

comunque sia scelto $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, quindi $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile (cfr. la figura 4.6). In conclusione il sistema completo si comporta in maniera completamente diversa rispetto al sistema linearizzato.

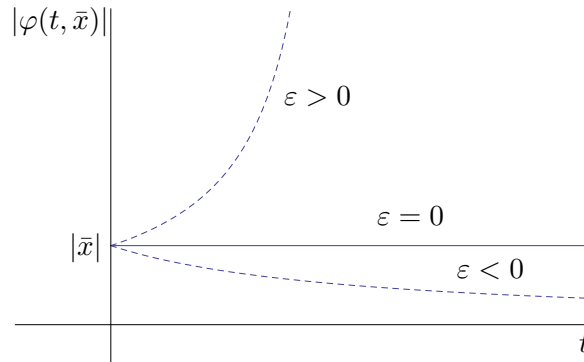


Figura 4.6: Distanza dall'origine $|\varphi(t, \bar{x})|$ a seconda del valore di ε .

Osservazione 18.10 L'esempio 18.9 mostra che in generale nulla possiamo concludere per il sistema completo a partire dal sistema linearizzato, nel caso in cui alcuni autovalori della matrice A associata al sistema linearizzato abbiano parte reale nulla (caso in cui non possiamo applicare né il teorema 18.5 né il teorema 18.7).

§19 Stabilità dei punti di equilibrio

Riportiamo ora alcuni teoremi notevoli che sono utili per determinare se un punto di equilibrio sia un punto di equilibrio stabile, ed eventualmente asintoticamente stabile, nei casi in cui lo studio del sistema linearizzato non permette di trarre alcuna conclusione (cfr. l'esempio 18.9): il teorema di Ljapunov, il teorema di Barbašin-Krasovskij, il teorema di Lagrange-Dirichlet e il teorema di Četaev.

In particolare, nel caso di sistemi conservativi, vedremo come discutere la stabilità di un punto di equilibrio nel caso in cui gli autovalori del sistema linearizzato abbiano tutti parte reale nulla (così che i risultati visti nel §18 non si possono utilizzare); si veda a questo riguardo il teorema di Lagrange-Dirichlet più avanti.

Nel caso di sistemi che si ottengono da sistemi che ammettono una costante del moto $H(x)$, quali per esempio sistemi meccanici conservativi, modificando il campo vettoriale tramite l'aggiunta di un termine di "attrito", così che $H(x)$ diminuisce, invece di conservarsi, lungo le traiettorie, risulta utile il teorema di Barbašin-Krasovskij, non solo per determinare che un punto di equilibrio è asintoticamente stabile, ma anche per stimarne il corrispondente bacino di attrazione.

§19.1 Risultati preliminari

Iniziamo con alcuni risultati elementari di analisi, richiamando le nozioni di massimo limite e di minimo limite. Diremo che un numero reale M è un *maggiorante definitivo* per la successione reale $\{t_k\}$ se esiste un numero k_0 tale che $t_k \leq M \forall k > k_0$; diremo che un numero reale m è un *minorante definitivo* se esiste un numero k_0 tale che $t_k \geq m \forall k > k_0$. Diremo che il *massimo limite* una successione $\{t_k\}$ è l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi per $\{t_k\}$ se la successione è limitata superiormente ed è $+\infty$ altrimenti. Analogamente diremo che il *minimo limite* della successione $\{t_k\}$ è l'estremo superiore dei minoranti definitivi per $\{t_k\}$ se la successione è limitata inferiormente ed è $-\infty$ altrimenti. Se L e ℓ costituiscono, rispettivamente, il massimo e minimo limite di una successione $\{t_k\}$, scriveremo

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} t_k = \max_{k \rightarrow +\infty} \lim t_k, \quad \ell = \liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = \min_{k \rightarrow \infty} \lim t_k. \quad (19.1)$$

Lemma 19.1 *Da ogni successione reale $\{t_k\}$ si possono estrarre due successioni $\{t_{k_n}\}$ e $\{t_{k_j}\}$ tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k_n} = \limsup_{k \rightarrow \infty} t_k, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} t_{k_j} = \liminf_{k \rightarrow \infty} t_k, \quad (19.2)$$

i.e. che convergono, rispettivamente, al massimo e minimo limite della successione.

Dimostrazione. Supponiamo preliminarmente che sia L sia ℓ siano finiti. Per definizione di massimo limite (cfr. l'esercizio 22), comunque si fissi $\varepsilon > 0$,

- esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k < L + \varepsilon$,
- per infiniti k si ha $t_k > L - \varepsilon$.

Quindi per infiniti $k \in \mathbb{N}$ si ha $L - \varepsilon < t_k < L + \varepsilon$. In particolare per ogni $n \in \mathbb{N}$ si può trovare $k = k_n$ tale che

$$L - \frac{1}{n} < t_{k_n} < L + \frac{1}{n}.$$

Questo implica che esiste una sottosuccessione $\{t_{k_n}\}$ tale che $t_{k_n} \rightarrow L$.

Analogamente si discute il caso del minimo limite, tenendo conto che in tal caso, per definizione di minimo limite (cfr. l'esercizio 23), per ogni $\varepsilon > 0$

- esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > \ell - \varepsilon$,
- per infiniti k si ha $t_k < \ell + \varepsilon$. Quindi per infiniti $k \in \mathbb{N}$ si ha $\ell - \varepsilon < t_k < \ell + \varepsilon$.

Procedendo come prima si trova che esiste una sottosuccessione t_{k_j} che converge a ℓ .

I casi $|L| = +\infty$ e $|\ell| = +\infty$ si trattano analogamente. Per esempio se $L = +\infty$, allora la successione $\{t_k\}$ non è limitata superiormente, i.e. $\forall M > 0 \exists k \in \mathbb{N}$ tale che $t_k > M$. Pertanto $\forall n \in \mathbb{N}$ si può prendere $k = k_n$ tale che $t_{k_n} > k$; per costruzione $t_{k_n} \rightarrow +\infty$, i.e. $t_{k_n} \rightarrow L$, per $n \rightarrow \infty$. Allo stesso modo si discutono i casi restanti. ■

Indichiamo con $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la *retta reale estesa* (o *retta reale ampliata*).

