

**Corollario 22.5** *Nel caso in cui  $V(x)$  abbia solo punti critici isolati, ogni traiettoria o tende all'infinito o tende a un punto di equilibrio (isolato).*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $\varphi(t, x)$  sia confinato in una regione limitata: esisterà allora un compatto  $K$  tale che  $\varphi(t, x) \in K \forall t \geq 0$ . Quindi l'insieme  $L_\omega(x)$  è non vuoto, per il lemma 19.9. Sia  $y \in L_\omega(x)$ : per il teorema 22.4 e per il fatto che i punti critici di  $V$  sono isolati, otteniamo che il punto  $y$  è un punto di equilibrio isolato. ■

**Teorema 22.6** *Gli autovalori della matrice  $A$  che si ottiene linearizzando il sistema (22.1) nell'intorno di un punto di equilibrio sono tutti reali.*

*Dimostrazione.* Poiché la funzione  $V(x)$  in (22.1) è di classe  $C^2$ , la matrice  $A$  del sistema linearizzato ha elementi  $A_{ij} = [\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j](x_0)$  ed è pertanto simmetrica. Quindi i suoi autovalori sono reali (cfr. l'esercizio 39 del capitolo 1). ■

**Osservazione 22.7** Il corollario 22.5 e il teorema 22.6 implicano che i sistemi gradiente non possono avere traiettorie periodiche o moti a spirale. Si noti anche che i sistemi gradiente hanno proprietà completamente differenti dai sistemi meccanici conservativi (cfr. la definizione 17.31). In particolare, mentre i sistemi gradiente non possono avere orbite chiuse, i sistemi meccanici conservativi non possono avere punti di equilibrio tali che le traiettorie o si avvicinino ad essi o si allontanino da essi lungo qualsiasi direzione (in particolare non possono avere punti di equilibrio asintoticamente stabili).

## §23 Equazioni di Lotka-Volterra

Le equazioni di Lotka-Volterra descrivono un sistema ecologico di predatori e prede (*sistema preda-predatore*), su cui si fanno le seguenti ipotesi:

- la preda è l'unico cibo del predatore;
- la velocità con cui i predatori si cibano di prede è proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori, e quindi al prodotto del numero di prede per il numero di predatori, con un minimo necessario per sostenere la popolazione di predatori;
- la velocità con cui diminuisce la popolazione delle prede a causa dei predatori è proporzionale al numero di incontri tra prede e predatori;
- il cibo disponibile per le prede è costante in assenza di predatori, e quindi, in assenza di predatori, la velocità con cui aumenta la popolazione di prede è proporzionale alla popolazione stessa.

Indichiamo con  $x$  il numero di prede e con  $y$  il numero di predatori, e trattiamo  $x, y$  come se fossero variabili continue. Ovviamente  $x, y \geq 0$ . L'evoluzione del sistema considerato è

allora descritto dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y, \end{cases} \quad (23.1)$$

che prendono il nome di *equazioni di Lotka-Volterra*. Le costanti  $A, B, C, D$  in (23.1) sono costanti reali positive.

**Lemma 23.1** *Il sistema dinamico descritto dalle equazioni (23.1) per  $x, y \geq 0$  ammette due punti di equilibrio  $z_1 = (0, 0)$  e  $z_2 = (D/C, A/B)$ , che sono rispettivamente un punto di sella e un centro per il sistema linearizzato.*

*Dimostrazione.* Segue dalla definizione di punto di equilibrio nel §17 e dallo studio dei sistemi planari lineari nel §7. ■

**Lemma 23.2** *Il punto di equilibrio  $z_2 = (D/C, A/B)$  è un punto di equilibrio stabile.*

*Dimostrazione.* Cerchiamo una funzione di Ljapunov della forma

$$H(x, y) = F(x) + G(y) + H_0.$$

dove  $F$  dipende solo da  $x$ ,  $G$  dipende solo da  $y$  e  $H_0$  è una costante. Usando le equazioni (23.1) si trova

$$\dot{H} = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} = x \frac{\partial F}{\partial x} (A - By) + y \frac{\partial G}{\partial y} (Cx - D),$$

così che si ha  $\dot{H} = 0$  se

$$\frac{x}{(Cx - D)} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{(By - A)} \frac{\partial G}{\partial y} = \text{cost.} = 1 \quad \implies \quad \begin{cases} F(x) = Cx - D \log x, \\ G(y) = By - A \log y. \end{cases}$$

Si vede allora che, scegliendo

$$H(x, y) = Cx - D \log x + By - A \log y - F(D/C) - G(A/B), \quad (23.2)$$

la matrice hessiana  $\mathcal{H}$  della funzione  $H(x, y)$ , calcolata in  $(x, y) = z_2$  è tale che  $\det \mathcal{H} > 0$  e  $H_{11} > 0$ . Il punto  $z_2$  risulta allora un punto di minimo isolato per  $H(x, y)$  (cfr. l'esercizio 3). Possiamo perciò utilizzare la (23.2) come funzione di Ljapunov e applicare il teorema 19.10, per dedurre che  $z_2$  è un punto di equilibrio stabile. ■

**Osservazione 23.3** L'argomento usato nella dimostrazione del lemma 23.2 mostra che la funzione (23.2) è una costante del moto per il sistema (23.1).

