N e_1 = e_2, \quad N e_2 = e_3, \quad \dots \quad N e_{n-1} = e_n, \quad N e_n = 0,$$

così che, per  $\varepsilon > 0$ , se poniamo

$$\bar{e}_j := \frac{e_j}{\varepsilon^{j-1}}, \quad j = 1, \dots, n,$$

allora  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  è ancora una base costituita da autovettori di  $S$  e si ha

$$N \bar{e}_1 = \varepsilon \bar{e}_2, \quad N \bar{e}_2 = \varepsilon \bar{e}_3, \quad \dots \quad N \bar{e}_{n-1} = \varepsilon \bar{e}_n, \quad N \bar{e}_n = 0,$$

Quindi nella base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  l'operatore  $T|_{E_k}$  è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Se  $\langle x, y \rangle_\varepsilon$  indica il prodotto scalare standard di due vettori  $x, y$  nella base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ , si ha per continuità (cfr. l'esercizio 17)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle x, T|E_k x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle}, \quad (18.9)$$

dove  $S$  è la matrice diagonale  $S = \lambda_k \mathbf{1}$  e  $\langle x, y \rangle$  indica il prodotto scalare standard nella base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Si può scegliere  $\varepsilon$  così piccolo che nella base  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  la diseuguaglianza

$$\alpha |x|_\varepsilon^2 \leq \langle x, T|E_k x \rangle_\varepsilon \leq \beta |x|_\varepsilon^2, \quad (18.10)$$

con  $|x|_\varepsilon^2 = \langle x, x \rangle_\varepsilon$ , sia soddisfatta per ogni  $x \in E_k$  (cfr. l'esercizio 18). ■

**Teorema 18.5** *Sia (18.2) il sistema linearizzato del sistema dinamico (17.1) in un intorno del punto di equilibrio  $x_0$ . Se  $\Re(\lambda) \leq -c$ , con  $c > 0$ , per ogni autovalore  $\lambda$  della matrice  $A$ , allora esiste un intorno  $B(x_0)$  tale che*

1. per ogni  $\bar{x} \in B(x_0)$ ,  $\varphi(t, \bar{x})$  è definito ed è in  $B(x_0)$  per ogni  $t \geq 0$ ;
2. esiste una costante  $C_0$  tale che

$$|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| \leq C_0 e^{-ct/2} |\bar{x} - x_0|, \quad \forall t \geq 0, \forall \bar{x} \in B(x_0), \quad (18.11)$$

dove  $|\cdot|$  denota la norma euclidea.

Quindi in particolare  $x_0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia  $x_0 = 0$ . Questo non è restrittivo: in caso contrario basta definire un cambio di variabili  $x \mapsto x - x_0$ . Sia  $T \in L(E)$  l'operatore lineare rappresentato dalla matrice  $A$ . Se  $\Re(\lambda) < -c$  per ogni autovalore  $\lambda$  di  $T$ , allora per il lemma 18.4 è possibile scegliere una base tale che, nel corrispondente prodotto scalare standard, si abbia

$$\langle x, Tx \rangle \leq -c|x|^2 \quad \forall x \in E. \quad (18.12)$$

Continuiamo a chiamare  $x$  le coordinate nella nuova base. Sia  $f'(x) = A'x + Q'(x)$  la forma che assume campo vettoriale in tali coordinate:  $A'$  ha gli stessi autovalori di  $A$  (cfr. l'esercizio 26 del capitolo 1) e  $\bar{Q}'(x)$  è tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per  $|x| < \delta$  si ha  $|Q'(x)| < \varepsilon|x|$  (cfr. la (18.1)). Se si sceglie  $\varepsilon < c/2$  e si prende il prodotto scalare con  $x$  di entrambi i membri dell'equazione  $\dot{x} = f'(x)$ , utilizzando la (18.12) e stimando  $|\langle x, Q'(x) \rangle| \leq |x| |Q'(x)|$  tramite la diseuguaglianza di Cauchy-Schwarz (cfr. l'esercizio 20 del capitolo 3), si ottiene

$$\langle x, \dot{x} \rangle \leq -c|x|^2 + \varepsilon|x|^2 \leq -\frac{c}{2}|x|^2. \quad (18.13)$$