Lemma 19.2 Una successione reale $\{t_k\}$ ha limite $t_0 \in \mathbb{R}^*$ se e solo se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} t_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0, \quad (19.3)$$

i.e. se e solo se massimo e minimo limite coincidono.

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui t_0 sia finito. Se $t_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} t_k$ allora: $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $|t_k - t_0| < \varepsilon$. Si vede allora che t_0 soddisfa entrambe le definizioni di massimo e minimo limite (cfr. la dimostrazione del lemma 19.1). Da qui segue la (19.3).

Viceversa, se vale la (19.3) per qualche t_0 si deve avere, contemporaneamente,

- $\forall \varepsilon > 0 \exists k_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_1$ si ha $t_k < t_0 + \varepsilon$,
- $\forall \varepsilon > 0 \exists k_2 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_2$ si ha $t_k > t_0 - \varepsilon$.

Quindi per ogni $k > k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ si ha $t_0 - \varepsilon < t_k < t_0 + \varepsilon$, i.e. t_k converge a t_0 .

Se invece $t_0 = +\infty$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$, allora: $\forall M > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > M$. Poiché la successione $\{t_k\}$ non è superiormente limitata, si ha $\limsup_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$. D'altra parte il minimo limite è l'estremo superiore dell'insieme dei minoranti definitivi, quindi, poiché tale estremo superiore è $+\infty$, si ha anche $\liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$.

Viceversa, se vale la (19.3) con $t_0 = +\infty$, poiché $\liminf_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, allora: $\forall M > 0$ esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > M$ (altrimenti l'estremo superiore dell'insieme dei minoranti definitivi non sarebbe $+\infty$). Ma questo implica $t_k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow \infty$.

Il caso $t_0 = -\infty$ si discute analogamente. ■

Lemma 19.3 Sia $\{x_k\}$ una successione a valori in \mathbb{R}^n . Se ogni sottosuccessione convergente $\{x_{k_j}\}$ di $\{x_k\}$ converge allo stesso limite $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0, \quad (19.4)$$

i.e. la stessa successione $\{x_n\}$ è convergente e il suo limite è x_0 .

Dimostrazione. Possiamo limitarci al caso $n = 1$, i.e. al caso in cui la successione $\{x_k\}$ sia a valori in \mathbb{R} ; infatti, se $n > 1$, fissato un sistema di coordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$ in \mathbb{R}^n , si possono considerare le n successioni reali $\{x_{k_1}\}, \dots, \{x_{k_n}\}$, e ripetere l'argomento per ciascuna di esse.

Per il lemma 19.1 esistono due sottosuccessioni $\{y_k\}$ e $\{z_k\}$ per le quali si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = L, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} x_k = \ell. \quad (19.5)$$

Per ipotesi tutte le sottosuccessioni convergenti hanno come limite x_0 , quindi $L = \ell = x_0$. Possiamo applicare il lemma 19.2 e concludere che vale la (19.4). ■

Teorema 19.4 (TEOREMA PONTE) *Sia I un intervallo di \mathbb{R} e sia W un insieme aperto dello spazio vettoriale E ; sia $t_0 \in \mathbb{R}^*$. Data una funzione $u: I \rightarrow W$, si ha*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = u_0, \quad (19.6)$$

se e solo se, per ogni successione $\{t_k\}$ a valori in \mathbb{R} tale che $t_k \rightarrow t_0$, si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(t_k) = u_0. \quad (19.7)$$

Dimostrazione. Consideriamo separatamente i due casi $|t_0| < +\infty$ e $|t_0| = +\infty$.

Se t_0 è finito e vale la (19.6), risulta: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che per ogni t con $|t - t_0| < \delta$ si ha $|u(t) - u_0| < \varepsilon$. Consideriamo allora una successione $\{t_k\}$ convergente a t_0 : allora per ogni $\delta > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $|t_k - t_0| < \delta$. In conclusione per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ e, corrispondentemente, k_0 tali che per ogni $k > k_0$ si ha $|t_k - t_0| < \delta$ e quindi $|u(t_k) - u_0| < \varepsilon$. Ne segue che vale la (19.7). Viceversa supponiamo che valga la (19.7) per ogni successione $\{t_k\}$ convergente a t_0 . Vogliamo far vedere che in tal caso $u_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} u(t)$. Supponiamo per assurdo che questo non sia vero. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall \delta > 0 \exists t$ con $|t - t_0| < \delta$ tale che $|u(t) - u_0| \geq \varepsilon$. Scegliamo $\delta = 1/k$ e, corrispondentemente, t_k tale che $|t_k - t_0| < 1/k$. Si ha allora una successione $\{t_k\}$ che converge a t_0 per $k \rightarrow \infty$ tale che $|u(t_k) - u_0| \geq \varepsilon$ per ogni k , in contraddizione con la (19.7).

Se $t_0 = +\infty$ si ragiona nel modo seguente. Se $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0$, risulta: $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ tale che per ogni $t > M$ si ha $|u(t) - u_0| < \varepsilon$. Consideriamo allora una successione divergente $\{t_k\}$ tale che per ogni $M > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > M$. In conclusione per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ e, corrispondentemente, k_0 tali che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > M$ e quindi $|u(t_k) - u_0| < \varepsilon$. Perciò vale la (19.7). Viceversa supponiamo che valga la (19.7) per ogni successione $\{t_k\}$ tale che $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$. Vogliamo far vedere che in tal caso $u_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$. Supponiamo per assurdo che questo non sia vero. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\forall M > 0 \exists t > M$ tale che $|u(t) - u_0| \geq \varepsilon$. Scegliamo $M = k$ e, corrispondentemente, $t_k > k$. Si ha allora una successione $\{t_k\}$ tale che $t_k \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow \infty$ e $|u(t_k) - u_0| \geq \varepsilon$ per ogni k , in contraddizione con la (19.6).

Il caso $t_0 = -\infty$ si discute in modo analogo. ■

Osservazione 19.5 Il teorema 19.4 è anche noto come *criterio di Heine* o *criterio di convergenza per successioni*.

Utilizziamo ora i risultati dei lemmi precedenti per dimostrare alcune semplici proprietà degli insiemi ω -limite.

