Esercizio 29 Una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha un *punto di minimo locale* (o *punto di minimo relativo*) in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste un intorno $B(x_0)$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0)$. Analogamente f ha un *punto di massimo locale* (o *punto di massimo relativo*) in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se esiste un intorno $B(x_0)$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0)$. Se vale il segno stretto nelle diseguaglianze i punti di massimo e di minimo si dicono *isolati*. Infine x_0 è un *punto di sella* (detto anche *punto di flesso* se $n = 1$) se x_0 è un punto stazionario ed esiste un intorno $B(x_0)$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per alcuni $x \in B(x_0)$ e $f(x) < 0$ per altri $x \in B(x_0)$. Più in generale un punto stazionario x_0 di una funzione f si dice *isolato* se esiste un intorno $B(x_0)$ che non contiene altri punti stazionari di f. Dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ in $\mathbb{R}^n$, supponiamo che esista una costante del moto $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di minimo o di massimo relativo per H. Si dimostri che x_0 è un punto di equilibrio stabile per il sistema. [*Suggerimento.* Si può scegliere $\pm(H(x) - H(x_0))$ come funzione di Ljapunov e quindi applicare il teorema 19.10.]

Esercizio 30 Con le notazioni dell'esercizio 29 si discuta perché è necessario che il punto di minimo x_0 sia isolato perché esso sia un punto di equilibrio stabile. [*Suggerimento.* Si consideri il sistema planare $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$. La funzione $W(x, y) = y^2$ è una costante del moto e raggiunge il suo minimo sulla retta $y = 0$. I punti di equilibrio sono tutti e soli i punti della forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, quindi la retta $y = 0$ è costituita interamente da punti di equilibrio. D'altra parte la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y})$ è $(x(t), y(t)) = (\bar{x} + \bar{y}t, \bar{y})$, quindi ogni soluzione con $\bar{y} \neq 0$ diverge per $t \to \pm\infty$. Ne segue che tutti i punti di equilibrio sono instabili.]

Esercizio 31 Si consideri il sistema meccanico conservativo unidimensionale con energia potenziale (19.13): si dimostri che $(q, \dot{q}) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile. [*Suggerimento.* Si studi il comportamento delle curve di livello per valori di energia vicini a zero e si applichi il teorema 19.23.]

Esercizio 32 Si utilizzi il teorema di Barbašin-Krasovskij per dedurre che l'origine $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'oscillatore armonico smorzato (9.7). Si dimostri inoltre che il suo bacino d'attrazione è l'intero piano. [*Soluzione.* Scriviamo la (9.7) come sistema dinamico, nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 x, \end{cases}$$

Si consideri la funzione

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2,$$

che rappresenta l'energia del sistema in assenza di attrito (i.e. per $\gamma = 0$). Poiché $\dot{H} = -\gamma y^2$, la funzione $W = H$ verifica le proprietà 1 e 2 del teorema 19.18. Per ogni $E > 0$ la curva di livello $\Gamma_E = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$ è una curva chiusa, di fatto un'ellisse con centro nell'origine $x_0 = (0, 0)$. Si denoti con $\mathcal{P}$ l'insieme compatto racchiuso dalla curva Γ_E (così che $\partial\mathcal{P} = \Gamma_E$). Per dimostrare che x_0 è asintoticamente stabile e che $\mathcal{P}$ è contenuto nel suo bacino d'attrazione, basta allora verificare che $\mathcal{P}$ verifica le tre condizioni 3 del teorema 19.18. La condizione 3(a) è soddisfatta poiché $x_0 \in \mathcal{P}$ per costruzione. Il campo vettoriale del sistema dinamico è definito dalla funzione

$$f(x, y) = f_0(x, y) + f_1(x, y), \qquad f_0(x, y) = (y, -\omega^2 x), \qquad f_1(x, y) = (0, -\gamma y),$$

