Teorema 21.19 *Sia H una costante del moto di classe C^1 del sistema planare* (21.1)*. Se H non è identicamente costante su alcun insieme aperto, allora non ci sono né cicli limite né punti di equilibrio asintoticamente stabili.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un ciclo limite γ. Poiché H è una costante del moto, per ogni $y \in \gamma$, $H(\varphi(t,y))$ assume sempre lo stesso valore, che indichiamo con H_γ. Poiché H è continua, per ogni x tale che $\gamma = L_\omega(x)$, si ha $\lim_{k\to\infty} H(\varphi(t_k,x)) = H_\gamma$, per qualche successione monotona divergente $\{t_k\}$. Ma H deve assumere sempre lo stesso valore sulla traiettoria $\varphi(t,x)$, quindi $H(\varphi(t,x)) = H_\gamma$. Per il lemma 21.15, esiste un intorno $B(x)$ tale che $\gamma = L_\omega(z)$ per ogni $z \in B(x)$. Per ciascuno di tali punti possiamo ripetere il ragionamento precedente e concludere che $H(z) = H_\gamma$ per ogni $z \in B(x)$. Questo contraddice l'ipotesi che H non sia identicamente costante su alcun insieme aperto.

Il caso dei punti di equilibrio asintoticamente stabili si tratta in modo analogo. Se il sistema ammettesse un punto di equilibrio asintoticamente stabile x_0, esisterebbe un intorno $B(x_0)$ tale che $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t,z) = x_0$ per ogni $z \in B(x_0)$ e come nel caso precedente, si avrebbe $\lim_{t\to+\infty} H(\varphi(t,z)) = H(x_0)$ per ogni $z \in B(x_0)$. Poiché H è una costante del moto, ne seguirebbe che $H(z) = H(x_0)$ per ogni $z \in B(x_0)$, contro l'ipotesi su H. ∎

Osservazione 21.20 La condizione che H non sia identicamente costante su alcun insieme aperto è soddisfatta, per esempio, se H ha punti stazionari isolati.

Per il teorema 21.7, gli insiemi limite compatti di un sistema planare che non contengano punti di equilibrio sono orbite chiuse. Sia γ una di tali orbite: se esistono punti $z \notin \gamma$ tali che $\gamma = L_\omega(z)$, allora γ è un ciclo limite; altrimenti possiamo solo dire che la traiettoria che si svolge su γ è periodica. Può infatti succedere che una data regione del piano sia interamente costituita da orbite chiuse, senza che per altro esistano cicli limite. Questo si verifica in sistemi meccanici conservativi, o, più in generale, in sistemi dinamici in cui esista una costante del moto che non sia identicamente nulla su alcun aperto, come mostra il seguente risultato.

Teorema 21.21 *Sia H una costante del moto di classe C^1 del sistema planare* (21.1) *tale che essa non sia identicamente costante su alcun insieme aperto. Se esiste un insieme aperto U che sia racchiuso all'interno di una componente connessa chiusa di una curva di livello di H e contenga un unico punto di equilibrio stabile x_0, allora ogni traiettoria $\varphi(t,\bar{x})$, con $\bar{x} \in U \setminus \{x_0\}$, è periodica e si svolge su un'orbita che contiene x_0 al suo interno.*

Dimostrazione. Sia $\bar{x}$ un punto arbitrario in $U \setminus \{x_0\}$ (cfr. la figura 5.8). Poiché $\overline{U}$ è compatto e invariante, $L_\omega(\bar{x})$ è non vuoto ed è contenuto in $\overline{U}$ (cfr. il lemma 19.9).

Notiamo in primo luogo che $L_\omega(\bar{x})$ non può essere contenuto in $\gamma := \partial U$: infatti, se H_γ è il valore che H assume su γ, poiché H è una costante del moto, si avrebbe $H(\varphi(t,\bar{x}) = H_\gamma$, i.e. $\varphi(t,\bar{x})$ dovrebbe appartenere alla curva di livello γ, contro l'ipotesi. Quindi $L_\omega(\bar{x})$ è contenuto in $U \setminus \gamma$.