Se indichiamo al solito con  $\varphi(t, \bar{x})$  la soluzione di (17.1) con dato iniziale  $\bar{x}$ , tenendo conto che  $2\langle x, \dot{x} \rangle = d|x|^2/dt$  e utilizzando il lemma 18.2 con  $g(t) = |\varphi(t, \bar{x})|^2$ , otteniamo dalla (18.13)

$$|\varphi(t, \bar{x})| \leq e^{-ct/2} |\bar{x}|$$

per ogni  $t$  per cui  $\varphi(t, \bar{x})$  è definita e soddisfa  $|\varphi(t, \bar{x})| < \delta$ . In particolare  $|\varphi(t, \bar{x})| \leq |\bar{x}|$ , così che, se chiamiamo  $B(x_0)$  l'intorno di centro  $x_0$  e raggio  $r < \delta$ , si ha  $\varphi(t, \bar{x}) \in B(x_0) \forall \bar{x} \in B(x_0)$ . Inoltre la soluzione  $\varphi(t, \bar{x})$  deve essere sempre all'interno dell'insieme compatto  $\overline{B(x_0)}$  e quindi è definita per ogni  $t \geq 0$ , per il corollario del teorema del prolungamento (corollario 13.13). Ne segue che si ha

$$|\varphi(t, \bar{x}) - x_0| \leq e^{-ct/2} |\bar{x} - x_0|, \quad \forall t \geq 0, \forall \bar{x} \in B(x_0),$$

e, per l'equivalenza delle norme in  $\mathbb{R}^n$  (cfr. l'esercizio 19 del capitolo 1) esiste una costante  $C_0$  tale che vale la (18.11), dove ora  $|\cdot|$  è la norma euclidea. ■

**Lemma 18.6** *Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione positiva di classe  $C^1$ . Se*

$$\frac{dg}{dt} \geq \kappa g, \quad 0 \leq t \leq T,$$

per qualche costante  $\kappa$ , allora

$$g(t) \geq e^{\kappa t} g(0), \quad 0 \leq t \leq T.$$

*Dimostrazione.* Si ragiona in modo simile a quanto nella dimostrazione del lemma 18.2. ■

**Teorema 18.7** *Sia (18.2) il sistema linearizzato del sistema dinamico (17.1) in un intorno del punto di equilibrio  $x_0$ . Se  $\Re(\lambda) > 0$  per qualche autovalore  $\lambda$  della matrice  $A$ , allora  $x_0$  è un punto di equilibrio instabile.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che sia  $x_0 = 0$ . Questo non è restrittivo: in caso contrario basta effettuare il cambio di variabili  $x \mapsto x - x_0$ . Scriviamo  $\mathbb{R}^n$  come somma diretta di due spazi invarianti  $E_1$  ed  $E_2$ ,  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_2$ , tali che la restrizione di  $A$  a  $E_1$ ,  $A|_{E_1}$ , abbia tutti autovalori con parte reale strettamente positiva, mentre la restrizione di  $A$  a  $E_2$ ,  $A|_{E_2}$ , abbia autovalori con parte reale negativa o nulla. Poniamo  $A_1 = A|_{E_1}$  e  $A_2 = A|_{E_2}$ . È allora possibile scegliere, per il lemma 18.4, una base tale che, nel corrispondente prodotto scalare standard, si abbia

$$\langle x_1, A_1 x_1 \rangle \geq a |x_1|^2, \quad \forall x_1 \in E_1, \quad (18.14)$$

per qualche costante  $a > 0$ , e

$$0 \geq \langle x_2, A_2 x_2 \rangle \geq -b |x_2|^2 \quad \forall x_2 \in E_2, \quad (18.15)$$

per qualche costante  $b \geq 0$ . Prendiamo come prodotto scalare in  $\mathbb{R}^n$  la somma dei prodotti scalari standard in  $E_1$  e in  $E_2$ : se  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ , con  $x_1 \in E_1$  e  $x_2 \in E_2$ , sarà allora  $|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2$ . Scriviamo inoltre

$$f(x) = f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (A_1 x_1 + Q_1(x_1, x_2), A_2 x_2 + Q_2(x_1, x_2)),$$

che rappresenta la decomposizione di  $f(x)$  nei due sottospazi  $E_1$  ed  $E_2$ .

