

Dal momento che $H(\theta, y) \geq 0 \forall (\theta, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, l'integrale in (24.28), essendo positivo per ogni $t > 0$, deve convergere per $t \rightarrow +\infty$. Questo comporta che $y(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (cfr. l'esercizio 8). Inoltre, anche $\dot{y}(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (cfr. di nuovo l'esercizio 8). Poiché $\dot{y} = -\sin \theta - \alpha y$, si ha $\sin \theta(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Quindi $\theta(t)$ tende a 0 o a π per $t \rightarrow +\infty$. Ne concludiamo che per ogni dato iniziale $\bar{x} \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$, si ha $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (0, 0)$ oppure $\varphi(t, \bar{x}) \rightarrow (\pi, 0)$. Le traiettorie asintotiche a $P_2 = (\pi, 0)$ si muovono lungo una curva regolare che costituisce quella che si chiama la *varietà stabile* di P_2 (cfr. la nota bibliografica). Tale curva ha un ramo nel semipiano superiore e un ramo nel semipiano inferiore. Tutte le traiettorie che partono da punti al di fuori di tali varietà sono invece asintotiche a P_1 . La situazione è rappresentata nella figura 5.16.

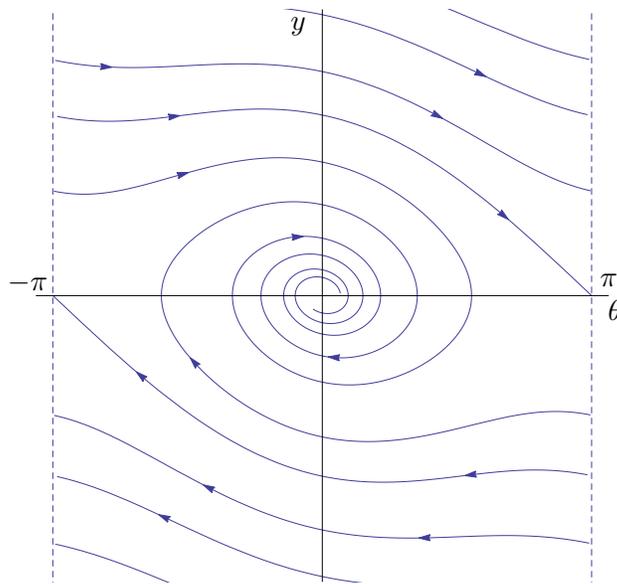


Figura 5.16: Piano delle fasi per il pendolo con attrito.

§25 Un esempio propedeutico di sistema planare

Discutiamo in dettaglio un secondo esempio di sistema planare, che, per quanto fisicamente meno interessante del pendolo matematico visto al paragrafo precedente, costituisce comunque un utile paradigma per gli esercizi più avanti.

Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot{y} = -4xy(x^2 + y^2 - 2). \end{cases} \quad (25.1)$$

(1) Si verifichi che la funzione

$$H(x, y) = y(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) \quad (25.2)$$

è una costante del moto.

(2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

(3) Si analizzino le curve di livello di $H(x, y)$ nel piano, se ne determini qualitativamente la forma e se ne discuta il verso di percorrenza.

(4) Si risolvano esplicitamente le equazioni del moto, i.e. si trovi la soluzione $(x(t), y(t))$, in corrispondenza del dato iniziale $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.

§25.1 Costante del moto

Si verifica facilmente che

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 4xy(x^2 + y^2 - 2), \quad \frac{\partial H}{\partial y} = (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 3) + 4y^2(x^2 + y^2 - 2).$$

Quindi

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = 0,$$

i.e. $H(x, y)$ è effettivamente una costante del moto.