**Lemma 23.4** *Ogni traiettoria che non parta da  $z_2$  o da punti  $z = (x, y)$  con  $x = 0$  oppure  $y = 0$  è periodica (e quindi si svolge su un'orbita chiusa).*

*Dimostrazione.* Dividiamo il quadrante  $Q = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$  del piano  $(x, y)$  in quattro regioni:

$$Q_1 = \{(x, y) \in Q : x > D/C, y > A/B\}, \quad (23.3a)$$

$$Q_2 = \{(x, y) \in Q : x < D/C, y > A/B\}, \quad (23.3b)$$

$$Q_3 = \{(x, y) \in Q : x < D/C, y < A/B\}, \quad (23.3c)$$

$$Q_4 = \{(x, y) \in Q : x > D/C, y < A/B\}, \quad (23.3d)$$

separate dalle rette  $x = C/D$  e  $y = A/B$ . Dalle equazioni (23.1) vediamo che si deve avere

$$\dot{x} < 0, \quad \dot{y} > 0, \quad (x, y) \in Q_1, \quad (23.4a)$$

$$\dot{x} < 0, \quad \dot{y} < 0, \quad (x, y) \in Q_2, \quad (23.4b)$$

$$\dot{x} > 0, \quad \dot{y} < 0, \quad (x, y) \in Q_3, \quad (23.4c)$$

$$\dot{x} > 0, \quad \dot{y} > 0, \quad (x, y) \in Q_4, \quad (23.4d)$$

come illustrato nella figura 5.10.

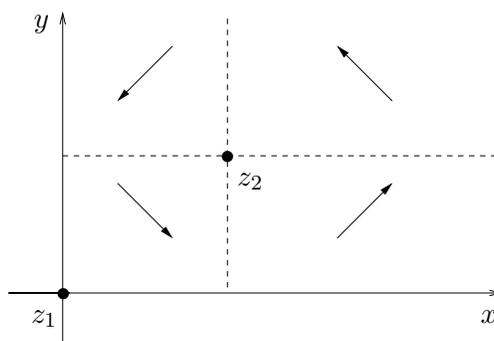


Figura 5.10: Divisione del primo quadrante nelle quattro regioni (23.3): in ciascuna regione il campo vettoriale è diretto come schematizzato dalla freccia.

Scelto  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Q_1$ , scriviamo  $\varphi(t, \bar{z}) = (x(t), y(t))$ . Fin tanto che  $\varphi(t, \bar{z}) \in Q_1$  si ha

$$\frac{d}{dt} \log x(t) = A - By(t) \leq A - B\bar{y} =: -r < 0, \quad \frac{d}{dt} \log y(t) = Cx(t) - D > 0,$$

dove  $r$  è una costante strettamente positiva. Quindi  $y(t)$  cresce e si ha

$$\frac{D}{C} \leq x(t) \leq \bar{x}e^{-rt}$$

per  $t \geq 0$  tale che  $x(t) \geq D/C$ . Esiste perciò un tempo  $\tau$  finito in cui  $x(t)$  raggiunge il valore  $D/C$ , tale che  $\dot{y}(\tau) = 0$  e  $\dot{x}(\tau) < 0$ , così che  $\varphi(t, \bar{z}) \in Q_2$  per  $t > \tau$ . Allo stesso modo si

dimostra che per dati iniziali in  $Q_2, Q_3, Q_4$  la traiettoria passa, rispettivamente, in  $Q_3, Q_4, Q_1$  in un tempo finito. Questo vuol dire che preso un dato iniziale qualsiasi  $\bar{z}$  in  $Q \setminus \{z_2\}$  la traiettoria che si origina passa successivamente da una regione all'altra, girando intorno a  $z_2$ .

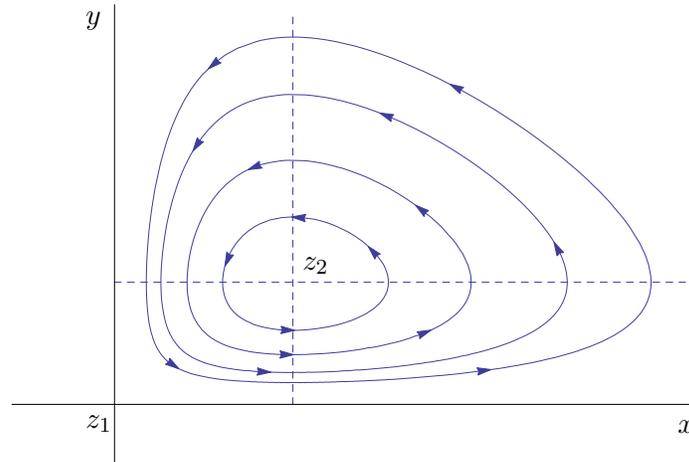


Figura 5.11: Alcune orbite per le equazioni di Lotka-Volterra: tranne che per i due punti di equilibrio ( $z_1$  e  $z_2$ ) e per le due semirette lungo gli assi coordinati  $x$  e  $y$ , tutte le traiettorie sono periodiche.