Definiamo il cono

$$C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2 \geq 0\}.$$

Non è difficile dimostrare che esiste un intorno  $B_\delta(0)$  e una costante  $\alpha > 0$  tali che per ogni  $x \in B_\delta(0) \cap C$  si ha (cfr. l'esercizio 19)

$$\langle x, f(x) \rangle \geq \alpha|x|^2 \quad (18.16)$$

e (cfr. l'esercizio 20)

$$a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, f_2(x) \rangle > 0 \quad \text{se } x_1 \neq 0. \quad (18.17)$$

La situazione è rappresentata nella figura 4.5.

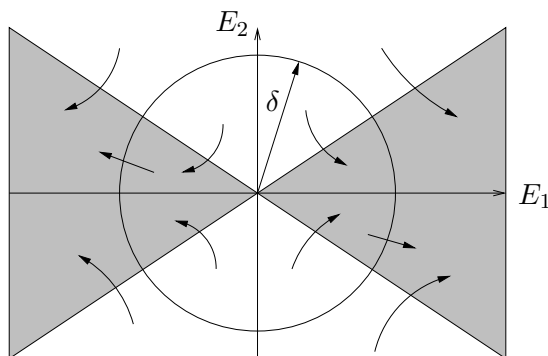


Figura 4.5: Rappresentazione schematica del cono  $C$  (regione ombreggiata) e dell'intorno  $B_\delta(0)$ .

Consideriamo la funzione  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $g(x) = a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2$ . Si ha  $g(x) = 0$  per  $x \in \partial C$ ,  $g(x) > 0$  per  $x \in C \setminus \partial C$  e  $g(x) < 0$  per  $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ . La derivata sostanziale (cfr. la definizione a pag. 167) di  $g$  è

$$\dot{g}(x) = \langle \nabla g(x), f(x) \rangle = 2a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 4b \langle x_2, f_2(x) \rangle = 2(a \langle x_1, f_1(x) \rangle - 2b \langle x_2, f_2(x) \rangle),$$

così che risulta, come conseguenza della (18.17),

$$\dot{g}(z) = \langle \nabla g(z), f(z) \rangle > 0 \quad \forall z \in (\partial C \cap B_\delta(0)) \setminus \{0\}.$$

Questo vuol dire che le traiettorie attraverseranno  $\partial C \cap B_\delta(0)$  verso i punti in cui la funzione  $g$  cresce, cioè verso l'interno. In conclusione, all'interno dell'intorno  $B_\delta(0)$ , il campo vettoriale sulla frontiera del cono è diretto verso l'interno del cono e, per la (18.16), esso ha componente radiale all'interno del cono sempre diretta verso l'esterno di  $B_\delta(0)$ .

Sempre dalla (18.16) e dal lemma 18.6 segue che

$$|\varphi(t, \bar{x})| \geq e^{\alpha t} |\bar{x}| \quad \forall \bar{x} \in C \cap B_\delta(0).$$

Quindi, per  $\bar{x} \in B_\delta(0) \cap C$ , la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$ , se non è definita per ogni  $t$ , deve uscire da  $B_\delta(0)$ , altrimenti sarebbe violato il teorema del prolungamento. Se invece  $\varphi(t, \bar{x})$  è definita per ogni  $t \geq 0$ , allora deve esistere un tempo  $t_1$  tale che  $e^{\alpha t_1} |\bar{x}| = \delta$ : quindi  $\varphi(t, \bar{x})$  esce da  $B_\delta(0)$  in un tempo finito. In entrambi i casi, dunque, la traiettoria  $\varphi(t, \bar{x})$  deve lasciare  $B_\delta(0)$  in un tempo finito. In altre parole, l'intorno  $B_\delta(0)$  contiene dati iniziali  $\bar{x}$  arbitrariamente vicini all'origine le cui traiettorie escono dall'intorno in un tempo finito; da qui segue che  $x_0 = 0$  è un punto di equilibrio instabile. ■

**Osservazione 18.8** Dalla dimostrazione del teorema 18.5, sostituendo  $t$  con  $-t$ , si ottiene che se  $x_0$  è un punto di equilibrio per il sistema dinamico (17.1) e  $\Re(\lambda) > c$ , con  $c > 0$ , per ogni autovalore  $\lambda$  della matrice  $A$  del sistema linearizzato (18.2), allora  $x_0$  è un punto di equilibrio instabile per (17.1). Si noti però che tale risultato è un caso particolare del teorema 18.7.