Lemma 19.6 *Dato il sistema dinamico (17.1), sia $x \in \mathbb{R}^n$. Se x_0 è un punto di equilibrio stabile e si ha $L_\omega(x) = \{x_0\}$, allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$.*

Dimostrazione. Poiché x_0 è un punto di equilibrio stabile, fissato un qualsiasi intorno $B_\varepsilon(x_0)$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni dato iniziale $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ si ha $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq 0$. Poiché $L_\omega(x) = \{x_0\}$, per definizione di insieme ω -limite esiste una successione monotona divergente $\{t_k\}$ e un indice $k_0 \geq 0$ tali che $\varphi(t_k, x) \in B_\delta(x_0)$ per $t_k > t_{k_0}$. Per ogni $t > t_{k_0}$ si ha allora $\varphi(t, x) \in B_\varepsilon(x_0)$. Ne segue che, comunque si scelga una successione monotona divergente $\{s_k\}$, risulta $\varphi(s_k, x) \in B_\varepsilon(x_0)$ per $s_k > t_{k_0}$.

Sia $\{s_{k_n}\}$ una sottosuccessione arbitraria di $\{s_k\}$. Per ogni $s_{k_n} > t_{k_0}$ si ha $\varphi(s_{k_n}, x) \in B_\varepsilon(x_0)$, se $B_\varepsilon(x_0)$ indica la chiusura di $B_\varepsilon(x_0)$, Poiché $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ è compatto, dalla successione $\varphi(s_{k_n}, x)$ si può estrarre una successione convergente $\varphi(s_{k_{n_j}}, x)$. Il limite di tale successione soddisfa la definizione 17.12 di insieme ω -limite di x (per la successione di tempi $\{s_{k_{n_j}}\}$), quindi deve essere x_0 poiché per ipotesi $L_\omega(x) = \{x_0\}$. Possiamo allora applicare il lemma 19.3 e concludere che la successione $\varphi(s_k, x)$ converge a x_0 . L'argomento si applica a qualsiasi successione monotona divergente $\{s_k\}$, quindi, per il teorema 19.4, concludiamo che si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$. ■

Lemma 19.7 Dato il sistema dinamico (17.1), sia $x \in \mathbb{R}^n$. Se $L_\omega(x)$ contiene un punto di equilibrio stabile x_0 , allora $L_\omega(x) = \{x_0\}$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$.

Dimostrazione. Dimostriamo per prima cosa che un insieme $L_\omega(x)$ che contenga un punto di equilibrio x_0 è necessariamente costituito dal solo punto x_0 . Supponiamo per assurdo che esista $y \in L_\omega(x)$ tale che $y \neq x_0$; deve allora esistere una successione $\{s_k\}$ monotona divergente tale che $\varphi(s_k, x) \rightarrow y$ per $k \rightarrow \infty$ (cfr. la definizione 17.12). Dal momento che stiamo supponendo $y \neq x_0$ esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che $|y - x_0| = 2\varepsilon$. Poiché x_0 è stabile, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $z \in B_\delta(x_0)$, allora $\varphi(t, z) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq 0$ (cfr. la definizione 17.10). D'altra parte, sempre per la definizione 17.12 di insieme ω -limite, esiste una successione monotona divergente $\{t_k\}$ e un indice k_0 tali che $\varphi(t_k, x) \in B_\delta(x_0)$ per $k \geq k_0$: per la stabilità di x_0 , questo implica $\varphi(t, x) \in B_\varepsilon(x_0) \forall t \geq t_{k_0}$. Ne segue che non è possibile che esista una successione $\{s_k\}$ tale che $\varphi(s_k, x)$ converga a y per $k \rightarrow \infty$: siamo così arrivati a una contraddizione. Concludiamo perciò che si ha $L_\omega(x) = \{x_0\}$. Applicando il lemma 19.6, si ottiene $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$. ■

Osservazione 19.8 Sotto le ipotesi del lemma 19.6, si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = x_0$, ma non necessariamente il punto x_0 è asintoticamente stabile. In altre parole non necessariamente ogni punto in un intorno di x_0 deve tendere a x_0 . Come (facile) controesempio si può considerare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = -x_2. \end{cases} \quad (19.8)$$

Per ogni $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ si ha $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (\bar{x}_1, 0)$ e quindi $L_\omega(\bar{x}) = \{(\bar{x}_1, 0)\}$. D'altra parte la retta $x_2 = 0$ è costituita da punti di equilibrio stabili ma non punti di equilibrio asintoticamente stabili.

Lemma 19.9 *Dato il sistema dinamico (17.1), se esiste un insieme compatto K tale che $\varphi(t, x) \in K \forall t \geq 0$ allora $L_\omega(x) \neq \emptyset$ e $L_\omega(x) \subset K$.*

Dimostrazione. Se K è compatto e $\varphi(t, x) \in K$ per ogni $t \geq 0$, data una successione monotona divergente $\{t_k\}$, si ha $\varphi(t_k, x) \in K \forall x \in K$ e $\forall k \in \mathbb{N}$. Quindi è possibile trovare una sottosuccessione $\{t_{k_n}\}$ tale che, per ogni $x \in K$, la successione $\varphi(t_{k_n}, x)$ converge a un punto in K , che chiameremo y . Si ha $y \in K$, per la compattezza di K , e $y \in L_\omega(x)$ per la definizione 17.12 di insieme ω -limite. ■

§19.2 Teoremi di stabilità

Teorema 19.10 (TEOREMA DI LJAPUNOV) *Sia x_0 un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esistano un intorno $B(x_0)$ di x_0 e una funzione $W: B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che*

1. $W(x_0) = 0$, e $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$;
2. $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$.

Allora x_0 è un punto di equilibrio stabile. Se inoltre

3. $\dot{W}(x) < 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$,

allora x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostrazione. Consideriamo un intorno $B_\varepsilon(x_0) \subset B(x_0)$ di raggio ε e centro in x_0 , e definiamo

$$\alpha(\varepsilon) := \min_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} W(x). \quad (19.9)$$

Si ha $\alpha(\varepsilon) > 0$, dove il segno stretto vale in virtù dell'ipotesi 1 nell'enunciato del teorema. Definiamo

$$U := \left\{ x \in B_\varepsilon(x_0) : W(x) < \frac{1}{2}\alpha(\varepsilon) \right\}. \quad (19.10)$$

Poiché W è una funzione continua, l'insieme U è aperto (cfr. l'esercizio 25). Quindi esiste un intorno $B_\delta(x_0) \subset U$, con $\delta < \varepsilon$ (cfr. la figura 4.7).

