Esercizio 14 Si dimostri che le (18.7) definiscono il prodotto scalare standard nella base (18.6). [*Suggerimento.* Sia $n = r + 2s$. Se $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ sono le componenti dei bvettori $x, y \in E$, rispettivamente, si ha

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

se e solo se $\langle f_i, f_j \rangle \delta_{ij}$ epr $i, j = 1, \ldots, n$].

Esercizio 15 Si dimostrino le (18.8).

Esercizio 16 Si mostri come si modifica la dimostrazione del lemma 18.4, nel caso in cui in cui la matrice T non sia semisemplice e i blocchi siano della forma (5.10) anziché della forma (5.9).

Esercizio 17 Si dimostri la (18.9). [*Soluzione.* Dato $x \in E_k$, siano $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ le sue componenti nelle basi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, rispettivamente. Risulta allora $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = \bar{x}_1 \bar{e}_1 + \ldots + \bar{x}_n \bar{e}_n$, da cui segue che $\bar{x}_j = \varepsilon^{j-1} \bar{x}_j$ $\forall j = 1, \ldots, n$. Per definizione di prodotto scalare standard (in ciascuna delle due basi), si ha $\langle e_i, e_j \rangle = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle_\varepsilon = \delta_{ij}$. Si trova

$$\langle x, x \rangle_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^2, \qquad \langle x, T|E_k x \rangle_\varepsilon = \langle x, Sx \rangle_\varepsilon + \langle x, Nx \rangle_\varepsilon = \lambda_k \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j^2 + \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} \bar{x}_j \bar{x}_{j+1},$$

così che

$$\frac{\langle x, T|E_k x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \frac{\langle x, Sx \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} + \frac{\langle x, Nx \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} = \lambda_k + \varepsilon \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \ldots + \bar{x}_{n-1} \bar{x}_n}{\bar{x}_1^2 + \ldots + \bar{x}_n^2} = \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} + \varepsilon h(x),$$

dove

$$h(x) := \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \ldots + \bar{x}_{n-1} \bar{x}_n}{\bar{x}_1^2 + \ldots + \bar{x}_n^2} \implies |h(x)| \le \frac{1}{2} \frac{(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) + (\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2) + \ldots + (\bar{x}_{n-1}^2 + \bar{x}_n^2)}{\bar{x}_1^2 + \ldots + \bar{x}_n^2} \le 1,$$

da cui segue l'asserto.]

Esercizio 18 Si dimostri che la (18.9) implica la (18.10). [*Suggerimento.* Sia Λ il più grande autovalore di T. Si ha $\lambda_k \le \Lambda < \beta$. Definiamo $\eta := \beta - \Lambda$ e fissiamo $\varepsilon \in (0, \eta]$. Usando i risultati discussi nella soluzione dell'esercizio 17, si ha

$$\frac{\langle x, T|E_k x \rangle_\varepsilon}{\langle x, x \rangle_\varepsilon} \le \lambda_k + \varepsilon = \beta - \eta + \varepsilon \le \beta,$$

che implica la stima dall'alto in (18.10). Analogamente si dimostra la stima dal basso.]

Esercizio 19 Si dimostri la (18.16). [*Soluzione.* Per ogni $\varepsilon > 0$ si può fissare $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|Q(x)| < \varepsilon |x|$ (cfr. la (18.1)). Possiamo scrivere

$$\langle x, f(x) \rangle = \langle x_1, A_1 x_1 \rangle + \langle x_2, A_2 x_2 \rangle + \langle x, Q(x) \rangle,$$

dove $|\langle x, Q(x) \rangle| = |\langle x_1, Q_1(x) \rangle + \langle x_2, Q_2(x) \rangle| \le \varepsilon |x|^2$, per $x \in B_\delta(0)$. Utilizzando le (18.14) e (18.15), otteniamo, per $x \in B_\delta(0)$,

$$\langle x, f(x) \rangle \ge a|x_1|^2 - b|x_2|^2 - \varepsilon |x|^2.$$

Se inoltre $x \in C \cap B_\delta(0)$, si ha $|x_2| \leq a|x_1|^2/(2b)$, così che

