

Di nuovo per parità esse avranno lo stesso periodo. È quindi sufficiente considerarne una, per esempio quella descritta dall'equazione

$$y = y_+(\theta) := \sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}.$$

In questo caso il periodo è dato dal tempo T necessario per andare da $(-\pi, y(-\pi))$ a $(\pi, y(\pi))$ (che rappresenta lo stesso punto, per le condizioni periodiche al contorno). Si ha

$$T = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{y_+(\theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2(E - 1 + \cos \theta)}}. \quad (24.22)$$

§24.6 Pendolo con attrito

Studiamo ora il caso $\alpha > 0$. In tal caso la funzione (24.3) non è più una costante del moto. I punti di equilibrio sono sempre dati da P_1 e P_2 in (24.7), come è immediato verificare. Il sistema linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio $(\theta_0, 0)$, con $\sin \theta_0 = 0$, è in tal caso dato dalla (24.8), con

$$A(x_0) = A(\theta_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta_0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

In corrispondenza del punto di equilibrio P_1 si ha

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1}, \quad (24.23)$$

mentre in corrispondenza del punto di equilibrio P_2 si ha

$$A(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

che ammette autovalori

$$\lambda = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}, \quad (24.24)$$

così che si vede che nel caso (24.23) entrambi gli autovalori hanno parte reale negativa, mentre nel caso (24.24) uno dei due autovalori ha parte reale positiva. Per il teorema 18.5 il punto P_1 è asintoticamente stabile, mentre per il teorema 18.7 il punto di equilibrio P_2 è instabile.

Possiamo utilizzare il teorema di Barbašin-Krasovskij (teorema 19.18) per dare una stima del bacino d'attrazione di P_1 . Consideriamo la curva \mathcal{C} corrispondente a una curva di livello γ_E , con $0 < E < 2$, del sistema (24.3) che descrive il pendolo senza attrito. Ovviamente \mathcal{C}

non è una curva che contenga orbite per il sistema (24.2). Sia \mathcal{A} la regione limitata racchiusa dalla curva \mathcal{C} e sia $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{A}}$. Notiamo innanzitutto che si ha, lungo le traiettorie,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -\alpha y^2, \quad (24.25)$$

così che la funzione $W = H$ verifica le proprietà 1 e 2 del teorema di Barbašin-Krasovskij. Vogliamo dimostrare che \mathcal{P} verifica le tre condizioni 3 del teorema. La condizione 3(a) è ovviamente soddisfatta poiché $x_0 \in \mathcal{P}$ per costruzione. Per dimostrare che \mathcal{P} è positivamente invariante, i.e. la proprietà 3(b), è sufficiente far vedere che, sulla frontiera di \mathcal{P} , i.e. su \mathcal{C} , il campo vettoriale è diretto verso l'interno (cfr. l'esercizio 27 del capitolo 4). Il campo vettoriale del sistema dinamico (24.2) è definito dalla funzione

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x), \quad f_0(x) = (y, -\sin \theta), \quad f_1(x) = (0, -\alpha y), \quad (24.26)$$

i.e. si può vedere come somma di due campi vettoriali, di cui $f_0(x)$ descrive il sistema dinamico (24.3), mentre $f_1(x)$ tiene conto del termine di attrito. Il campo vettoriale $f_0(x)$ è tangente a \mathcal{C} in ogni suo punto: infatti per costruzione \mathcal{C} è una curva di livello del sistema dinamico $\dot{x} = f_0(x)$, quindi il vettore tangente alla curva \mathcal{C} in un suo punto x è diretto lungo il campo vettoriale $f_0(x)$. D'altra parte il campo vettoriale $f_1(x)$ è diretto lungo l'asse delle ordinate e punta verso il basso se $y > 0$ e verso l'alto se $y < 0$ (e si annulla sui punti $y = 0$ di \mathcal{C}): quindi $f_1(x)$ spinge verso l'interno della regione \mathcal{A} . Ne segue che il campo vettoriale risultante (24.2) è diretto verso l'interno di \mathcal{A} . Dimostriamo ora che è verificata anche la proprietà 3(c). Poiché $\dot{W} = \dot{H}$ è data dalla (24.25) si ha $\dot{W} = 0$ solo se $y = 0$. Basta dunque dimostrare che non esistono traiettorie interamente contenute nell'insieme

$$\mathcal{S} := \{(\theta, y) \in \mathcal{A} : y = 0, \theta \neq 0\}; \quad (24.27)$$

