Teorema 21.19 *Sia H una costante del moto di classe C^1 del sistema planare* (21.1)*. Se H non è identicamente costante su alcun insieme aperto, allora non ci sono né cicli limite né punti di equilibrio asintoticamente stabili.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un ciclo limite γ. Poiché H è una costante del moto, per ogni $y \in \gamma$, $H(\varphi(t, y))$ assume sempre lo stesso valore, che indichiamo con H_γ. Poiché H è continua, per ogni x tale che $\gamma = L_\omega(x)$, si ha $\lim_{k\to\infty} H(\varphi(t_k, x)) = H_\gamma$, per qualche successione monotona divergente $\{t_k\}$. Ma H deve assumere sempre lo stesso valore sulla traiettoria $\varphi(t, x)$, quindi $H(\varphi(t, x)) = H_\gamma$. Per il lemma 21.15, esiste un intorno $B(x)$ tale che $\gamma = L_\omega(z)$ per ogni $z \in B(x)$. Per ciascuno di tali punti possiamo ripetere il ragionamento precedente e concludere che $H(z) = H_\gamma$ per ogni $z \in B(x)$. Questo contraddice l'ipotesi che H non sia identicamente costante su alcun insieme aperto.

Il caso dei punti di equilibrio asintoticamente stabili si tratta in modo analogo. Se il sistema ammettesse un punto di equilibrio asintoticamente stabile x_0, esisterebbe un intorno $B(x_0)$ tale che $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t, z) = x_0$ per ogni $z \in B(x_0)$ e come nel caso precedente, si avrebbe $\lim_{t\to+\infty} H(\varphi(t, z)) = H(x_0)$ per ogni $z \in B(x_0)$. Poiché H è una costante del moto, ne seguirebbe che $H(z) = H(x_0)$ per ogni $z \in B(x_0)$, contro l'ipotesi su H. ■

Osservazione 21.20 La condizione che H non sia identicamente costante su alcun insieme aperto è soddisfatta, per esempio, se H ha punti stazionari isolati.

Per il teorema 21.7, gli insiemi limite compatti di un sistema planare che non contengano punti di equilibrio sono orbite chiuse. Sia γ una di tali orbite: se esistono punti $z \notin \gamma$ tali che $\gamma = L_\omega(z)$, allora γ è un ciclo limite; altrimenti possiamo solo dire che la traiettoria che si svolge su γ è periodica. Può infatti succedere che una data regione del piano sia interamente costituita da orbite chiuse, senza che per altro esistano cicli limite. Questo si verifica in sistemi meccanici conservativi, o, più in generale, in sistemi dinamici in cui esista una costante del moto che non sia identicamente nulla su alcun aperto, come mostra il seguente risultato.

Teorema 21.21 *Sia H una costante del moto di classe C^1 del sistema planare* (21.1) *tale che essa non sia identicamente costante su alcun insieme aperto. Se esiste un insieme aperto U che sia racchiuso all'interno di una componente connessa chiusa di una curva di livello di H e contenga un unico punto di equilibrio stabile x_0, allora ogni traiettoria $\varphi(t, \bar{x})$, con $\bar{x} \in U \setminus \{x_0\}$, è periodica e si svolge su un'orbita che contiene x_0 al suo interno.*

Dimostrazione. Sia $\bar{x}$ un punto arbitrario in $U \setminus \{x_0\}$ (cfr. la figura 5.8). Poiché $\overline{U}$ è compatto e invariante, $L_\omega(\bar{x})$ è non vuoto ed è contenuto in $\overline{U}$ (cfr. il lemma 19.9).

Notiamo in primo luogo che $L_\omega(\bar{x})$ non può essere contenuto in $\gamma := \partial U$: infatti, se H_γ è il valore che H assume su γ, poiché H è una costante del moto, si avrebbe $H(\varphi(t, \bar{x}) = H_\gamma$, i.e. $\varphi(t, \bar{x})$ dovrebbe appartenere alla curva di livello γ, contro l'ipotesi. Quindi $L_\omega(\bar{x})$ è contenuto in $U \setminus \gamma$.