Per dimostrare che x_0 è un punto di equilibrio stabile, è sufficiente far vedere che, sotto le ipotesi 1 e 2 del teorema, comunque si scelga un dato iniziale $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$, la traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$ si mantiene all'interno dell'intorno $B_\varepsilon(x_0)$ per ogni $t \geq 0$. Per assurdo, supponiamo che esista un tempo finito t_1 tale che, per qualche $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$, si abbia $\varphi(t_1, \bar{x}) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$. Allora si avrebbe

$$0 < \frac{\alpha(\varepsilon)}{2} < W(\varphi(t_1, \bar{x})) - W(\bar{x}) = \int_0^{t_1} ds \frac{dW(\varphi(s, \bar{x}))}{ds} \leq 0, \quad (19.11)$$

che è ovviamente impossibile.

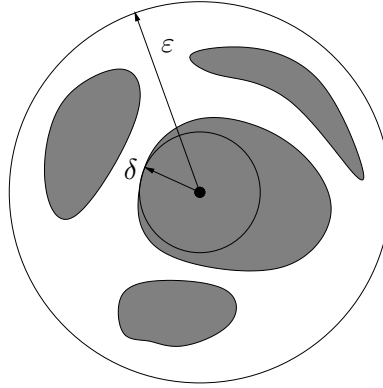


Figura 4.7: Discussione del teorema di Ljapunov. L'insieme U è costituito dalla regione ombreggiata.

Supponiamo ora che valga anche l'ipotesi 3 del teorema. Consideriamo la chiusura dell'intorno $B_\varepsilon(x_0)$: poiché $\overline{B_\varepsilon(x_0)}$ è compatto e $\varphi(t, \bar{x}) \in B_\varepsilon(x_0)$ per ogni $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ (per l'appena dimostrata stabilità di x_0), possiamo applicare il lemma 19.9 e concludere che, per ogni $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ si ha $L_\omega(\bar{x}) \neq \emptyset$.

Sia $y \in L_\omega(\bar{x})$. Per il teorema 17.24, poiché $W(x) \geq 0$ e $\dot{W}(x) \leq 0$ per $x \in B_\varepsilon(x_0)$, si deve avere $\dot{W}(y) = 0$. Ma $\dot{W}(x) < 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$, i.e. $\dot{W}(x) = 0$ solo per $x = x_0$, quindi $y = x_0$. Questo implica che comunque sia presa una successione $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$ qualsiasi sua sottosuccessione convergente $\{\varphi(t_{k_j}, \bar{x})\}$ deve convergere a x_0 . Per il lemma 19.3 allora la successione stessa $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$ deve convergere a x_0 . D'altra parte questo risultato non dipende dalla particolare successione di tempi $\{t_k\}$. Possiamo concludere che per qualsiasi successione di tempi $\{t_k\}$ il limite della successione $\{\varphi(t_k, \bar{x})\}$ è x_0 . Allora per il teorema 19.4 si deve avere $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$. Questo mostra che il punto x_0 è attrattivo. Poiché abbiamo già dimostrato che è stabile, segue che x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. ■

Osservazione 19.11 L'idea della dimostrazione del teorema 19.10 è la seguente. Per l'ipotesi 2, le traiettorie che partono da punti vicini a x_0 non portano verso punti in cui W assume valori più grandi e quindi rimangono vicini a x_0 (stante l'ipotesi 1). Se inoltre vale l'ipotesi 3 le traiettorie portano verso punti in cui W assume valori più piccoli (in modo che W diminuisca strettamente), i.e. verso x_0 .

Osservazione 19.12 Nella dimostrazione della stabilità asintotica del punto di equilibrio x_0 , una volta ottenuto $y = x_0$ per ogni $y \in L_\omega(\bar{x})$ si può direttamente applicare il lemma 19.6 per trovare $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \bar{x}) = x_0$. A questo punto, poiché tale risultato vale per ogni $\bar{x} \in B_\delta(x_0)$ possiamo concludere che x_0 è asintoticamente stabile.

Osservazione 19.13 Nel caso in cui valga anche l'ipotesi 3 nel teorema 19.10, l'intorno $B_\delta(x_0)$ è, per costruzione, contenuto nel bacino d'attrazione di x_0 (cfr. la definizione 17.10).

Questo fornisce un metodo per stimare il bacino d'attrazione di x_0 : si cerca il massimo valore di δ per cui l'argomento dato nella dimostrazione del teorema 19.10 funziona. Ovviamente, specie nel caso in cui il bacino abbia una forma fortemente asimmetrica, la stima così ottenuta può essere molto pessimistica.

Osservazione 19.14 Se vale anche l'ipotesi 3 nel teorema 19.10, deve essere $\dot{W}(x_0) = 0$ per il teorema 17.24, quindi non è necessario specificare il valore di $\dot{W}(x_0)$ perché ovvio.

Osservazione 19.15 Il teorema 19.10 permette di concludere che, per il sistema dell'esempio 18.9, l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile se $\varepsilon < 0$ (cfr. l'esercizio 26).

Definizione 19.16 (FUNZIONE DI LJAPUNOV) *Chiameremo funzione di Ljapunov una funzione che verifichi le proprietà 1 e 2 del teorema 19.10.*

Teorema 19.17 *Sia x_0 un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esistano un intorno $B(x_0)$ di x_0 e una funzione $W: B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che*

1. $W(x_0) = 0$, e $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$;
2. $\dot{W}(x) \geq 0 \forall x \in B(x_0)$, e $\dot{W}(x_0) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$,

allora x_0 è un punto di equilibrio instabile.