In realtà possiamo dimostrare di più: tutte le traiettorie che ruotano intorno a  $z_2$  si chiudono. Questo si può vedere come segue. Dall'osservazione 23.3 segue che la funzione  $H(x, y)$  in (23.2) è una costante del moto, quindi  $H(x(t), y(t)) = H(x(0), y(0))$  per ogni  $t$  per cui la soluzione è definita. Poiché  $H(x, y)$  tende all'infinito per  $x \rightarrow +\infty$  o  $y \rightarrow +\infty$  il moto si deve mantenere in una regione limitata. In altre parole, per ogni  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ , con  $\bar{y} > 0$ , esiste un compatto  $K$  tale che  $\varphi(t, \bar{z}) \in K \forall t \in \mathbb{R}$ . Di conseguenza, per il lemma 19.9,  $L_\omega(\bar{z})$  è non vuoto e limitato per ogni dato iniziale  $\bar{z}$  che non sia sugli assi coordinati. Se  $\bar{z} \neq z_2$ , non si può avere  $z_2 \in L_\omega(\bar{z})$  perché altrimenti si avrebbe  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \bar{z}) = z_2$  per il teorema 19.10, mentre  $H(\bar{z}) \neq H(z_2)$ , né  $z_1 \in L_\omega(\bar{z})$  perché  $H(z_1) = +\infty$ . Quindi  $L_\omega(\bar{z})$  deve essere un'orbita chiusa per il teorema di Poincaré-Bendixson (teorema 21.7). Poiché il sistema non può avere cicli limite (per il teorema 21.19), si deve avere  $\bar{z} \in L_\omega(\bar{z})$ , i.e. la traiettoria  $\varphi(t, \bar{z})$  è periodica. Inoltre  $L_\omega(\bar{z})$  deve racchiudere il punto  $z_2$  al suo interno: questo discende dal fatto, sopra dimostrato, che tutte le traiettorie  $\varphi(t, \bar{z})$ , con  $\bar{z} \in Q \setminus \{z_2\}$ , ruotano intorno a  $z_2$  (segue anche direttamente dal teorema 21.18). In particolare la traiettoria che si origina da ogni punto  $\bar{z} \neq z_2$  che non sia sugli assi coordinati deve descrivere un'orbita chiusa e il corrispondente moto deve essere periodico. La situazione è esemplificata nella figura 5.11. ■

**Teorema 23.5** (LEGGI DI VOLTERRA) *Valgono le seguenti leggi per il sistema dinamico di predatori e prede descritto dalle equazioni (23.1):*

1. le popolazioni seguono un ciclo periodico per ogni dato iniziale che non sia l'equilibrio e in cui il numero di prede e il numero di predatori siano entrambi strettamente positivi;
2. il numero medio (su un ciclo) di predatori e quello di prede non dipendono dal dato iniziale e coincidono con i rispettivi valori di equilibrio;
3. se si introduce una perturbazione che elimina predatori e prede in maniera proporzionale al loro numero (per esempio la caccia dell'uomo) il numero medio di prede aumenta e il numero medio di predatori diminuisce.

*Dimostrazione.* La legge 1 è un corollario del lemma 23.4.

Sia  $T$  il periodo di una traiettoria periodica con dato iniziale  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ . Possiamo riscrivere le equazioni (23.1) come

$$\begin{cases} \dot{x}/x = (A - By), \\ \dot{y}/y = (Cx - D), \end{cases}$$

e, integrando da 0 a  $t$ , otteniamo

$$\log x(t) - \log \bar{x} = At - B \int_0^t ds y(s), \quad \log y(t) - \log \bar{y} = -Dt + C \int_0^t ds x(s), \quad (23.5)$$

dove  $(x(t), y(t)) = \varphi(t, \bar{z})$ . Definiamo il numero medio (sul ciclo considerato) di predatori e di prede, rispettivamente, come

$$\langle x \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T ds x(s), \quad \langle y \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T ds y(s),$$

La (23.5) con  $t = T$  dà

$$\langle x \rangle = \frac{D}{C}, \quad \langle y \rangle = \frac{A}{B},$$

che non dipende dalla particolare orbita considerata; inoltre  $(\langle x \rangle, \langle y \rangle) = z_2$ . Questo dimostra la legge 2.

Infine, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x - \varepsilon_1 x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y - \varepsilon_2 y, \end{cases} \quad (23.6)$$

con  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ . Ragionando come per la dimostrazione della legge 2 troviamo

$$\langle x \rangle = \frac{D + \varepsilon_2}{C} > \frac{D}{C}, \quad \langle y \rangle = \frac{A - \varepsilon_1}{B} < \frac{A}{B},$$

che dimostra la legge 3. ■