§25.2 Punti di equilibrio

Cercando i valori (x, y) in corrispondenza dei quali si annullano entrambe le componenti del campo vettoriale che definisce il sistema dinamico (25.1), si trovano i seguenti punti di equilibrio:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(0, \sqrt{\frac{6 + \sqrt{21}}{5}}\right), & P_2 &= \left(0, \sqrt{\frac{6 - \sqrt{21}}{5}}\right), \\ P_3 &= \left(0, -\sqrt{\frac{6 - \sqrt{21}}{5}}\right), & P_4 &= \left(0, -\sqrt{\frac{6 + \sqrt{21}}{5}}\right), \\ P_5 &= (\sqrt{3}, 0), & P_6 &= (1, 0), & P_7 &= (-1, 0), & P_8 &= (-\sqrt{3}, 0). \end{aligned} \quad (25.3)$$

Si noti che $H(P_5) = H(P_6) = H(P_7) = H(P_8) = 0$.

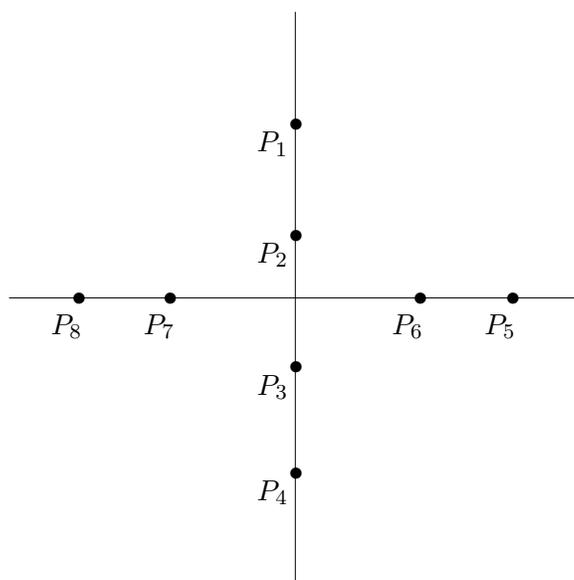


Figura 5.17: Punti di equilibrio (25.3) per il sistema (25.1).

§25.3 Curve di livello. Parte I

Le curve di livello sono le curve

$$\gamma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}.$$

Si vede subito che per $E = 0$ si ha $\gamma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, dove

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad (25.4a)$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}, \quad (25.4b)$$

$$\mathcal{C}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}. \quad (25.4c)$$

Sulla curva \mathcal{C}_3 si ha $\dot{y} = 0$, mentre

$$\begin{cases} \dot{x} > 0, & |x| < 1, \quad |x| > 3, \\ \dot{x} < 0, & 1 < |x| < 3. \end{cases}$$

Sulla curva \mathcal{C}_1 si ha

$$\dot{x} = -4y^2 < 0, \quad \dot{y} = 4xy,$$

mentre sulla curva \mathcal{C}_2 si ha

$$\dot{x} = 4y^2 > 0, \quad \dot{y} = -4xy,$$

così che sulla curva \mathcal{C}_1 ci si muove da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$; allo stesso modo sulla curva \mathcal{C}_2 ci si muove da sinistra a destra nel semipiano $y < 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y > 0$ (cfr. la figura 5.18).

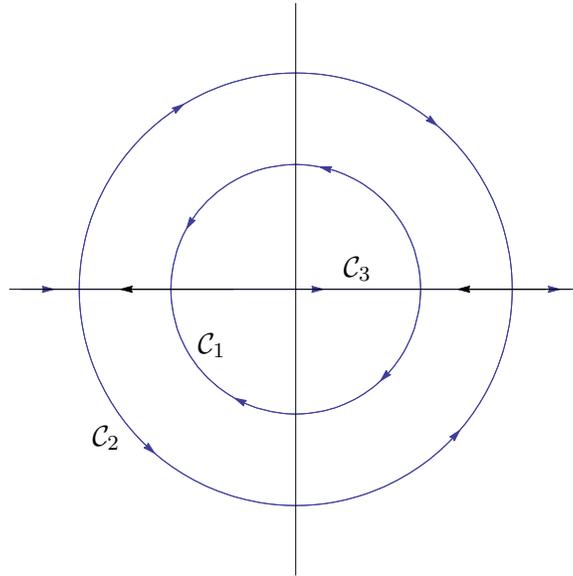


Figura 5.18: Orbite contenute nelle componenti \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 di γ_0 con i rispettivi versi di percorrenza.