Dimostrazione. Se si applica il teorema 19.10 al sistema dinamico che si ottiene da (17.1) invertendo il segno del tempo, si trova che, per l'evoluzione inversa $t \mapsto \varphi(-t, \bar{x})$, x_0 è asintoticamente stabile. ■

Teorema 19.18 (TEOREMA DI BARBAŠIN-KRASOVSKIJ) *Sia x_0 un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esista una funzione $W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un intorno $B(x_0)$ di x_0 e di classe C^1 , tale che*

1. $W(x_0) = 0$, e $W(x) > 0 \forall x \in B(x_0) \setminus \{x_0\}$;
2. $\dot{W}(x) \leq 0 \forall x \in B(x_0)$.
3. *esiste un insieme compatto P , chiusura di un aperto, tale che:*
 - (a) $x_0 \in P$,
 - (b) P è positivamente invariante,
 - (c) *non esistono in $P \setminus \{x_0\}$ traiettorie costituite unicamente da punti z in cui $\dot{W}(z) = 0$.*

Allora x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile e l'insieme P è contenuto nel suo bacino d'attrazione.

Dimostrazione. Poiché P è compatto e positivamente invariante, si ha $L_\omega(x) \neq \emptyset \forall x \in P$ (cfr. il lemma 19.9). Sempre per il fatto che P è positivamente invariante, si ha $L_\omega(x) \subset P$. Sia

$y \in L_\omega(x)$. Supponiamo per assurdo che sia $y \neq x_0$. Per l'unicità della soluzione dell'equazione (17.1) e poiché $\varphi(t, x_0) = x_0 \forall t \in \mathbb{R}$, si dovrebbe avere $\varphi(t, y) \neq x_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ma $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$ per il teorema 17.20; quindi esisterebbe una traiettoria $\varphi(t, y) \in P \setminus \{x_0\}$ tale che $\dot{W} = 0$ (per il teorema 17.24). Questo contraddice l'ipotesi 3(c). Perciò si deve avere $y = x_0$. A questo punto possiamo procedere come alla fine della dimostrazione del teorema 19.10 e concludere che x_0 è asintoticamente stabile. Infine, ricordando la definizione 17.10, abbiamo che P deve essere contenuto nel bacino d'attrazione di x_0 . ■

Osservazione 19.19 Il teorema 19.18 è anche noto come *principio di invarianza di LaSalle*.

Osservazione 19.20 Nel corso della dimostrazione del teorema 19.18, una volta trovato $y = x_0$, per dimostrarne la stabilità asintotica, si può anche ragionare come indicato nell'osservazione 19.12: si applica il lemma 19.6 per ottenere $L_\omega(x) = \{x_0\}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$, quindi si utilizza il fatto che tale risultato vale per ogni $x \in P$ per concludere che x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Osservazione 19.21 Tenendo presente l'osservazione 19.13, si vede che, dato un sistema dinamico, i teoremi 19.10 e 19.18 si possono utilizzare non solo per verificare se un dato punto di equilibrio è asintoticamente stabile, ma anche, eventualmente, per dare una stima del suo bacino d'attrazione.

Teorema 19.22 (TEOREMA DI LAGRANGE-DIRICHLET) *In un sistema meccanico conservativo (17.21), i punti di minimo isolati dell'energia potenziale corrispondono a punti di equilibrio stabili.*

Dimostrazione. In un sistema meccanico conservativo (cfr. la definizione 17.34), se indichiamo con $x = (q, \dot{q})$ i punti dello spazio delle fasi, l'energia (cfr. la (17.20))

$$H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, A(q)\dot{q} \rangle + V(q), \quad (19.12)$$

è una costante del moto. Sia q_0 un punto di minimo isolato per l'energia potenziale $V(q)$ i.e. tale che sia $V(q) > V(q_0)$ per ogni q in un intorno di q_0 (cfr. l'esercizio 29); possiamo allora definire la funzione di Ljapunov $W(q, \dot{q}) = H(q, \dot{q}) - V(q_0)$ in un intorno del punto $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$ e applicare il teorema 19.10 per concludere che il punto $(q_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema meccanico con energia (19.12). ■

Le ipotesi del teorema 19.22 possono essere indebolite nel modo seguente.

Teorema 19.23 *Sia q_0 un punto stazionario dell'energia potenziale V . Se esiste un intorno $B_r(q_0)$ di q_0 tale che per ogni $r > 0$ con $B_r(q_0) \subset B(q_0)$ esiste un aperto $U \subset B_r(q_0)$ tale che $q_0 \in U$ e $V(q) > V(q_0) \forall q \in \partial U$, allora $(q_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema meccanico conservativo (17.21).*

Dimostrazione. Poiché V è continua, per ogni $\varepsilon_1 > 0$ si può trovare $r_0 > 0$ tale $|V(q) - V(q_0)| < \varepsilon_1 \forall q \in B_{r_0}(q_0)$. Per ipotesi, per ogni $r < r_0$, esiste $U \subset B_r(q_0)$ tale che $F(q) := V(q) - V(q_0) > 0 \forall q \in \partial U$. Per compattezza esiste il minimo m di $F(q)$ per $q \in \partial U$ e quindi $m > 0$; inoltre $m < \varepsilon_1$. Sia $\delta > 0$ tale che $H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q_0) < m \forall (\bar{q}, \bar{v})$ tale che $|\bar{q} - q_0| < \delta$ e $|\bar{v}| < \delta$ (questo di nuovo è possibile per continuità poiché $H(q_0, 0) = V(q_0)$). Sia $(q(t), \dot{q}(t))$ la soluzione con dato iniziale (\bar{q}, \bar{v}) . Si ha

$$V(q(t)) - V(q_0) \leq H(q(t), \dot{q}(t)) - V(q_0) = H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q_0) < m,$$

che mostra che $q(t)$ non può attraversare ∂U (altrimenti si avrebbe $q(t) \in \partial U$ e $F(q(t)) < m$). Ne segue che $|q(t) - q_0| < r \forall t \geq 0$. D'altra parte, poiché la matrice $A(q)$ è definita positiva, si ha, per un'opportuna costante positiva c_1 ,

$$\begin{aligned} c_1 |\dot{q}(t)|^2 &\leq \frac{1}{2} \langle \dot{q}(t), A(q(t)) \dot{q}(t) \rangle = H(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t)) = H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q(t)) \\ &\leq (H(\bar{q}, \bar{v}) - V(q_0)) - (V(q(t)) - V(q_0)) < m + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1, \end{aligned}$$

così che $|\dot{q}(t)| < r' := \sqrt{2\varepsilon_1/c_1}$. Fissato $\varepsilon > 0$, se scegliamo ε_1 e r tali che $\max\{r, r'\} < \varepsilon$, si trova che per ogni dato iniziale $(\bar{q}, \bar{v}) \in B_\delta(q_0, 0)$ si ha $(q(t), \dot{q}(t)) \in B_\varepsilon(q_0, 0) \forall t \geq 0$. ■