questo infatti implica che non esiste alcuna traiettoria in $\mathcal{P} \setminus \{(0, 0)\}$ tale che $\dot{W}(z) = 0$ per ogni z lungo la traiettoria. In altre parole basta dimostrare che per ogni punto $x \in \mathcal{S}$ il campo vettoriale (24.26) non è diretto lungo l'asse delle ascisse, così che, se a un certo istante t_1 la traiettoria passa per \mathcal{S} , allora al tempo $t = t_1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, essa dovrà abbandonare \mathcal{S} . Poiché per ogni punto $(\theta, y) \in \mathcal{S}$ si ha $f(\theta, y) = (0, -\sin \theta)$ si vede che il campo vettoriale è sempre diretto ortogonalmente a \mathcal{S} : infatti $\sin \theta = 0$ solo per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, ma entrambi i punti $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$ non sono contenuti in \mathcal{S} .

L'argomento si può applicare a qualsiasi curva \mathcal{C} che corrisponda a una curva di livello γ_E , con $0 < E < 2$: la regione \mathcal{A} racchiusa da una qualsiasi di tali curve costituisce una stima del bacino d'attrazione del punto P_1 .

Se calcoliamo la derivata sostanziale della funzione (24.4), troviamo $\dot{H} = -\alpha y^2$ (cfr. la (24.25)). Si ha

$$H(\theta(t), y(t)) = H(\theta(0), y(0)) + \int_0^t ds \dot{H}(\theta(s), y(s)) = H(\theta(0), y(0)) - \alpha \int_0^t ds y^2(s). \quad (24.28)$$

Dal momento che $H(\theta, y) \geq 0 \forall (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, l'integrale in (24.28), essendo positivo per ogni $t > 0$, deve convergere per $t \rightarrow +\infty$. Questo comporta che $y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (cfr. l'esercizio 8). Inoltre, anche $\dot{y}(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (cfr. di nuovo l'esercizio 8). Poiché $\dot{y} = -\sin \theta - \alpha y$, si ha $\sin \theta(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Quindi $\theta(t)$ tende a 0 o a π per $t \rightarrow +\infty$. Ne concludiamo che per ogni dato iniziale $\bar{x} \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, si ha $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (0, 0)$ oppure $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (\pi, 0)$. Le traiettorie asintotiche a $P_2 = (\pi, 0)$ si muovono lungo una curva regolare che costituisce quella che si chiama la *varietà stabile* di P_2 (cfr. la nota bibliografica). Tale curva ha un ramo nel semipiano superiore e un ramo nel semipiano inferiore. Tutte le traiettorie che partono da punti al di fuori di tali varietà sono invece asintotiche a P_1 . La situazione è rappresentata nella figura 5.16.

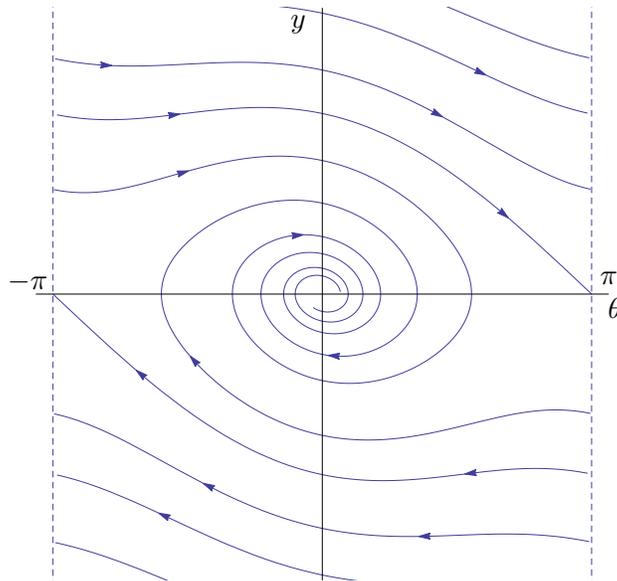


Figura 5.16: Piano delle fasi per il pendolo con attrito.

§25 Un esempio propedeutico di sistema planare

Discutiamo in dettaglio un secondo esempio di sistema planare, che, per quanto fisicamente meno interessante del pendolo matematico visto al paragrafo precedente, costituisce comunque un utile paradigma per gli esercizi più avanti. Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot{y} = -4xy(x^2 + y^2 - 2). \end{cases} \quad (25.1)$$