se i dati iniziali sono all'interno). Quindi la lemniscata è l'insieme ω-limite di tutti i punti esterni e ciascuno dei due lobi è anche l'insieme ω-limite di tutti i punti interni a esso, con l'esclusione dei punti di equilibrio. Punti di equilibrio, cicli limite e la lemniscata della figura 5.5 costituiscono esempi di attrattori.

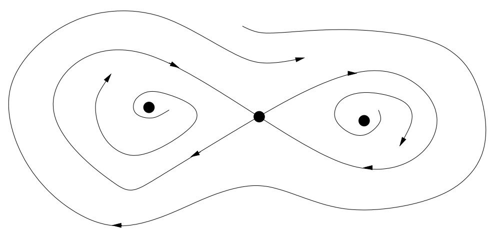

Figura 5.5: Insieme ω-limite per il sistema discusso nell'esempio 21.9.

Definizione 21.10 (Ciclo limite) *Un'orbita chiusa* γ *di un sistema dinamico è un* ciclo limite *se* $\gamma = L_\omega(x)$ *oppure* $\gamma = L_\alpha(x)$ *per qualche* $x \notin \gamma$*; nel primo caso diremo che* γ *è un ciclo* ω*-limite, nel secondo che* γ *è un ciclo* α*-limite.*

Sia γ un'orbtita chiusa di un sistema dinamico planare. Una traiettoria $\varphi(t, x)$, con $x \notin \gamma$, *si muove a spirale* (o descrive un *moto a spirale*) verso γ (cfr. la figura 5.6) se, comunque siano fissati un punto $y \in \gamma$ e una sezione locale S contenente γ, la traiettoria $\varphi(t, x)$ attraversa S lungo una successione strettamente monotona di punti $\{y_n\}$ convergenti a y.

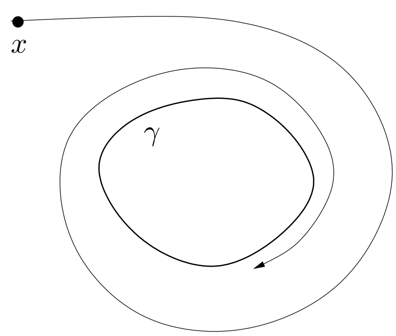

Figura 5.6: La traiettoria $\varphi(t, x)$ si muove a spirale nel piano verso le curve chiusa γ.

Lemma 21.11 *Sia* γ *un ciclo limite per il sistema dinamico planare* (21.1)*. Se* $\gamma = L_\omega(x)$ *per qualche* $x \notin \gamma$*, allora la traiettoria* $\varphi(t, x)$ *si muove a spirale verso* γ*.*

Dimostrazione. Poiché $\gamma = L_\omega(x)$, se $y \in L_\omega(x)$ e S è una sezione locale di f in y, fissato un intorno $B_\varepsilon(y)$ esiste un indice k_0 e una successione di punti $\varphi(t_k, x) \in B_\varepsilon(y)$ per $k > k_0$.

Sia ε tale da poter applicare il lemma 21.5 e concludere che, per ogni t_k, con $k > k_0$, esiste una successione $\{\sigma_k\}$ tale che $y_n = \varphi(t_k + \sigma_k, x) \in S$. Per il lemma 21.3 la successione $\{y_n\}$ è monotona su S e converge a y poiché $\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k, x) = y$. Ne concludiamo che la traiettoria $\varphi(t, x)$ si muove a spirale verso γ. ∎

Lemma 21.12 *Sia γ un ciclo limite per il sistema planare* (21.1). *Se $\gamma = L_\omega(x)$ e $y \in \gamma$, sia S una sezione locale di f in y e sia $\{y_k = \varphi(t_k, x)\}$ la successione di punti in cui la curva descritta dalla traiettoria $\varphi(t, x)$ interseca S. Definiamo*

- $C_k := \{\varphi(t, x) : t_k \le t \le t_{k+1}\}$;
- $\mathcal{A}_k$ *l'insieme compatto che ha come frontiera C_k, γ e il segmento contenuto in S che unisce i due punti $\varphi(t_k, x)$ e $\varphi(t_{k+1}, x)$;*
- $A_k := \mathcal{A}_k \setminus \partial\mathcal{A}_k$.

Allora esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $k > k_0$, l'insieme A_k non contiene punti di equilibrio.

Dimostrazione. Poiché $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \gamma$, se poniamo

$$a := \min_{x\in\gamma} |f(x)|, \tag{21.5}$$

si ha $a > 0$, poiché γ è compatto. Esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che per ogni punto z contenuto nell'insieme

$$B_\varepsilon(\gamma) := \bigcup_{y\in\gamma} B_\varepsilon(y) \tag{21.6}$$

si ha $2a > |f(z)| > a/2$. Dimostriamo per assurdo la stima dal basso (quella dall'alto si dimostra allo stesso modo). Se la stima non fosse soddisfatta, allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esisterebbe $z \in B_\varepsilon(\gamma)$ con $|f(z)| \le a/2$. Scegliendo un intero $n_0 > 0$ e $\varepsilon = \varepsilon_n = 1/n$, al variare di $n \in \mathbb{N}$, con $n > n_0$, si determinerebbe una successione $z_n \in \overline{B_{\varepsilon_{n_0}}(\gamma)}$, tale che $|f(z_n)| \le a/2$, da cui si potrebbe estrarre una sottosuccessione convergente $\{z_{n_j}\}$; indicando con z_0 il suo limite si avrebbe $z_0 \in \gamma$ per costruzione e $|f(z_0)| \le a/2$ per continuità, in contraddizione con la (21.5).

Vogliamo ora dimostrare che esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che per $k > k_0$ la curva C_k è contenuta all'interno di $B_\varepsilon(\gamma)$ (cfr. la figura 5.7). Per il lemma 21.5 possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo che, fissati $y \in \gamma$ e una sezione locale S di f in y, per ogni $z \in B_\varepsilon(y)$ esista $t(z)$ tale che $\varphi(t(z), z) \in S$ con $|t(z)| \le \sigma$ per qualche $\sigma > 0$. Sia $\delta \le e^{-L(T+\sigma)}\varepsilon$, dove L è la costante di Lipschitz di $f|\overline{B_\varepsilon(\gamma)}$ e T è il periodo della traiettoria che ha γ come orbita. Scegliamo k_0 tale che $|y_k - y| < \delta$ per ogni $k > k_0$. Per il teorema della dipendenza continua dai dati iniziali (teorema 12.3), si ha

$$|\varphi(t, y_k) - \varphi(t, y)| \le e^{Lt}\,|y_k - y| < e^{Lt}\delta \tag{21.7}$$

per ogni $t \ge 0$ e ogni $k > k_0$. In particolare

$$|\varphi(T, y_k) - y| \le |\varphi(T, y_k) - \varphi(T, y)| \le e^{LT}\,|y_k - y| \le e^{LT}\delta \le e^{-L\sigma}\varepsilon < \varepsilon, \tag{21.8}$$