Osservazione 19.24 Come mostra il teorema 19.23, perché $(q_0, 0)$ sia un punto di equilibrio stabile per un sistema meccanico conservativo, la condizione che q_0 sia un punto di minimo isolato per l'energia potenziale è sufficiente ma non necessaria. Come controesempio si può considerare il sistema meccanico con energia potenziale (cfr. la figura 4.8)

$$V(q) = q^5 \sin \frac{1}{q}, \quad (19.13)$$

per il quale $(q, p) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile nonostante che $q = 0$ non sia un punto di minimo per $V(q)$ (cfr. l'esercizio 31).

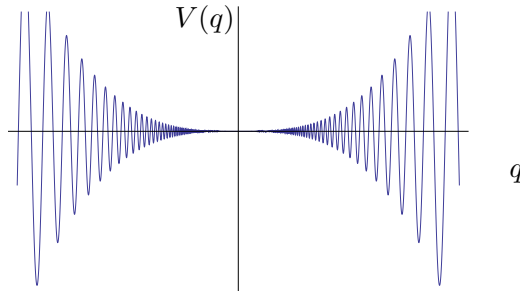


Figura 4.8: Grafico della funzione $V(q)$ data dalla (19.13).

Teorema 19.25 (TEOREMA DI ČETAEV) *Sia x_0 un punto di equilibrio per il sistema (17.1). Supponiamo che esistano un intorno $B(x_0)$ di x_0 e una funzione $W : B(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che*

1. *l'insieme $U := \{x \in B(x_0) : W(x) > 0\}$ sia non vuoto;*
2. *$x_0 \in \partial U$;*
3. *$\dot{W}(x) > 0 \forall x \in U$.*

Allora x_0 è un punto di equilibrio instabile.

Dimostrazione. Consideriamo un intorno $B_\varepsilon(x_0) \subset B(x_0)$ di raggio ε e centro in x_0 e indichiamo la sua chiusura con C , i.e. $C := \overline{B_\varepsilon(x_0)}$. Per ipotesi, l'insieme U è non vuoto. Poiché U è aperto per costruzione – dato che W è continua e U è la controimmagine di un insieme aperto (cfr. l'esercizio 24) e x_0 appartiene alla sua frontiera, esiste una componente connessa D di U tale che $x_0 \in \partial D$. Pertanto, per ogni $\delta > 0$ esiste $\bar{x} \in U \cap B_\delta(x_0)$ tale che $W(\bar{x}) > 0$. Sia $a := W(\bar{x})$. Poiché $\dot{W}(x) > 0$ in U , si ha $W(\varphi(t, \bar{x})) \geq W(\bar{x})$ fin tanto che la soluzione rimane in U . Definiamo $\Omega := \{x \in U \cap C : W(x) \geq a\}$. Per definizione di U si ha $\Omega = \{x \in C : W(x) \geq a\} = W^{-1}[a, +\infty) \cap C$, dove $W^{-1}[a, +\infty)$ è chiuso, in quanto controimmagine di un insieme chiuso (cfr. l'esercizio 24), quindi Ω è chiuso perché intersezione di due insiemi chiusi. Ne segue che Ω , essendo ovviamente limitato, è un insieme compatto, così che, per il teorema di Weierstrass (cfr. l'esercizio 17 del capitolo 1), esiste il minimo

$$m := \min_{x \in \Omega} \dot{W}(x)$$

ed è strettamente positivo poiché $\dot{W}(x) > 0 \forall x \in U$. Allora, per ogni $t > 0$ tale che $\varphi(t, \bar{x}) \in U$, si deve avere

$$W(\varphi(t, \bar{x})) \geq W(\bar{x}) + mt.$$

D'altra parte, se poniamo

$$M := \max_{x \in C} W(x),$$

si deve avere $W(\varphi(t, \bar{x})) \leq M$ fin tanto che $\varphi(t, \bar{x}) \in U \cap C$. Ne segue che la traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$ deve uscire da $U \cap C$ in un tempo finito t_1 . Poiché essa non può attraversare ∂W (poiché $W(x) = 0$ se $x \in \partial U$, mentre $W(\varphi(t, \bar{x})) \geq a$), deve uscire da U attraversando la frontiera di C , i.e. $\varphi(t_1, \bar{x}) \in \partial B_\varepsilon(x_0)$. ■

Definizione 19.26 (FUNZIONE DI ČETAEV) *Chiameremo funzione di Četaev una funzione che verifichi le proprietà 1, 2 e 3 del teorema 19.25.*

Osservazione 19.27 Il teorema 19.17 è un caso particolare del teorema 19.25 (corrisponde al caso in cui si abbia $U = B(x_0) \setminus \{x_0\}$).

Esempio 19.28 Si consideri il sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, in \mathbb{R}^2 , dato da

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_1^2 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^3 x_2^2. \end{cases}$$

L'origine $x = 0$ è un punto di equilibrio. Il sistema linearizzato in un intorno dell'origine è $\dot{x} = 0$, quindi non dà informazioni sulla stabilità del punto di equilibrio. Possiamo invece applicare il teorema 19.25 per dimostrare che l'origine è un punto di equilibrio instabile, utilizzando

$$W(x) = x_1^2 - x_2^2$$

come funzione di Četaev. Si ha $W(x) > 0$ nel cono $C := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_2| < |x_1|\}$ (cfr. la figura 4.9). Inoltre l'origine è nel vertice del cono, così che $0 \in \partial C$. Infine $\dot{W}(x) = x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = x_1^4 + x_2^4 + O(|x|^5)$. Si può trovare un intorno $B(0)$ dell'origine tale che $U := B(0) \cap C$ è non vuoto, $0 \in \partial U$ e $\dot{W}(x) > 0 \forall x \in U$, così che le ipotesi del teorema 19.25 sono soddisfatte.

