

Per il lemma 21.5 concluderemo, eventualmente prendendo  $\varepsilon$  più piccolo e passando a sottosuccessioni (per il lemma 17.14), che esistono due successioni  $\{\tau_k\}$  e  $\{\sigma_k\}$ , con  $\tau_k < \sigma_k < \tau_{k+1}$ , tali che  $\varphi(\tau_k, x) \in J_1$  e  $\varphi(\sigma_k, x) \in J_2$ . Si ha perciò una successione di punti  $\{y_n\}$ , definiti come  $y_{2p-1} = \varphi(\tau_p, x)$  e  $y_{2p} = \varphi(\sigma_p, x)$  per  $p \geq 1$ , che è monotona lungo la traiettoria  $\varphi(t, x)$  senza essere monotona lungo la sezione  $S$ . Questo contraddice il lemma 21.3. ■

**Teorema 21.7** (TEOREMA DI POINCARÉ-BENDIXSON) *Dato un sistema planare, ogni insieme limite compatto non vuoto che non contenga punti di equilibrio è l'orbita di una traiettoria periodica.*

*Dimostrazione.* Al solito ci limitiamo al caso degli insiemi  $\omega$ -limite; il caso degli insiemi  $\alpha$ -limite si discute allo stesso modo. Sia  $y \in L_\omega(x)$ , con  $L_\omega(x)$  compatto (alla luce del teorema 17.17 e dell'esercizio 16 del capitolo 1, basta assumere che  $L_\omega(x)$  sia limitato). Esiste una successione  $\varphi(t_k, x)$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\varphi(t_k, x) - y| = 0$ . Poiché  $L_\omega(x)$  non contiene punti di equilibrio, si ha  $|f(y)| = a > 0$ . Scegliamo un sistema di coordinate  $(x_1, x_2)$  con origine in  $y$ , tale che  $f_1(y) = a > 0$  e  $f_2(y) = 0$  (come nella dimostrazione del lemma 21.5).

Fissato un intorno  $B_\varepsilon(y)$ , esiste  $k_0 > 0$  tale che  $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(y)$  per ogni  $k > k_0$ . Se  $\varepsilon$  è scelto in modo tale che  $f_1(z) > a/2$  per ogni  $z \in B_\varepsilon(y)$ , in virtù del lemma 21.5, per ogni  $k > k_0$ , esiste  $\sigma_k$  tale che  $\varphi_1(t_k + \sigma_k, x) = 0$ . La successione  $\{\sigma_k\}$ , inoltre, è tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = 0$ . Infatti, poiché  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k, x) = y$ , possiamo scegliere  $\delta_k > |\varphi(t_k, x) - y|$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ , e il lemma 21.5 dà  $|\sigma_k| < 2\delta_k/a$ . Definiamo  $\tau_k = t_k + \sigma_k$  e consideriamo la successione  $y_k = \varphi_2(\tau_k, x)$ . Per il lemma 21.3 la successione  $y_k$  è monotona decrescente, i.e.  $y_{k+1} \leq y_k \forall k$ . Sono possibili due casi (cfr. la figura 5.4):

1. esiste un indice  $h$  tale che  $y_h = y_{h+1}$ ;
2. si ha  $y_{h+1} < y_h \forall h$ .

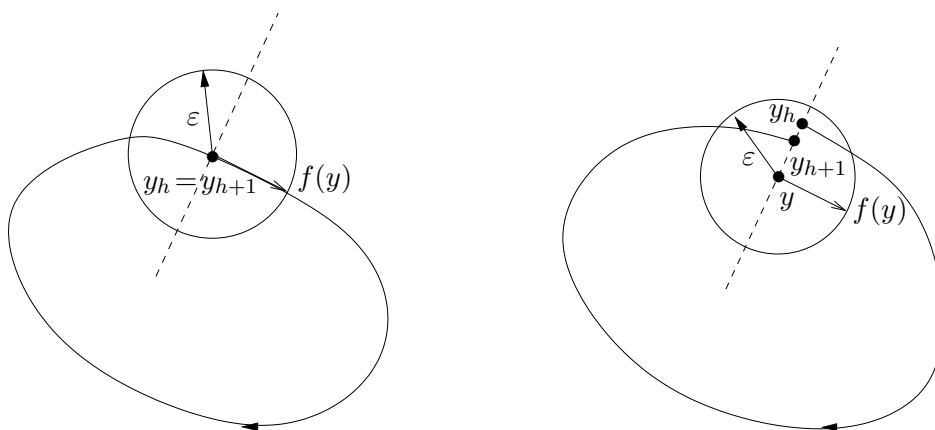


Figura 5.4: Scenario previsto nella discussione del teorema 21.7: caso 1 a sinistra e caso 2 a destra.