Inoltre $L_\omega(\bar{x})$ non può contenere il punto di equilibrio stabile x_0, come si vede ragionando per assurdo. Se x_0 appartenesse a $L_\omega(\bar{x})$, si avrebbe $L_\omega(\bar{x}) = \{x_0\}$ e $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t,\bar{x}) = x_0$ per il lemma 19.6. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\bar{x} \notin B_\varepsilon(x_0)$, e sia $z \in B_\delta(x_0)$, con δ tale che $\varphi(t,x) \in B_\varepsilon(x_0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (per la stabilità di x_0 tale δ esiste). Si ha $L_\omega(z) \neq \emptyset$ (cfr. di nuovo il lemma 19.9). Si dovrebbe allora avere $x_0 \in L_\omega(z)$. Infatti se così non fosse, dal momento che x_0 è l'unico punto di equilibrio contenuto in U, l'insieme $L_\omega(z)$ dovrebbe essere un'orbita chiusa per il teorema 21.7, contenuta in $B_\varepsilon(x_0)$ per costruzione, e dovrebbe racchiudere x_0 al suo interno per il teorema 21.18. Indicando con $\mathcal{C}$ tale orbita, la traiettoria $\varphi(t,\bar{x})$ dovrebbe allora intersecare la traiettoria che ha luogo sulla curva chiusa $\mathcal{C}$, contro il teorema di unicità (teorema 11.27). Avremmo quindi trovato $x_0 \in L_\omega(z)$. D'altra parte il discorso varrebbe per ogni $z \in B_\delta(x_0)$. Allora esisterebbe $\delta > 0$ tale che per ogni $z \in B_\delta(x_0)$ si avrebbe $L_\omega(z) = \{x_0\}$ e $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t,z) = x_0$, i.e. x_0 sarebbe attrattivo. Poiché x_0 è stabile per ipotesi, x_0 dovrebbe perciò essere asintoticamente stabile. Questo è in contraddizione con il teorema 21.19.

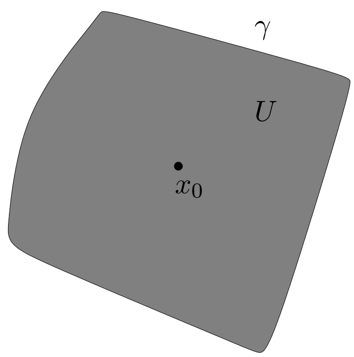

Figura 5.8: Discussione del teorema 21.21. La regione ombreggiata è racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello e contiene un punto di equilibrio stabile al suo interno.

In conclusione $L_\omega(\bar{x})$ non può contenere x_0. Deve quindi essere un'orbita chiusa per il teorema 21.7, poiché $L_\omega(\bar{x})$ è compatto e, per ipotesi, x_0 è l'unico punto di equilibrio in U. Se fosse $\bar{x} \notin L_\omega(\bar{x})$ allora $L_\omega(\bar{x})$ sarebbe un ciclo limite (cfr. la definizione 21.10), ma per il teorema 21.19 possiamo escludere l'esistenza di cicli limite all'interno di $\overline{U}$. Quindi si deve avere $\bar{x} \in L_\omega(\bar{x})$, ovvero $L_\omega(\bar{x})$ deve essere l'orbita della traiettoria $\varphi(t,\bar{x})$. La traiettoria $\varphi(t,\bar{x})$ è perciò periodica. Infine l'orbita chiusa percorsa dalla traiettoria deve contenere x_0 al suo interno per il teorema 21.18. ■

Teorema 21.22 *Sia H una costante del moto di classe C^1 del sistema planare* (21.1) *tale che essa non sia identicamente costante su alcun insieme aperto. Se esiste un insieme (aperto) U che sia racchiuso all'interno di due componenti connesse chiuse γ_+ e γ_-, con γ_- interna a γ_+, di una curva di livello di H e non contenga punti di equilibrio, allora ogni traiettoria $\varphi(t,\bar{x})$, con $\bar{x} \in U$, è periodica e si svolge su un'orbita che racchiude al suo interno la componente connessa γ_- della curva di livello.*

Dimostrazione. Si ragiona come per la dimostrazione del teorema 21.21, sostituendo a x_0 l'insieme vuoto $\emptyset$ (cfr. la figura 5.9). L'orbita deve racchiudere al suo interno la componente γ_-, dal momento che deve contenere un punto di equilibrio al suo interno (per il teorema 21.18) e, per ipotesi, non esistono punti di equilibrio in U. ■

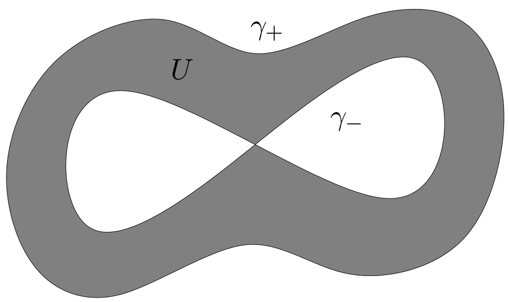

Figura 5.9: Scenario previsto nella discussione del teorema 21.22. La regione ombreggiata è racchiusa tra due componenti connesse di una curva di livello e non contiene punti di equilibrio al suo interno.