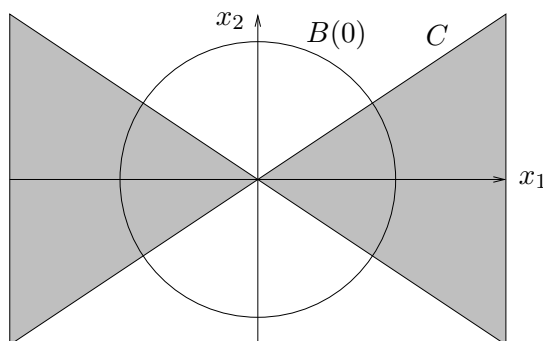


Figura 4.9: L'insieme U dell'esempio 19.28 dato dall'intersezione del cono C con l'intorno $B(0)$.

Nel caso di sistemi meccanici conservativi, il teorema di Lagrange-Dirichlet non permette di concludere nulla sulla stabilità di un punto d'equilibrio che corrisponda a un punto stazionario dell'energia potenziale, ancorché isolato, che non sia un punto di minimo. Risultati parziali si ottengono utilizzando il teorema di Četaev, richiedendo però condizioni aggiuntive sull'energia potenziale. Torneremo sul problema generale successivamente, nell'ambito del formalismo lagrangiano (cfr. il capitolo 11), quando considereremo sistemi a un numero qualsiasi di gradi di libertà. Visto che nei prossimi capitoli ci limiteremo essenzialmente a sistemi unidimensionali (o comunque riconducibili a sistemi unidimensionali) nel resto del paragrafo considereremo esplicitamente sistemi a un grado di libertà, i.e. sistemi della forma (17.21) con $\ell = 1$. La stabilità dei punti di equilibrio può essere discussa facilmente mediante il teorema di Četaev, purché si assumano opportune ipotesi di non degenerazione (cfr. anche il capitolo 6).

Sia $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{k+1} e sia q_0 un punto stazionario di V . Si assuma che in un intorno di q_0 la funzione V abbia la forma

$$V(q) = c(q - q_0)^k + R(q), \quad R(q) = O((q - q_0)^{k+1}), \quad c \neq 0. \quad (19.14)$$

Nel caso in cui k sia pari, si ha $c > 0$ se q_0 è un punto di minimo e $c < 0$ se q_0 è un punto di massimo. Se invece k è dispari, q_0 è un punto di sella (indipendentemente dal segno di c).

Teorema 19.29 *Si consideri un sistema meccanico conservativo (17.21) con $\ell = 1$. Se q_0 è un punto di massimo o di sella dell'energia potenziale V e la funzione V ha la forma*

$$V(q) = c(q - q_0)^k + R(q), \quad R(q) = O((q - q_0)^{k+1}), \quad c \neq 0,$$

in un intorno di q_0 , allora $(q_0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.

Dimostrazione. Dato $\delta > 0$, sia $B_\delta(q_0)$ l'intorno di raggio δ e centro in q_0 . Definiamo

$$U := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : q \in B_\delta(q_0), (q - q_0)p > 0, E(q, p) < 0\},$$

dove $E(q, p) := H(q, p) - V(q_0)$, e consideriamo la funzione di Četaev

$$W(q, p) = -E(q, p) (q - q_0)p.$$

Definiamo $B_\delta^*(q_0) = B_\delta(q_0)$ se q_0 è un punto di massimo e $B_\delta^*(q_0) := \{q \in B(q_0) : c(q - q_0)^k < 0\}$ se q_0 è un punto di sella. Se δ è sufficientemente piccolo si ha $V(q) < V(q_0)$ per ogni $q \in B_\delta^*(q_0)$. Inoltre per ogni $q \in B_\delta^*(q_0)$ si ha $E(q, p) < 0$ per p sufficientemente piccolo: basta infatti prendere p tale che $|p|^2 < R(q) := 2A^{-1}(q)(-V(q))$. Per costruzione si ha $U \neq \emptyset$, $(q_0, 0) \in \partial U$ e $W(q, p) > 0 \forall (q, p) \in U$. Inoltre

$$\begin{aligned} \dot{W}(q, p) &= -E(q, p) (\dot{q}p + (q - q_0)\dot{p}) \\ &= -E(q, p) \left(\frac{1}{A(q)} p^2 + \frac{q - q_0}{A^2(q)} A'(q) p^2 - (q - q_0) V'(q) \right) \\ &= -E(q, p) \left(\frac{1}{A(q)} p^2 + O((q - q_0)p^2) - k c (q - q_0)^k + O((q - q_0)^{k+1}) \right), \end{aligned}$$

dove $A'(q)$ e $V'(q)$ indicano le derivate delle funzioni $A(q)$ e $V(q)$, rispettivamente, e quindi $\dot{W}(q, p) > 0 \forall (q, p) \in U$ purché δ sia sufficientemente piccolo. Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del teorema 19.25. Da qui segue che $(q_0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile. ■

Osservazione 19.30 Dalla dimostrazione del teorema 19.29 si vede che, per ottenere che $\dot{W}(q, p) > 0$ in U , la proprietà che serve è che $(q - q_0)V'(q) < 0$ nella regione in cui si ha $W(q, p) > 0$. Le ipotesi sulla funzione V servono appunto a far sì che tale proprietà sia

soddisfatta. Assumere semplicemente che q_0 sia un punto stazionario isolato non di minimo non è sufficiente, come mostra il seguente controesempio:

$$V(q) = -q^6 \left(2 - \cos \frac{1}{q} \right). \quad (19.15)$$

La funzione $V(q)$ è di classe C^2 e ha un punto di massimo isolato in $q = 0$; d'altra parte

$$q V'(q) = -5q^6 \left(2 - \cos \frac{1}{q} \right) + q^5 \sin \frac{1}{q} = q^5 \left(\sin \frac{1}{q} - 5q \left(2 - \cos \frac{1}{q} \right) \right)$$

non ha segno definito per q vicino a 0, dato che ha il segno di $q^5 \sin(1/q)$ (cfr. la figura 4.8).