Nel caso 1 la traiettoria  $\varphi(t, x)$  è periodica di periodo  $T := \tau_{h+1} - \tau_h$ . Inoltre, poiché i punti  $\varphi(\tau_k, x)$  tendono a  $y$ , il punto  $y$  deve appartenere alla traiettoria (cfr. la figura 5.4). Se così non fosse, la traiettoria che parte da  $x$ , essendo periodica, non si potrebbe avvicinare indefinitamente a  $y$ . Infatti la quantità  $m = \min_{t \in [0, T]} |\varphi_2(t, x)|$ , che deve esistere per il teorema di Weierstrass (cfr. l'esercizio 17 del capitolo 1), sarebbe in tal caso diversa da zero e quindi esisterebbe un intorno di  $y$  di raggio minore di  $m$  privo di punti lungo la traiettoria che parte da  $x$ , contro l'ipotesi che sia  $y \in L_\omega(x)$ . Ne consegue che  $y_h = y$  e  $L_\omega(x) = \gamma$ , dove  $\gamma$  è l'orbita della traiettoria periodica  $\varphi(t, x)$ .

Nel caso 2, i punti  $\varphi(\tau_k, x)$  sono tutti distinti (cfr. la figura 5.4). Poiché  $\varphi(t, y) \in L_\omega(x)$ , per l'invarianza degli insiemi limite (cfr. il teorema 17.18) e  $L_\omega(x)$  è compatto per ipotesi, da ogni successione  $\varphi(t_k, y)$  si può estrarre una sottosuccessione convergente, quindi  $L_\omega(y) \neq \emptyset$ . Sia  $y_1 \in L_\omega(y)$ . Deve essere  $f(y_1) \neq 0$  perché  $y_1 \in L_\omega(x)$  (per il teorema 17.22) e, per ipotesi,  $L_\omega(x)$  non contiene punti di equilibrio. La traiettoria che parte da  $y$  deve attraversare infinite volte una sezione locale  $S_1$  di  $f$  in  $y_1$ : questo segue dalla definizione di insieme limite e dal lemma 21.5. Indichiamo con  $\varphi(T_k, y)$ , per una opportuna successione  $\{T_k\}$ , la successione di punti lungo la traiettoria  $\varphi(t, y)$  che intersecano  $S_1$ . Possiamo applicare il lemma 21.6 e concludere che  $\varphi(T_k, y) = \varphi(T_h, y)$  per ogni  $k, h$ . In particolare deve essere  $y_1 = \varphi(T_k, y)$  per ogni  $k$ , così che anche in questo caso la traiettoria che parte da  $y$  è periodica. Quindi la traiettoria che passa per  $y$  è un'orbita chiusa  $\gamma$  contenuta in  $L_\omega(x)$ . Resta da dimostrare che  $\gamma = L_\omega(x)$ , ovvero che  $L_\omega(x)$  non contiene altro che  $\gamma$ . Se così non fosse  $L_\omega(x)$  sarebbe unione di orbite chiuse, perché per ogni altro punto  $y_2 \in L_\omega(x)$  potremmo ripetere la discussione precedente. Per l'unicità della soluzione di (21.1) tali orbite dovrebbero essere disgiunte, ma questo, unito alla compattezza di  $L_\omega(x)$ , contraddice il fatto che gli insiemi limite compatti debbano essere connessi (teorema 17.20). ■

**Osservazione 21.8** Dato un sistema dinamico  $(W, \varphi)$  si definisce *attrattore* un sottoinsieme  $A$  di  $W$  che abbia le seguenti proprietà:

1.  $A$  è positivamente invariante, i.e.  $\varphi(t, \bar{x}) \in A \forall \bar{x} \in A$ ;
2. esiste un insieme  $B(A)$ , chiamato *bacino d'attrazione* di  $A$ , tale che per ogni  $\bar{x} \in B(A)$  e per ogni aperto  $\Lambda \supset A$  esiste  $T > 0$  tale che  $\varphi(t, \bar{x}) \in \Lambda \forall t > T$ ;
3. non esiste alcun sottoinsieme proprio di  $A$  che abbia le stesse proprietà.

In sostanza, un attrattore è un insieme  $A$  verso cui evolvono tutte le traiettorie di un sistema dinamico con dati iniziali che siano nell'insieme  $B(A)$ .

**Esempio 21.9** Si possono fare esempi di insiemi limite che non siano né orbite chiuse né punti di equilibrio. Per esempio si può immaginare un sistema le cui traiettorie siano come nella figura 5.5. Si hanno tre punti di equilibrio instabili: uno nell'intersezione dei lobi della *lemniscata* (o figura a 8) e due al loro interno. Tutte le traiettorie con dati iniziali che non appartengono ai due lobi tendono a essi (allontanandosi dai punti di equilibrio all'interno