§25.4 Studio della stabilità dei punti di equilibrio

I punti di equilibrio P_1 , P_2 , P_3 e P_4 sono punti di equilibrio stabili, come è facile verificare applicando il teorema di Ljapunov (teorema 19.10) nel modo seguente. Si noti innanzitutto che $H(x, y)$ è positiva nella regione compresa tra le curve di livello γ_0 e contenente i punti P_3 e P_4 , e negativa nella regione rimanente. Quindi P_2 e P_4 sono punti di massimo, mentre P_1 e P_3 sono punti di minimo. Per $P_0 \in \{P_2, P_4\}$, si può allora scegliere come funzione di Ljapunov

$$W(x, y) = H(P_0) - H(x, y),$$

e fissare un intorno sufficientemente piccolo $B(P_0)$ di P_0 , così che

$$\begin{cases} W(P_0) = 0, \\ W(x, y) - W(0, 0) > 0 & \forall (x, y) \in B(P_0) \setminus P_0, \\ \dot{W}(x, y) = 0, \end{cases}$$

poiché P_0 è un punto di massimo per la funzione $W(x, y)$ nel dominio $\overline{B(P_0)}$ e $W(x, y)$ è una costante del moto. Analogamente si ragiona per $P_0 \in \{P_1, P_3\}$, prendendo come funzione di

Ljapunov

$$W(x, y) = H(x, y) - H(P_0).$$

Per quanto riguarda i punti di equilibrio P_5, P_6, P_7 e P_8 , essi sono tutti instabili, come si può facilmente dimostrare utilizzando i risultati del §25.3 in particolare considerando i versi di percorrenza dei rami della curva di livello γ_0 passanti per tali punti di equilibrio. Infatti un intorno, per quanto piccolo, di ciascuno di tali punti di equilibrio contiene dati iniziali le cui traiettorie escono dall'intorno in un tempo finito. Alternativamente si può linearizzare il sistema nell'intorno di ciascun punto $P_0 \in \{P_5, P_6, P_7, P_8\}$, e verificare che, posto $P_0 = (x_0, y_0)$, almeno un autovalore della corrispondente matrice

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 4x_0(x_0^2 + 3y_0^2 - 2) & 4y_0(3x_0^2 + 5y_0^2 - 6) \\ -4y_0(3x_0^2 + y_0^2 - 2) & -4x_0(x_0^2 + 3y_0^2 - 2) \end{pmatrix}$$

è positivo. Si ha infatti, tenendo conto che $y_0 = 0$,

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} 4x_0(x_0^2 - 2) & 0 \\ 0 & -4x_0(x_0^2 - 2) \end{pmatrix},$$

così che gli autovalori sono $\lambda_{\pm} = \pm 4x_0(x_0^2 - 2)$, quindi sono uno positivo e uno negativo.

§25.5 Curve di livello. Parte II

Le altre curve di livello sono rappresentate nella figura 5.19 insieme alla curva di livello γ_0 . In particolare, per tracciare le curve di livello che circondano i punti di equilibrio stabili si è tenuto conto del teorema 21.21. Anche i versi di percorrenza si ottengono per continuità, tenendo conto dei versi di percorrenza sulla curva di livello γ_0 discussi nel §25.3.