In realtà, nel caso di sistemi a un grado di libertà, l'instabilità di punti critici corrispondenti a punti massimo dell'energia potenziale, incluso il caso discusso nell'osservazione 19.30, si può facilmente dimostrare senza ricorrere al teorema di Četaev e senza imporre ipotesi restrittive.

Teorema 19.31 *Si consideri un sistema meccanico conservativo (17.21) con $\ell = 1$. Se q_0 è un punto di massimo dell'energia potenziale V , allora $(q_0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.*

Dimostrazione. Se q_0 è un punto di massimo di V esiste $\varepsilon > 0$ tale che $V(q) \leq V(q_0) \forall q \in B_\varepsilon(q_0)$. Poiché $A(q)$ è definita positiva si ha $0 < c_1 \leq A(q) \leq c_2 \forall q \in B_\varepsilon(q_0)$ per opportune costanti positive c_1 e c_2 . Fissato $\delta > 0$, sia (\bar{q}, \bar{p}) tale che $\bar{q} = q_0$ e $0 < \bar{p} < \delta$, così che $(\bar{q}, \bar{p}) \in B_\delta(x_0)$, dove $x_0 = (q_0, 0)$. Sia $(q(t), p(t))$ la soluzione delle equazioni (17.21) con dato iniziale (\bar{q}, \bar{p}) . Poiché $H(q, p)$ è una costante del moto, si ha

$$\frac{1}{2A(q(t))} p^2(t) + V(q(t)) = H(q(t), p(t)) = H(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2A(q_0)} \bar{p}^2 + V(q_0).$$

Tenendo conto che $V(q(t)) \leq V(q_0)$ e il fatto che $\bar{p} > 0$ implica $p(t) > 0$ per continuità, si ha

$$|p(t)| \geq |\bar{p}| \frac{\sqrt{A(q(t))}}{\sqrt{A(q_0)}} \implies \dot{q}(t) = \frac{p(t)}{A(q(t))} \geq \frac{\bar{p}}{\sqrt{A(q(t))} A(q_0)} \geq c := \frac{\bar{p}}{c_2}$$

e, integrando \dot{q} , si ottiene $|q(t) - q_0| \geq c|t|$ fin tanto che $q(t) \in B_\varepsilon(q_0)$. Ne segue che esiste $t_1 > 0$ tale che $q(t_1) \in \partial B_\varepsilon(q_0)$ e, di conseguenza, $(q(t_1), p(t_1)) \notin B_\varepsilon(x_0)$. ■

La dimostrazione del teorema 19.31 si può facilmente adattare in modo da includere il caso di punti di flesso orizzontale.

Teorema 19.32 *Si consideri un sistema meccanico conservativo (17.21) con $\ell = 1$. Se q_0 è un punto di flesso orizzontale dell'energia potenziale V , allora $(q_0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.*

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione del teorema 19.31, con il caveat che, se q_0 è un punto di flesso, si ha $V(q) < V(q_0)$ solo per i punti $q \in B_\varepsilon(q_0)$ tali che $q < q_0$ oppure $q > q_0$. Si sceglie allora il dato iniziale (\bar{q}, \bar{p}) così che $V(\bar{q}) < V(q)$ e $(\bar{q} - q_0)\bar{p} > 0$. Per il resto si ragiona come nella dimostrazione del teorema 19.31 e si trova che la soluzione $(q(t), p(t))$ esce dall'intorno $B_\varepsilon(x_0)$ del punto di equilibrio $x_0 = (q_0, 0)$ in un tempo finito. ■

§20 Teorema della scatola di flusso

I teoremi visti nelle sezioni precedenti trattano il comportamento di sistemi dinamici vicino a punti di equilibrio. La situazione è completamente differente se siamo interessati al comportamento di un sistema lontano dai punti di equilibrio. Il seguente teorema, che prende il nome di *teorema della scatola di flusso* – chiamato anche *teorema dell'intorno tubolare* o *teorema di rettificazione* – mostra che, qualitativamente, ogni sistema dinamico si comporta allo stesso modo lontano dai punti di equilibrio: è infatti sempre possibile trovare un sistema di coordinate in cui l'evoluzione appare, localmente, come un *moto rettilineo uniforme*, i.e. un moto con velocità costante, in modulo e verso (cfr. la figura 4.10 più avanti).

Il teorema della scatola di flusso è di notevole rilevanza, da un punto di vista teorico. Se interessano proprietà qualitative di un sistema dinamico lontano dai punti di equilibrio si può sempre supporre che il moto sia un moto rettilineo uniforme, quindi un moto particolarmente facile da studiare.

Definizione 20.1 (DIFFEOMORFISMO) *Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^n$, si chiama diffeomorfismo un'applicazione $f: A \rightarrow B$ differenziabile e invertibile, con inversa differenziabile. In tal caso si dice che A e B sono diffeomorfi e che f è un diffeomorfismo di classe C^k se f e la sua inversa sono di classe C^k .*

Dato uno spazio vettoriale E di dimensione n un *iperpiano* passante per $x \in E$ è un insieme di vettori applicati della forma (x, v) , al variare di v in un sottospazio di E di dimensione $n - 1$.

Definizione 20.2 (SEZIONE LOCALE) *Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) \neq 0$. Una sezione locale di f in x è un insieme aperto S contenuto nell'iperpiano π passante per x e trasverso a f , i.e. tale che $(x, f(z)) \notin \pi$ per ogni $z \in S$.*

Osservazione 20.3 Questo significa che $\dim(S) = n - 1$ e che, per ogni $z \in S$, il vettore applicato $(x, f(z))$ non è contenuto nell'iperpiano che contiene S . In altri termini il campo vettoriale in tutti i punti della sezione è diretto sempre “verso destra” o sempre “verso sinistra”, rispetto alla sezione.

Teorema 20.4 (TEOREMA DELLA SCATOLA DI FLUSSO) *Sia dato il sistema dinamico (17.1), e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \neq 0$. Esiste allora un intorno $B(x_0)$ e un diffeomorfismo*