**Esempio 18.9** Non sempre dal sistema linearizzato (18.1) è possibile trarre informazioni per il sistema dinamico (17.1). Per esempio consideriamo il sistema

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon x|x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (18.18)$$

e studiamo come si comporta la soluzione al variare del parametro  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Per il sistema linearizzato ( $\varepsilon = 0$ ) si ha che  $x_0 = 0$  è un centro, e quindi  $|\varphi(t, \bar{x})| = |\bar{x}|$  per ogni dato iniziale  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Al contrario, per il sistema completo ( $\varepsilon \neq 0$ ), prendendo il prodotto scalare di entrambi i membri di (18.18) con  $x$  e utilizzando il fatto che la matrice  $A$  è antisimmetrica, si trova

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 = \langle x, \dot{x} \rangle = \varepsilon |x|^4, \quad (18.19)$$

che ammette soluzione (cfr. l'esercizio 21)

$$|\varphi(t, \bar{x})|^2 = \frac{|\bar{x}|^2}{1 - 2\varepsilon t |\bar{x}|^2}. \quad (18.20)$$

Se  $\varepsilon > 0$ , comunque sia scelto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  esiste  $t_1 > 0$  (dipendente da  $\bar{x}$ ) tale che

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} |\varphi(t, \bar{x})| = +\infty,$$

quindi  $x_0 = 0$  è un punto di equilibrio instabile; se  $\varepsilon < 0$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, \bar{x})| = 0,$$

comunque sia scelto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ , quindi  $x_0 = 0$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile (cfr. la figura 4.6). In conclusione il sistema completo si comporta in maniera completamente diversa rispetto al sistema linearizzato.

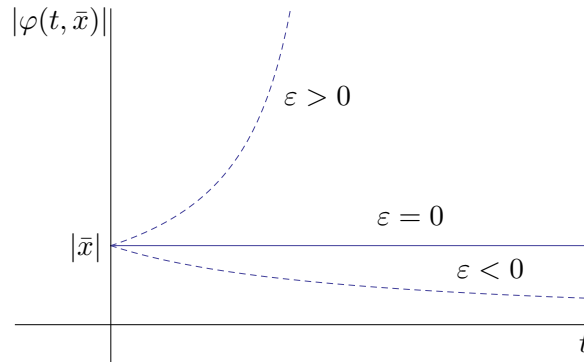


Figura 4.6: Distanza dall'origine  $|\varphi(t, \bar{x})|$  a seconda del valore di  $\varepsilon$ .

**Osservazione 18.10** L'esempio 18.9 mostra che in generale nulla possiamo concludere per il sistema completo a partire dal sistema linearizzato, nel caso in cui alcuni autovalori della matrice  $A$  associata al sistema linearizzato abbiano parte reale nulla (caso in cui non possiamo applicare né il teorema 18.5 né il teorema 18.7).

## §19 Stabilità dei punti di equilibrio

Riportiamo ora alcuni teoremi notevoli che sono utili per determinare se un punto di equilibrio sia un punto di equilibrio stabile, ed eventualmente asintoticamente stabile, nei casi in cui lo studio del sistema linearizzato non permette di trarre alcuna conclusione (cfr. l'esempio 18.9): il teorema di Ljapunov, il teorema di Barbašin-Krasovskij, il teorema di Lagrange-Dirichlet e il teorema di Četaev.

In particolare, nel caso di sistemi conservativi, vedremo come discutere la stabilità di un punto di equilibrio nel caso in cui gli autovalori del sistema linearizzato abbiano tutti parte reale nulla (così che i risultati visti nel §18 non si possono utilizzare); si veda a questo riguardo il teorema di Lagrange-Dirichlet più avanti.

Nel caso di sistemi che si ottengono da sistemi che ammettono una costante del moto  $H(x)$ , quali per esempio sistemi meccanici conservativi, modificando il campo vettoriale tramite l'aggiunta di un termine di "attrito", così che  $H(x)$  diminuisce, invece di conservarsi, lungo le traiettorie, risulta utile il teorema di Barbašin-Krasovskij, non solo per determinare che un punto di equilibrio è asintoticamente stabile, ma anche per stimarne il corrispondente bacino di attrazione.