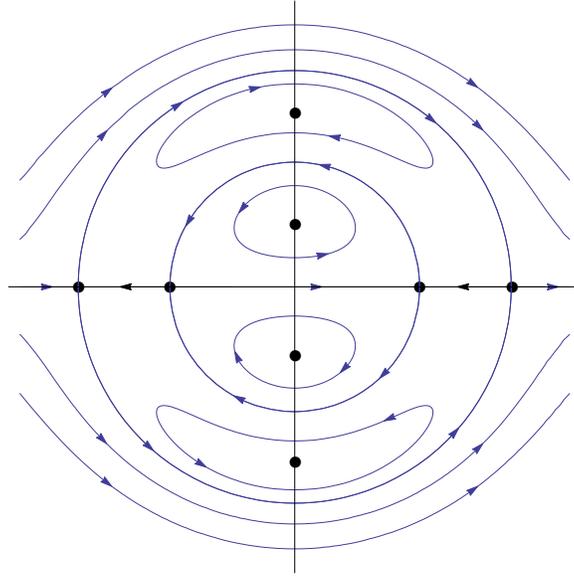


Figura 5.19: Alcune curve di livello e orbite significative, con i rispettivi versi di percorrenza, per il sistema (25.1). In particolare sono indicati gli 8 punti di equilibrio in (25.3).

È anche possibile effettuare uno studio analitico più dettagliato delle curve di livello (cfr. gli esercizi 9÷11). Si noti in ogni caso che questo non sempre è fattibile: è ovvio che più complicata è l'espressione della costante del moto, più è difficile studiarne analiticamente le curve di livello.

§25.6 Una soluzione esplicita

Se $P_0 = (x(0), y(0)) = (0, 1)$ si ha allora $P_0 \in \mathcal{C}_1 \subset \gamma_0$, quindi $x^2(t) + y^2(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y^2 = -4(1 - x^2), \\ \dot{y} = 4xy. \end{cases}$$

La prima si può risolvere esplicitamente per separazione di variabili, e dà

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x^2 - 1} = 4 \int_0^t dt = 4t.$$

Scrivendo

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right),$$

si ottiene

$$\int_0^{x(t)} \frac{dx}{x-1} - \int_0^{x(t)} \frac{dx}{x+1} = 8 \int_0^t dt = 8t.$$

Integrando, si ha

$$\log \left| \frac{x(t)-1}{x(t)+1} \right| = 8t,$$

ovvero, utilizzando il fatto che $|x(t)| < 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\log \frac{1-x(t)}{1+x(t)} = 8t \quad \Longrightarrow \quad x(t) = \frac{1-e^{8t}}{1+e^{8t}}. \quad (25.5)$$

Tenendo conto che $y(0) = 1$, si ha

$$\dot{y} = 4xy \quad \Longrightarrow \quad \int_1^{y(t)} \frac{dy}{y} = 4 \int_0^t dt x(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \sqrt{1 - \left(\frac{1-e^{8t}}{1+e^{8t}} \right)^2}. \quad (25.6)$$

La soluzione sarà quindi $(x(t), y(t))$, con $x(t)$ data dalla (25.5) e $y(t)$ data dalla (25.6). In particolare si verifica immediatamente che la condizione iniziale è verificata; inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0.$$

Nota bibliografica Per gli argomenti trattati nel §21 abbiamo seguito prevalentemente [Hirsh & Smale, Cap. 11], e, in misura minore, [Dell'Antonio, Cap. III]. I §§22 e 23 sono tratti da [Hirsh & Smale, Capp. 9 e 12]. Infine i §§24 e 25, essendo sostanzialmente esercizi, non sono tratti da alcuna fonte particolare, ma sono solo un'applicazione dei risultati discussi nei paragrafi precedenti e nel precedente capitolo.

Per la dimostrazione del teorema della curva di Jordan rimandiamo, per esempio, a [Watson, Cap. I]. L'equazione di van der Pol discussa negli esercizi 65÷72, ove abbiamo seguito [Hirsh & Smale, Cap. 8], è di estrema importanza per la teoria dei circuiti e costituisce il prototipo di sistema dissipativo con un ciclo limite verso cui tutte le soluzioni oscillatorie convergono e, nel caso in cui si aggiunga un termine forzante, come esempio paradigmatico di sistema caotico – al pari dell'equazione di Duffing e del pendolo forzato (cfr. per esempio [Guckenheimer & Holmes] per ulteriori dettagli).

Per un'introduzione alle varietà stabili e instabili si veda, per esempio, [Jordan & Smith]; per una trattazione più esauriente rimandiamo a [Hartman] o [Irwin].