Osservazione 21.23 Dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{21.15}$$

se esiste una funzione $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che

$$f_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \qquad f_2(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(x), \tag{21.16}$$

con $x = (x_1, x_2)$, allora H è una costante del moto: infatti

$$\dot{H} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0.$$

D'altra parte se è noto *a priori* che esiste una costante del moto $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ per il sistema dinamico (21.15), non è detto che la (21.16) debba essere soddisfatta. In generale possiamo soltanto concludere che esiste una funzione $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che

$$f_1(x) = g(x) \frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \qquad f_2(x) = -g(x) \frac{\partial}{\partial x_1} H(x). \tag{21.17}$$

Infatti se $\dot{H} = 0$ si ha allora $\dot{H} = \langle \nabla H, \dot{x} \rangle = 0$, così che $\dot{x}$ deve essere ortogonale a ∇H, i.e. deve essere proporzionale al vettore

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x_2} H(x), \frac{\partial}{\partial x_1} H(x) \right),$$

con costante di proporzionalità che può dipendere dal punto x – che è la condizione (21.17).

Esempio 21.24 Consideriamo il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x y^2, \\ \dot{y} = -e^x xy. \end{cases} \tag{21.18}$$

Si vede immediatamente che $H(x, y) = x^2 + y^2$ è una costante del moto. D'altra parte il campo vettoriale f che definisce il sistema dinamico (21.18) è della forma (21.17), con $g(x, y) = e^x y$: in particolare non esiste alcuna funzione H tale che $f_1 = \partial H/\partial y$ e $f_2 = -\partial H/\partial x$, come è facile verificare. Si veda l'esercizio 30 per uno studio qualitativo del sistema (21.18).

§22 Sistemi gradiente

Nel presente paragrafo analizzeremo alcuni sistemi notevoli in cui il campo vettoriale si può scrivere come gradiente di una funzione scalare.

Definizione 22.1 (Sistema gradiente). *Un sistema dinamico* (17.1) *si dice* sistema gradiente *se esiste una funzione* $V \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *di classe* C^2 *tale che*

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = -\nabla V(x). \tag{22.1}$$

Definizione 22.2 (Punto regolare) *Diremo che il punto x è un* punto regolare *per il sistema gradiente* (22.1) *se* $\nabla V(x) \neq 0$.

Indicheremo con Σ_c la superficie di dimensione $n-1$ definita da $\Sigma_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = c\}$, con $c \in \mathbb{R}$: Σ_c è la *superficie di livello* di V corrispondente al valore c.

Lemma 22.3 (Proprietà dei sistemi gradiente) *Dato il sistema gradiente* (22.1), *si ha:*

1. $\dot{V}(x) \leq 0 \ \forall x$, *e* $\dot{V}(x) = 0$ *se e solo se x è un punto di equilibrio;*
2. *se x_0 è un punto di minimo isolato di $V(x)$ allora x_0 è un punto asintoticamente stabile;*
3. *se x è un punto regolare per il sistema* (22.1), *allora $\nabla V(x)$ è ortogonale in x alle superfici di livello di V;*
4. *nei punti regolari le traiettorie attraversano ortogonalmente le superfici di livello di V.*

Dimostrazione. Da (22.1) si ha

$$\dot{V}(x) = -\left(\nabla V(x)\right)^2 \leq 0,$$

così che $\dot{V}(x)$ è nullo se e solo se $\nabla V(x) = 0$; in quest'ultimo caso $f(x) = 0$. Questo dimostra la proprietà 1.

La funzione $V(x) - V(x_0)$ è una funzione di Ljapunov che verifica le proprietà 1÷3 del teorema 19.10 in un intorno di x_0. Quindi x_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Questo dimostra la proprietà 2.