$$|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq \left(1 + \frac{a}{2b}\right) |x_1|^2 ,$$

da cui segue $|x_1|^2 \geq d|x|^2$, con $1/d := 1 + a/2b$. Quindi troviamo

$$\langle x, f(x)\rangle \geq \frac{1}{2}a|x_1|^2 + \frac{1}{2}\left(a|x_1|^2 - 2b|x_2|^2\right) - \varepsilon|x|^2 \geq \frac{1}{2}a|x_1|^2 - \varepsilon|x|^2 \geq \left(\frac{ad}{2} - \varepsilon\right)|x|^2,$$

così che, se $\varepsilon \leq ad/4$ (e δ è scelto corrispondentemente), si ha la (18.16) con $\alpha := ad/4$.]

Esercizio 20 Si dimostri la (18.17). [*Soluzione.* Per ogni $\varepsilon > 0$ si può fissare $\delta > 0$ tale che se $|x| < \delta$ allora $|Q(x)| < \varepsilon|x|$ (cfr. la (18.1)). Tenendo conto delle (18.14) e (18.15) si ha

$$\begin{aligned} a\,\langle x_1, f_1(x)\rangle - 2b\,\langle x_2, f_2(x)\rangle &= a\,\langle x_1, A_1x_1\rangle - 2b\,\langle x_2, A_2x_2\rangle + a\,\langle x_1, Q_1(x)\rangle - 2b\,\langle x_2, Q_2(x)\rangle \\ &\geq a^2|x_1|^2 - (a+2b)\,\varepsilon|x|^2 \geq \left(a^2 d - (a+2b)\,\varepsilon\right)|x|^2, \end{aligned}$$

così che, con se si sceglie $\varepsilon \leq a^2d/[2(a+2b)]$ (e si fissa δ corrispondentemente), con d come nella soluzione dell'esercizio 19, si ottiene la (18.17).]

Esercizio 21 Si dimostri che la (18.20) è soluzione della (18.19). [*Suggerimento.* Per separazione di variabili.]

Esercizio 22 Si dimostri che un numero L è il massimo limite di una successione reale $\{t_k\}$ se e solo se $\forall\varepsilon > 0$

1. esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k < L + \varepsilon$,
2. per infiniti k si ha $t_k > L - \varepsilon$.

[*Suggerimento.* La proprietà 1 significa che ogni numero maggiore di L è un maggiorante definitivo, mentre la proprietà 2 significa che per ogni $\varepsilon > 0$ il numero $L - \varepsilon$ non è un maggiorante definitivo.]

Esercizio 23 Si dimostri che un numero ℓ è il minimo limite di una successione reale $\{t_k\}$ se e solo se $\forall\varepsilon > 0$

1. esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$ si ha $t_k > \ell - \varepsilon$,
2. per infiniti k si ha $t_k < \ell + \varepsilon$.

[*Suggerimento.* Si ragiona analogamente a quanto fatto per l'esercizio 22.]

Esercizio 24 Si dimostri che una funzione $f\colon X \to Y$, con $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}$, è continua se e solo se per ogni aperto $A \subset Y$ la *controimmagine* $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ è un insieme aperto. Se ne deduca che f è continua se e solo se per ogni insieme chiuso $C \subset Y$ la controimmagine $f^{-1}(C)$ è un insieme chiuso. [*Soluzione.* Sia $f\colon X \to Y$ continua e sia $A \subset Y$ un insieme aperto. Se $x \in f^{-1}(A)$, si ha $f(x) \in A$, quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che l'intorno $B_\varepsilon(f(x))$ è contenuto in A, essendo A aperto. Poiché f è continua, fissato ε esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < \delta$, i.e. per ogni $y \in B_\delta(x)$ si ha $f(y) \in B_\varepsilon(f(x)) \subset A$. Ne segue che $y \in f^{-1}(A)$ $\forall y \in B_\delta(x)$, da cui si deduce che l'intero intorno $B_\delta(x)$ è contenuto in $f^{-1}(A)$. Abbiamo trovato un intorno di x contenuto in $f^{-1}(A)$.