i.e. si può scrivere come somma di due campi vettoriali. Sulla curva Γ_E, il vettore $f_0(x, y)$ è tangente alla curva, mentre $f_1(x, y)$ è diretto lungo l'asse delle ordinate e punta verso il basso se $y > 0$ e verso l'alto se $y < 0$. Ne segue che su $\partial\mathcal{P}$ il campo vettoriale risultante $f(x, y)$ è diretto verso l'interno di P. Questo dimostra la proprietà 3(b). Poiché $\dot{W} = 0$ se e solo se $y = 0$, se definiamo $\mathcal{S} := \{(x, y) \in \mathcal{P} : y = 0, x \neq 0\}$, si vede immediatamente che non esistono traiettorie interamente contenute in $\mathcal{S}$: infatti per ogni $(x, y) \in \mathcal{S}$ il campo vettoriale $f(x, y)$ non è diretto lungo l'asse delle ascisse, così che, se a un certo istante t_1 la traiettoria passa per $\mathcal{S}$, allora al tempo $t = t_1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, essa dovrà abbandonare $\mathcal{S}$. Questo implica che non esistono traiettorie in $\mathcal{P} \setminus \{x_0\}$ costituite unicamente da punti (x, y) tali che $\dot{W}(x, y) = 0$, i.e. la proprietà 3(c). Infine, notando che l'argomento si può applicare a qualsiasi valore di E, se consideriamo il limite $E \to +\infty$, concludiamo che il bacino d'attrazione dell'origine è l'intero piano.]

Esercizio 33 Si verifichi che il teorema della funzione implicita (cfr. l'esercizio 4) si può applicare nello studio della funzione (20.4) nel §20.

Esercizio 34 Data un'applicazione differenziabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si definisce *matrice jacobiana* la matrice di componenti $[\partial f_i/\partial x_j](x)$ e *jacobiano* il determinante della matrice jacobiana. Si dimostri che se l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e la sua matrice jacobiana è non singolare in x_0, allora l'applicazione f è invertibile in un intorno di x_0 e la sua inversa f^{-1} è di classe C^1 in un intorno di $y_0 = f(x_0)$. [*Soluzione.* L'inversa $g := f^{-1}$ di un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è formalmente definita da $g \circ f = 1$, ovvero, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si deve avere $g(f(x)) = x$. Derivando si ottiene

$$\frac{\partial g}{\partial y}(f(x)) \, \frac{\partial f}{\partial x}(x) = \mathbb{1},$$

dove $\partial g/\partial y$, $\partial f/\partial x$ e la matrice identità $\mathbb{1}$ sono matrici $n \times n$ ($[\partial g/\partial y](f(x))$ indica che si deve derivare g rispetto al suo argomento y e calcolare la derivata in $y = f(x)$). Si deve quindi avere

$$\frac{\partial g}{\partial y}(f(x)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x) \right)^{-1}.$$

Se $\det([\partial f/\partial x](x_0)) \neq 0$, esiste un intorno di x_0 in cui la matrice $[\partial f/\partial x](x)$ è invertibile. In conclusione, l'applicazione g è ben definita e differenziabile, ed è di classe C^1 se f è di classe C^1.]

Esercizio 35 Si dimostri che se l'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^k e la sua matrice jacobiana è non singolare in x_0, allora l'applicazione f è invertibile in un intorno di x_0 e la sua inversa f^{-1} è di classe C^k in un intorno di $y_0 = f(x_0)$. [*Suggerimento.* Si ragiona come per l'esercizio 34, definendo formalmente la derivata di ordine k di $g = f^{-1}$ e mostrando che è ben definita e di classe C^k se la matrice jacobiana è invertibile.]

Esercizio 36 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e sia f' la sua derivata. Si dimostri che se esistono i limiti

$$\ell := \lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \ell' := \lim_{x \to +\infty} f'(x),$$

allora se ℓ è finito si ha $\ell' = 0$. [*Soluzione.* Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0$ tale che $|f'(x) - \ell'| < \varepsilon$ per ogni $x > M$. Se fosse $\ell' > 0$, scegliendo $\varepsilon = \ell'/2$, si avrebbe allora, per $x > x_0 > M$,

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) \, \mathrm{d}t > (\ell' - \varepsilon) \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \implies \ell - f(x_0) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - f(x_0) > \frac{\ell'}{2} \int_{x_0}^{+\infty} \mathrm{d}t = +\infty,$$

in contraddizione con l'ipotesi che ℓ sia finito. Analogamente si esclude il caso $\ell' < 0$, stimando $f'(x) < \ell' + \varepsilon$ per $x > M$ e fissando $\varepsilon = -\ell'/2$.]